人大附中 2025 届高三数学暑假自主复习检测练习

2024 年 8 月 20 日

制卷人：吴文庆　　审卷人：吴中才 杨良庆

说明：本卷共三道大题，21 道小题，共 6 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1．已知 $P=\{x\mid y=\sqrt{x+1}\}, Q=\{y\mid y=x^2\}$，则下列选项中正确的是

A．$P\cup Q=\mathbf{R}$　　B．$Q\subseteq P$　　C．$P\cap Q=\varnothing$　　D．$P\subseteq Q$

2．若复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{m-\mathrm{i}}$ 的实部与虚部相等，则实数 m 的值为

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

3．2024 年 7 月 27 日，在印度新德里召开的联合国教科文组织第 46 届世界遗产大会通过决议，将“北京中轴线——中国理想都城秩序的杰作”列入《世界遗产名录》。北京中轴线实际上不是正南正北的，它向西偏离了子午线约 2°．下列各式与 $\cos 2^\circ$ 不相等的是

A．$1-2\sin^2 1^\circ$　　B．$2\cos^2 1^\circ-1$　　C．$\dfrac{\sin 2^\circ}{\tan 2^\circ}$　　D．$2\sin 1^\circ\cos 1^\circ$

4．在平面内，设 $\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的法向量，A、B 为两个定点，$A\in l$，$B\notin l$，P 为一动点，若点 P 满足：$\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{\boldsymbol{n}}=|\overrightarrow{PB}|$，则动点 P 的轨迹是

A．圆　　B．抛物线　　C．椭圆　　D．双曲线

5．已知圆锥曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率 e 为方程 $3x^2-10x+3=0$ 的根，则满足条件的 m 有几个不同的值

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．已知 p：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1<0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2<0$ 的解集相同，q：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，则 p 是 q 成立的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知直线$l:(m-1)x+2y+3-m=0$与圆$C:x^2+y^2-6x+6y=0$交于A,B两点，则线段AB的长度的取值范围是

A．$[\sqrt{10},3\sqrt{2}]$　　B．$[2\sqrt{10},6\sqrt{2}]$　　C．$[2\sqrt{10},4\sqrt{2}]$　　D．$[\sqrt{10},6\sqrt{2}]$

8．一件刚出土的文物要在博物馆大厅中央展出，需要设计各面是玻璃平面的无底正四棱柱将其罩住，并在罩内充满保护文物的无色气体．已知文物近似于塔形，高1.8米，体积为0.5立方米，其底部是直径为0.9米的圆（如图），要求文物底部边缘与玻璃罩底边间隔最小为0.3米，文物顶部与玻璃罩上底面间隔0.2米，气体每立方米1000元，则气体费用为

A．4500元　　B．4000元　　C．2880元　　D．2380元

9．某农贸市场出售西红柿，当价格上涨时，供给量相应增加，而需求量相应减少，具体调查结果如下表：

表1　市场供给表

单价（元/kg）	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
供给量（吨）	50	60	70	75	80	90

表2　市场需求表

单价（元/kg）	4	3.4	2.9	2.6	2.3	2
需求量（吨）	50	60	65	70	75	80

根据以上提供的信息，市场供需平衡点（即供给量和需求量相等时的单价）应在区间

A．$(2.3,2.4)$　　B．$(2.4,2.6)$　　C．$(2.6,2.8)$　　D．$(2.8,2.9)$

10．已知集合$I\subseteq\{a\mid a=(x,y),x,y\in\mathbf{R}\}$，若对于任意$m,n\in I$，以及任意实数$\lambda\in[0,1]$，满足$\lambda m+(1-\lambda)n\in I$，则称集合$I$为“封闭集”．下列说法正确的是

A．集合$A=\{a\mid a=(x,y),y\geq x^3\}$为“封闭集”

B．集合$B=\{a\mid a=(x,y),y\leq \ln x\}$为“封闭集”

C．若$A\cap B$是“封闭集”，则A,B都是“封闭集”

D．若A,B都是“封闭集”，则$A\cup B$也一定是“封闭集”

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.）

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为________.

12. 若 $(-2x+1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_6x^6$，则 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_6|=$_____.

13. 若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x-m$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有两个零点 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$_____.

14. 若函数 $f(x)=\sin x-x+1$，则不等式 $f(x+1)+f(2-2x)>2$ 的解集为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}(n\le 9)$ 各项均为正整数，对任意的 $k\in \mathrm{N}^*(2\le k\le 8)$，$a_k=a_{k-1}+1$ 和 $a_k=a_{k+1}-1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1=6$，$a_9=14$. 记 $S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9$. 给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 可能为等差数列；　　②$\{a_n\}$ 中最大的项为 a_9；

③ S_9 不存在最大值；　　④ S_9 的最小值为 36.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，$b=2\sqrt{2}$.

（I）求 A；

（II）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\cos C=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；　条件②：$a=\sqrt{5}$；　条件③：$\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

17. 如图1，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90$ ，$BC=3$，$AC=6$，D、E分别为AC、AB上的点，且$DE//BC$ ，$DE=2$ ，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使$A_1C\perp CD$，如图2.

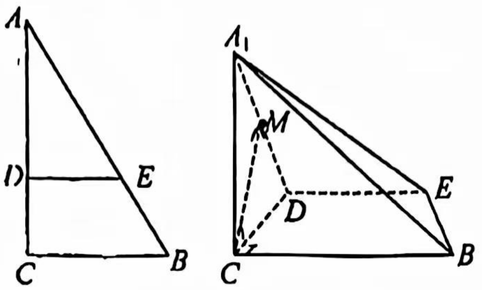


图1　　图2

（Ⅰ）求证：$A_1C\perp$平面$BCDE$；

（Ⅱ）若M是A_1D的中点，求CM与平面A_1BE所成角的大小；

（Ⅲ）线段BC上是否存在点P，使平面A_1DP与平面A_1BE垂直？说明理由.

18. “地上文物看山西”，由于山西现存大量的古代建筑，今年暑期来自全国各地的游客都选择山西作为旅游目的地．某景区趁此时机，举行暑期网上购票抽奖立减活动，在网上购买该景区门票的游客，可通过手机扫景区提供的二维码进入抽奖活动页面，每张门票可从6个减免红包中随机抽取2个进行门票价格立减，6个红包的金额分别为5元、5元、10元、10元、30元、30元，已知该景区门票每张100元，全部实行网上购票.

（Ⅰ）记购买1张门票的游客通过抽奖获得的红包金额之和为X，求X的分布列与期望；

（Ⅱ）已知每位游客除门票外平均在该景区消费20元、60元、90元的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，举行此抽奖活动后预计可使该景区暑期客流量增加40%，假设每位购票游客都进行了抽奖，回答下列问题并说明理由：

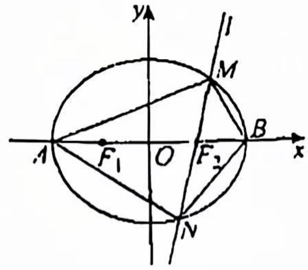
①举行抽奖活动后该景区暑期的门票收入是增加了，还是减少了？

②举行抽奖活动后该景区暑期的总收入是增加了，还是减少了？

19. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，左、右顶点分别为$A$、$B$，左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$．过右焦点$F_2$的直线$l$交椭圆于点$M$、$N$，且$\triangle F_1MN$的周长为16.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）记直线AM、BN的斜率分别为k_1、k_2，证明：$\dfrac{k_1}{k_2}$为定值.



20. 设$f(x)=e^x$.

（Ⅰ）求证：直线$y=x+1$与曲线$y=f(x)$相切；

（Ⅱ）设点P在曲线$y=f(x)$上，点Q在直线$y=x-1$上，求$|PQ|$的最小值；

（Ⅲ）若正实数a,b满足：对于任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\geq ax+b$，求ab的最大值.

21. 数列 a_n：$a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\geq 4)$，满足：$a_1=1$，$a_n=m$，$a_{k+1}-a_k=0$ 或1（$k=1$，2，$\cdots$，$n-1$），对任意 i,j 都存在 s,t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且两两不相等.

（Ⅰ）若 $m=2$，直接写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号；

①1,1,2,2　　　　②1,1,1,2,2,2　　　　③1,1,1,1,2,2,2,2

（Ⅱ）记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $m=3$，求 S 的最小值；

（Ⅲ）若 $m=2024$，求 n 的最小值.