2024北京北师大二附中高三（上）开学考

数　学

一、选择题

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-2,-1,0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{-2,2\}$　　D．$\{0,1\}$

2．复数 $z=(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 对应的点在复平面内的（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $f(x)=-\dfrac{x}{x-2}$，则函数在 $x=1$ 处的切线方程是（　）

A．$2x-y+1=0$　　B．$x-2y+2=0$　　C．$2x-y-1=0$　　D．$x+2y-2=0$

4．若 $a<b$ 且 $ab\neq 0$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\dfrac{b}{a}>1$　　C．$a^3<b^3$　　D．$|a|<|b|$

5．$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为（　）

A．10　　B．20　　C．40　　D．80

6．已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 为其前 n 项和，那么“$a_1>0$”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．小王同学进行投篮练习，若他第 1 球投进，则第 2 球投进的概率为 $\dfrac{2}{3}$；若他第 1 球投不进，则第 2 球投进的概率为 $\dfrac{1}{3}$，若他第 1 球投进概率为 $\dfrac{2}{3}$，他第 2 球投进的概率为（　）

A．$\dfrac{5}{9}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．$\dfrac{8}{3}$

8．若函数 $y=\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，则 m 的最大值为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．1

9．已知圆 C：$x^2+y^2=4$，直线 l：$y=kx+m$，当 k 变化时，l 截得圆 C 弦长的最小值为 2，则常数 $m=$（　）

A．± 2　　B．$\pm\sqrt{2}$　　C．$\pm\sqrt{3}$　　D．± 3

10．已知数列$\{a_n\}$中各项均为正数，且$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，给出下列四个结论：

①对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n>1$

②数列$\{a_n\}$可能为常数列

③若$0<a_1<2$，则当$n\geq 2$时，$a_1<a_n<2$

④若$a_1>2$，则数列$\{a_n\}$为递减数列

其中正确结论有（　）个

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

11．若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$的一条渐近线方程为$y=\dfrac{1}{2}x$，则$a=$______.

12．数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，记$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且a_1,a_3,a_4成等比数列，则$a_1=$______；$S_n=$______.

13．在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，点P在AB边上，则向量$\overrightarrow{CP}$在向量$\overrightarrow{CB}$上的投影向量的长度是______，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值是______.

14．设函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$（$a$为常数），若$f\left(x\right)$为奇函数，则$a=$______；若$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的增函数，则$a$的取值范围是______.

15．设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-a+1\right)\left(x+1\right),x<1\\ \lg x-a,x\geq 1\end{cases}$

①当$a=0$时，$f\left(f\left(1\right)\right)=$______；

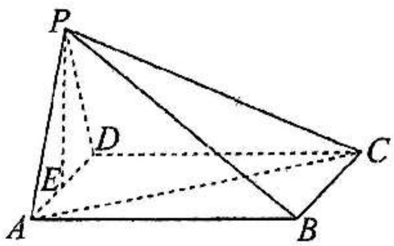
②若$f\left(x\right)$恰有2个零点，则a的取值范围是______.

三、解答题

16．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$为矩形，$AB=3$，$BC=2$．$\triangle PAD$为等边三角形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，E为AD的中点．

（1）求证：$PE\perp AB$；

（2）求平面PAC与平面$ABCD$夹角的余弦值．



17．在$\triangle ABC$中，$b\sin A=a\cos B$．

（1）求$\angle B$的大小；

（2）再从下列三个条件中，选择两个作为已知，使得$\triangle ABC$存在且唯一，求$\triangle ABC$的面积.

条件①$\cos A=-\dfrac{1}{2}$；

条件②$b=\sqrt{2}$；

条件③AB边上的高为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18．为研究某地区2021届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区2021届大学刚刚毕业的学生中随机选取了1000人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区2021届大学毕业生选择的毕业去向相互独立.

（1）若该地区一所高校2021届大学毕业生的人数为2500，试根据样本估计该校2021届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（2）从该地区2021届大学毕业生中随机选取3人，记随机变量X为这3人中选择“继续学习深造”的人数，以样本的频率估计概率，求X的分布列和数学期望$E(X)$；

（3）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的$a(0<a<98)$人选择了上表中其他的毕业去向．记半年后表中五种毕业去向对应人数的方差为s^2．当a为何值时，s^2最小.（结论不要求证明）

19．已知函数$f(x)=(\ln x-a)\mathrm{e}^x$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程；

（2）若$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$存在极小值，求a的取值范围.

20．已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过$A(1,0)$、$B(0,b)$两点．点$O$为坐标原点，且$\triangle AOB$的面积为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．过点$P(0,1)$且斜率为$k(k>0)$的直线$l$与椭圆$C$有两个不同的交点$M$、$N$，且直线$AM$、$AN$分别与$y$轴交于点$S$、$T$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）求直线l的斜率k的取值范围；

（3）设$\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求$\lambda+\mu$的取值范围.

21．已知集合$A=\{1,2,3,\cdots,2n\}(n\in\mathbf{N}^*)$．对于$A$的一个子集$S$，若存在不大于$n$的正整数$m$，使得对于

S中的任意一对元素s_1, s_2，都有$\left|s_1 - s_2\right| \neq m$，则称$S$具有性质 P.

（Ⅰ）当$n=10$时，试判断集合$B=\left\{x \in A \middle| x>9\right\}$和$C=\left\{x \in A \middle| x=3k-1, k \in \mathbf{N}^*\right\}$是否具有性质 P?并说明理由.

（Ⅱ）当$n=100$时，若集合S具有性质 P，那么集合$T=\left\{2001-x \middle| x \in S\right\}$是否一定具有性质 P?并说明理由；

（Ⅲ）当$n=1000$时，若集合S具有性质 P，求集合S中元素个数的最大值.

参考答案

一、选择题

1.【答案】B

【分析】求出集合 A，B，由此能求出 $A\cap B$.

【详解】因为集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$， $B=\left\{x\middle|x^2<2\right\}=\left\{x\middle|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right\}$，所以

$A\cap B=\left\{-1,0,1\right\}$.

故选：B.

2.【答案】B

【分析】利用复数的乘法化简复数 z，利用复数的几何意义可得出结论.

【详解】因为 $z=\left(-1+\mathrm{i}\right)\left(2+\mathrm{i}\right)=-3+\mathrm{i}$，因此，复数 z 对应的点在复平面内的第二象限.

故选：B.

3.【答案】C

【分析】求导，即得斜率，然后表示出直线方程即可.

【详解】因为 $f\left(x\right)=-\dfrac{x}{x-2}$，

所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{-\left(x-2\right)+x}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{2}{\left(x-2\right)^2}$，

所以 $f'\left(1\right)=2$，又 $f\left(1\right)=1$，

所以函数在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2\left(x-1\right)$，

即 $2x-y-1=0$.

故选：C

4.【答案】C

【分析】根据作差法判断 C；结合不等式的基本性质举例说明即可判断 ABD.

【详解】A：当 $a<0<b$ 时，$\dfrac{1}{a}<0<\dfrac{1}{b}$，故 A 错误；

B：当 $a=-2,b=-1$ 时，满足 $a<b$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}<1$，$\dfrac{b}{a}>1$ 不成立，故 B 错误；

C：$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=\left(a-b\right)\left[\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right]$，

因为 $a<b$，所以 $a-b<0$，得 $a^3-b^3<0$，即 $a^3<b^3$，故 C 正确；

D：当 $a=-2,b=-1$ 时，满足 $a<b$，$\left|a\right|>\left|b\right|$，$\left|a\right|<\left|b\right|$ 不成立，故 D 错误.

故选：C

5.【答案】C

【详解】分析：写出$T_{r+1}=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$，然后可得结果

详解：由题可得$T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(x^2\right)^{5-r}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$

令$10-3\mathrm{r}=4$,则$\mathrm{r}=2$

所以$C_5^r\cdot 2^r=C_5^2\cdot 2^2=40$

故选 C.

点睛：本题主要考查二项式定理，属于基础题.

6.【答案】B

【分析】

分别从充分性和必要性入手进行分析即可得解.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

充分性：当$a_1>0$，$q<0$时，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=a_1q^n$，无法判断其正负，显然数列$\{S_n\}$为不一定是递增数列，充分性不成立;

必要性：当数列$\{S_n\}$为递增数列时，$S_n-S_{n-1}=a_n>0$，可得$a_1>0$，必要性成立.

故“$a_1>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的必要而不充分条件.

故选：B.

【点睛】方法点睛：证明或判断充分性和必要性的常用方法：①定义法，②等价法，③集合包含关系法.

7.【答案】A

【分析】把第 2 球投进的事件分拆成两个互斥事件的和，分别算出这两个互斥事件的概率即可得解.

【详解】第 2 球投进的事件M是第一球投进，第 2 球投进的事件M_1与第一球没投进，第 2 球投进的事件M_2的和，M_1与M_2互斥，

$P(M_1)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，$P(M_2)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，则$P(M_1+M_2)=P(M_1)+P(M_2)=\dfrac{5}{9}$，

所以第 2 球投进的概率为$\dfrac{5}{9}$.

故选：A

8.【答案】C

【分析】由函数直接可得单调递增区间，进而可得参数取值范围.

【详解】由$y=\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得当$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\pi x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$时函数单调递增，

即$x\in\left[-\dfrac{1}{3}+2k,\dfrac{2}{3}+2k\right],k\in Z$，

当 $k=0$ 时，$x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，

又函数在 $[0,m]$，

所以 $0<m\le\frac{2}{3}$，

即 m 的最大值为 $\frac{2}{3}$，

故选：C.

9.【答案】C

【分析】由直线 L 过定点 $M(0,m)$，结合圆的对称性以及勾股定理得出 m 的取值.

【详解】直线 L： $y=kx+m$ 恒过点 $M(0,m)$，由于直线被圆 C 所截的弦长的最小值为 2，即当直线 L 与直线 OM 垂直时（O 为原点），弦长取得最小值，于是 $2^2=\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2+|OM|^2=1+m^2$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

故选：C

10.【答案】C

【分析】结合数列递推式研究数列的单调性，逐项判断即可.

【详解】解：对于①，在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$，则 $a_{n+1}\left(a_{n+1}-1\right)=a_n$，

又对于任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 都有 $a_n>0$，则 $a_{n+1}-1>0$，即 $a_{n+1}>1$，

即对于任意的 $n\ge 2$，都有 $a_n>1$，

所以 a_1 的值不确定大小，故①项错误；

对于②，不妨设数列$\{a_n\}$可能为常数列，则 $a_n=a_{n+1}$，

又 $a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$，则 $a_n^2-a_n=a_n$，则 $a_n=2$，

即 $a_1=2$ 时，数列$\{a_n\}$为常数列，故②项正确；

对于③，$0<a_1<2$，则 $0<a_2^2-a_2<2$，因为数列$\{a_n\}$中各项均为正数，

即 $0<a_2<2$，同理，当 $n\ge 2$，都有 $0<a_n<2$，

又 $a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})>0$，即数列$\{a_n\}$为递增数列，

即当 $n\ge 2$ 时，$a_1<a_n<2$，故③项正确.

对于④，$a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})$

又 $a_1>2$，则 $0<a_2^2-a_2<2$，即 $1<a_2<2$，

同理，当 $n\ge 2$，都有 $a_2^2-a_2>2$，即 $a_2>2$，

同理，当 $n\ge 2$，都有 $a_n>2$，

即 $a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}-a_{n+1}^2=a_{n+1}(2-a_{n+1})<0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$为递减数列，故④项正确；

故选：C.

【点睛】关键点睛：数列与不等式以及数列与单调性等问题，常利用作差法，需要熟练应用不等式知识解决数列中的相关问题.

二、填空题

11.【答案】2

【分析】根据题意可得 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，从而可求出 a 的值.

【详解】因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，

所以 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2$，

故答案为：2.

12.【答案】 ①. 8 ②. $-n^2+9n$

【分析】

由等比数列的性质得 $a_3^2=a_1\cdot a_4$，解出 a_1 的值，再结合等差数列的前 n 项和公式可得结果.

【详解】因为数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列， a_1,a_3,a_4 成等比数列，

所以 $a_3^2=a_1\cdot a_4$，即 $\left(a_1-4\right)^2=a_1\left(a_1-6\right)$，解得 $a_1=8$；

所以 $S_n=8n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\times\left(-2\right)=-n^2+9n$，

故答案为：8，$-n^2+9n$.

13.【答案】 ①. $\sqrt{3}$ ②. -2

【分析】根据投影向量的概念，可求得向量 $\overrightarrow{CP}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的长度；

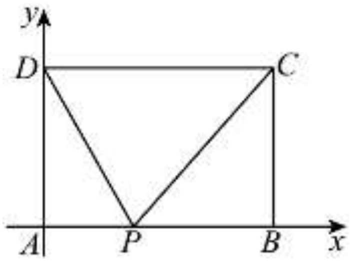
建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标运算，表示出 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}$，利用二次函数的性质求得答案.

【详解】由题意可得 $||\overrightarrow{CP}|\cdot\cos\angle PCB|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{3}$，

即向量 $\overrightarrow{CP}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的长度是 $\sqrt{3}$ ；

如图，以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，建立平面直角坐标系，

设 $P(x,0),(0\le x\le 2)$ ，则 $A(0,0),B(2,0),C(2,\sqrt{3}),D(0,\sqrt{3})$



故 $\overrightarrow{CP}=(x-2,-\sqrt{3}),\overrightarrow{PD}=(-x,\sqrt{3})$ ，

则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$，

当 $x=1\in[0,2]$ 时，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PD}$ 取最大值为 -2 ，

故答案为：$\sqrt{3}$；-2

14.【答案】 ①. -1； ②. $(-\infty,0]$.

【分析】首先由奇函数的定义得到关于 a 的恒等式，据此可得 a 的值，然后利用导函数的解析式可得 a 的取值范围.

【详解】若函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$ 为奇函数, 则 $f(-x)=-f(x), e^{-x}+ae^x=-\left(e^x+ae^{-x}\right)$,

$(a+1)\left(e^x+e^{-x}\right)=0$ 对任意的 x 恒成立.

若函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$ 是 R 上的增函数, 则 $f'(x)=e^x-ae^{-x}\geq 0$ 恒成立, $a\leq e^{2x}, a\leq 0$.

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$

【点睛】本题考查函数 奇偶性、单调性、利用单调性确定参数的范围. 解答过程中, 需利用转化与化归思想, 转化成恒成立问题. 注重重点知识、基础知识、基本运算能力的考查.

15.【答案】 ①. 1 ②. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

【分析】由分段函数解析式先求 $f(1)$，再求 $f(f(1))$ 的值，结合零点的定义分段求零点，由条件求 a 的取值范围.

【详解】当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x<1\\ \lg x, x\geq 1\end{cases}$，

所以 $f(1)=\lg 1=0$，

所以 $f(f(1))=f(0)=1$，

令 $f(x)=0$，可得

当 $x<1$ 时，$(x-a+1)(x+1)=0$，

所以 $x=-1$ 或 $x=a-1$，

当 $a=0$ 或 $a\geq 2$ 时，方程 $(x-a+1)(x+1)=0$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一解 $x=-1$，

当 $a<0$ 或 $0<a<2$ 时，方程 $(x-a+1)(x+1)=0$ 在 $(-\infty,1)$ 上的解为 $x=-1$ 或 $x=a-1$，

当 $x \geq 1$ 时，$\lg x - a = 0$，

所以当 $a \geq 0$ 时，$x = 10^{a}$，

当 $a < 0$ 时，方程 $\lg x - a = 0$ 在 $\left[1, +\infty\right)$ 上无解，

综上，当 $a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1, a-1$，

当 $a = 0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1, 1$，

当 $0 < a < 2$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点 $-1, a-1, 10^{a}$，

当 $a \geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1, 10^{a}$，

因为 $f(x)$ 恰有 2 个零点，所以 $a \geq 2$ 或 $a \leq 0$，

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right)$.

故答案为：1；$\left(-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right)$.

三、解答题

16.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【分析】（1）根据面面垂直的性质定理可证明 $PE \perp$ 平面 $ABCD$，结合线面垂直的性质定理，即可证明结论；

（2）建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标，可求得相关向量的坐标，从而求得平面 PAC 的法向量，利用向量的夹角公式，即可求得答案.

【小问 1 详解】

证明：因为△PAD 为正三角形，E 为 AD 中点，

所以 $PE \perp AD$，

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

$PE \subset$ 平面 PAD，

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE \perp AB$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$PE \perp$ 平面 $ABCD$.

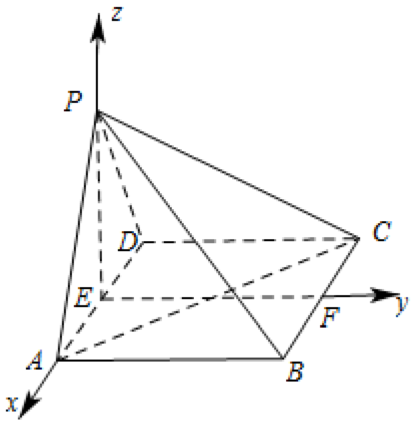
取 BC 中点 F，连结 EF,

因为底面 $ABCD$ 为矩形，E 为 AD 中点，

所以 $EF \perp AD$，

所以 EA，EF，EP 两两垂直.

分别以 E 为坐标原点，EA，EF，EP 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $E\text{-}xyz$，



则 $E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,3,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(-2,3,0)$．

设平面 PAC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ -2x+3y=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{3}$，得 $x=3$，$y=2$，

所以 $\vec{n}=(3,2,\sqrt{3})$，

平面 $ABCD$ 的法向量可取 $\overrightarrow{EP}=(0,0,\sqrt{3})$．

设平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角大小为 θ，可知 θ 为锐角，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{EP}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{EP}|}\right|=\left|\dfrac{(3,2,\sqrt{3})\cdot(0,0,\sqrt{3})}{4\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以平面 PAC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

17．【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{4}$

（2）答案见解析

【分析】（1）利用正弦定理边化角，结合同角三角函数关系求出 $\tan B$，即可得答案；

（2）若选①②，根据 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$ 求出 A，由正弦定理求出 a，再利用两角和的正弦公式求出 $\sin C$，由三角形面积公式，即可求得答案；若选①③，根据 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$ 求出 A，再根据 AB 边上的高 h 求出 b，下面解法同选①②；若选②③，根据条件可求出 A 的值不唯一，即可判断不合题意．

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$中，$b\sin A=a\cos B$，由正弦定理得$\sin B\sin A=\sin A\cos B$，

由于$A\in(0,\pi),\therefore \sin A\neq 0$，则$\sin B=\cos B,\therefore \tan B=1$，

由于$B\in(0,\pi)$，故$B=\dfrac{\pi}{4}$；

【小问2详解】

若选①②，$\triangle ABC$存在且唯一，解答如下：

由于$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$A\in(0,\pi),\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$，

又$b=\sqrt{2}$，故$\dfrac{a}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$，则$a=\sqrt{3}$；

又$C=\pi-A-B=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$，故$\sin C=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$；

若选①③，$\triangle ABC$存在且唯一，解答如下：

由于$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$A\in(0,\pi),\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$，

AB边上的高h为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$b=\dfrac{h}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

则$\dfrac{a}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$，则$a=\sqrt{3}$；

又$C=\pi-A-B=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$，故$\sin C=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$；

若选②③，$\triangle ABC$不唯一，解答如下：

$b=\sqrt{2}$，AB边上的高h为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$\sin A=\dfrac{h}{b}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$A\in(0,\pi),\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$或$\dfrac{\pi}{3}$，此时$\triangle ABC$有两解，不唯一，不合题意.

18. 为研究某地区2021届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区2021届大学毕业生中随机选取了1000人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区2021届大学毕业生选择的毕业去向相互独立.

（1）若该地区一所高校2021届大学毕业生的人数为2500，试根据样本估计该校2021届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（2）从该地区2021届大学毕业生中随机选取3人，记随机变量X为这3人中选择“继续学习深造”的人数．以样本的频率估计概率，求X的分布列和数学期望$E(X)$；

（3）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的a $(0<a<98)$人选择了上表中其他的毕业去向，记此时表中五种毕业去向对应人数的方差为s^2．当a为何值时，s^2最小.（结论不要求证明）

【答案】（1）1400

（2）分布列见解析；期望为$\frac{3}{5}$

（3）$a=42$

【分析】(1)用样本中“单位就业”的频率乘以毕业生人数可得；

(2)先由样本数据得选择“继续学习深造”的频率，然后由二项分布可得；

(3)由方差的意义可得.

【小问1详解】

由题意得，该校2021届大学毕业生选择“单位就业”的人数为$2500\times\frac{560}{1000}=1400$.

【小问2详解】

由题意得，样本中1000名毕业生选择“继续学习深造”的频率为$\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$.

用频率估计概率，从该地区2021届大学毕业生中随机选取1名学生，估计该生选择“继续学习深造”的概率为$\frac{1}{5}$.

随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3.

所以$P\left(X=0\right)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(1-\frac{1}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，

$P\left(X=1\right)=C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$，

$P\left(X=2\right)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{125}$，

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(x)=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$.

【小问 3 详解】

易知五种毕业去向　人数的平均数为 200，要使方差最小，则数据波动性越小，故当自主创业和慢就业人数相等时方差最小，所以 $a=42$.

19. 已知函数 $f(x)=(\ln x-a)e^x$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间（0，e]存在极小值，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $y=e(x-1)$

（2） $\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$

【分析】（1）由 $a=0$，得到 $f(x)=\ln x\cdot e^2(x>0)$，求导，从而得到 $f'(1)$， $f(1)$，写出切线方程；

（2）求导 $f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x-a\right)e^x$，令 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x-a$， $x\in(0,e]$，易得函数 $g(x)$ 在区间（0，e]上的最小值为 $g(1)=1-a$，方法 1：分 $a\le1$， $1<a<1+\frac{1}{e}$， $a\ge1+\frac{1}{e}$ 讨论求解；方法 2：根据 $f(x)$ 在区间（0，e]上存在极小值，由 $\begin{cases}g(1)<0\\g(e)>0\end{cases}$ 求解.

【小问 1 详解】

当 $a=0$ 时， $f(x)=\ln x\cdot e^x(x>0)$，

则 $f'(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)e^x$，

所以 $f'(1)=e$， $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)$；

【小问 2 详解】

$f'(x)=\frac{1}{x}e^x+(\ln x-a)e^x=\left(\frac{1}{x}+\ln x-a\right)e^x$，

令 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x-a$， $x\in(0,e]$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

解 $g'(x)=0$，得 $x=1$，

$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下：

x	（0，1）	1	（1，e）
$g'(x)$	－	0	＋
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $g(x)$ 在区间（0，e]上的最小值为 $g(1)=1-a$，

方法 1：

①当 $a\le 1$ 时， $g(1)=1-a\ge 0$.所以 $g(x)\ge 0$ 恒成立，即 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间（0，e]上是增函数，无极值，不符合要求，

②当 $1<a<1+\frac{1}{e}$ 时，因为 $g(1)=1-a<0$， $g(e)=1+\frac{1}{e}-a>0$，

所以存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $g(x_0)=0$

x	（1，x_0）	x_0	（x_0，e）
$g(x)(f'(x))$	－	0	＋
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间（1，e）上存在极小值 $f(x_0)$，符合要求，

③当 $a\ge 1+\frac{1}{e}$ 时，因 $g(e)=1+\frac{1}{e}-a<0$

所以函数 $f(x)$ 在区间（1，e）上无极值.

取 $x=\frac{1}{ae}\in(0,1)$，则 $g\left(\frac{1}{ae}\right)=ae-\ln a-1-a\ge ae-(a-1)-1-a=a(e-2)>0$

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$

易知， x_0 为函数 $f(x)$ 在区间（0，1）上的极大值点.

所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间（0，e）上有极大值，无极小值，不符合要求

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(1,1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

方法 2：

“$f\left(x\right)$ 在区间（0，e]上存在极小值”，当且仅当 $\begin{cases} g\left(1\right)<0 \\ g\left(e\right)>0 \end{cases}$，解得 $1<a<1+\dfrac{1}{e}$.

证明如下：

当 $1<a<1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，

因为 $\begin{cases} g\left(1\right)<0 \\ g\left(e\right)>0 \end{cases}$，所以存在 x_0，使得 $g\left(x_0\right)=0$

x	（1，x_0）	x_0	（x_0，e）
$g(x)(f'(x))$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间（1，e）上存在极小值.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(1,1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

【点睛】方法点睛：本题第二问 $f(x)$ 在区间（0，e]是否存在极小值，转化为 $f'(x)=0$ 有不等零点且左负右正求解.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过 A $1,0$ ，$B\left(0,b\right)$ 两点.O 为坐标原点，且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.过点 $P\left(0,1\right)$ 且斜率为 k（$k>0$）的直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点 M，N，且直线 AM ，AN 分别与 y 轴交于点 S，T.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）求直线 l 的斜率 k 的取值范围；

（III）设 $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围.

【答案】(I) $x^2+2y^2=1$ (II) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ (III) $\left(\sqrt{2},2\right)$

【分析】(I) 把点 A 坐标代入椭圆的方程得 $a=1$.由 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 可知，$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，解得 b，进而得椭圆 C 的方程.

（II）设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.联立直线 l 与椭圆 C 的方程可得关于 x 的一元二次方程.$\Delta>0$，进而解得 k 的取值范围.

（III）因为 $A\ 1,0$ ，$P(0,1)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，写出直线 AM 的方程，令 $x=0$，解得 $y=\dfrac{-y_1}{x_1-1}$.点 S 的坐标为 $\left(0,\dfrac{-y_1}{x_1-1}\right)$.同理可得：点 T 的坐标为 $\left(0,\dfrac{-y_2}{x_2-1}\right)$.用坐标表示 $\overrightarrow{PS}$，$\overrightarrow{PT}$，$\overrightarrow{PQ}$，代入 $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，得 $\lambda=\dfrac{y_1}{x_1-1}+1=\dfrac{kx_1+1}{x_1-1}+1$.同理 $\mu=\dfrac{kx_2+1}{x_2-1}+1$.由（II）得 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2k^2+1}$，代入 $\lambda+\mu$，化简再求取值范围.

【详解】（I）因为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$经过点 $A\ 1,0$ ，

所以 $a^2=1$解得 $a=1$.

由 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 可知，$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

解得 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=1$.

（II）设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.

联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ y=kx+1\end{cases}$，消 y 整理可得：$\left(2k^2+1\right)x^2+4kx+1=0$.

因为直线与椭圆有两个不同的交点，

所以 $\Delta=16k^2-4\left(2k^2+1\right)>0$，解得 $k^2>\dfrac{1}{2}$.

因为 $k>0$，所以 k 的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

（III）因为 $A\ 1,0$ ，$P(0,1)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.

所以直线 AM 的方程是：$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$.

令 $x=0$，解得 $y=\dfrac{-y_1}{x_1-1}$.

所以点 S 的坐标为 $\left(0,\dfrac{-y_1}{x_1-1}\right)$.

同理可得：点 T 的坐标为 $\left(0,\dfrac{-y_2}{x_2-1}\right)$.

所以 $\overrightarrow{PS}=\left(0,\dfrac{-y_1}{x_1-1}-1\right)$，$\overrightarrow{PT}=\left(0,\dfrac{-y_2}{x_2-1}-1\right)$，$\overrightarrow{PO}=(0,-1)$.

由 $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，

可得：$\dfrac{-y_1}{x_1-1}-1=-\lambda$，$\dfrac{-y_2}{x_2-1}-1=-\mu$，

所以 $\lambda=\dfrac{y_1}{x_1-1}+1=\dfrac{kx_1+1}{x_1-1}+1$.

同理 $\mu=\dfrac{kx_2+1}{x_2-1}+1$.

由（II）得 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2k^2+1}$，

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{kx_1+1}{x_1-1}+\dfrac{kx_2+1}{x_2-1}+2=\dfrac{2kx_1x_2+(1-k)(x_1+x_2)-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}+2$

$$=\frac{2k\cdot\dfrac{1}{2k^2+1}+(1-k)\left(-\dfrac{4k}{2k^2+1}\right)-2}{\dfrac{1}{2k^2+1}+\left(\dfrac{4k}{2k^2+1}\right)+1}+2$$

$$=\frac{2k-4k+4k^2-2(2k^2+1)}{1+4k+2k^2+1}+2$$

$$=\frac{-(k+1)}{(k+1)^2}+2$$

$$=-\frac{1}{k+1}+2\in(\sqrt{2},2)\left(\because k>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

所以 $\lambda+\mu$ 的范围是 $(\sqrt{2},2)$.

【点睛】涉及椭圆的弦长、中点、距离等相关问题时，一般利用根与系数的关系采用“设而不求”“整体带入”等解法.

21. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n\}(n\in\mathrm{N}^*)$. 对于 A 的一个子集 S，若存在不大于 n 的正整数 m，使得对于 S 中的任意一对元素 s_1,s_2，都有 $|s_1-s_2|\neq m$，则称 S 具有性质 P.

（1）当 $n=10$ 时，试判断集合 $B=\{x\in A|x>9\}$ 和 $C=\{x\in A|x=3k-1,k\in\mathrm{N}^*\}$ 是否具有性质 P?并说明理由；

（2）当$n=1000$时，若集合 S 具有性质 P，那么集合$T=\left\{2001-x\middle|x\in S\right\}$是否一定具有性质 P?并说明理由；

（3）当$n=1000$时，若集合 S 具有性质 P，求集合 S 中元素个数的最大值.

【答案】(1）集合 B 不具有性质 P，集合C 具有性质 P，理由见解析

（2）具有，理由见解析

（3）1333

【分析】(1）根据集合 S 具有性质 P 的定义去判断已知集合是否满足定义，即可判断；

（2）根据集合$T=\left\{2001-x\middle|x\in S\right\}$，任取$t=2001-x_0\in T$，因为$S\subseteq A$，说明$x_0\in\{1,2,3,\cdots,2000\}$，可得$1\le 2001-x_0\le 2000$，即可说明$T\subseteq A$，继而结合定义即可得结论；

（3）设集合 S 有 k 个元素，可推出集合 S 与 T 中必有一个集合中至少存在一半元素不超过 1000，不妨设 S 中有 t（$t\ge\frac{k}{2}$）个元素$b_1,b_2,\cdots,b_t$不超过 1000，从而可得不等式$k+\frac{k}{2}\le 2000$，结合 k 为正整数，可得$k\le 1333$，再结合定义，即可确定答案.

【小问 1 详解】

当$n=10$时，集合$A=\{1,2,3,\cdots,20\}$，$B=\{x\in A|x>9\}=\{10,11,\cdots,20\}$，

则集合 B 不具有性质 P，理由如下：

因为对于任意不大于 n 的正整数 m，都可以找到该集合中的两个元素$b_1=10,b_2=10+m$，

使得$|b_1-b_2|=m$成立；

集合$C=\left\{x\in A\middle|x=3k-1,k\in \mathrm{N}^*\right\}$具有性质 P，理由如下：

因为可取$m=1<10$，对于该集合中的任意一对元素$c_1=3k_1-1,c_2=3k_2-1,k_1,k_2\in\mathrm{N}^*$，

都有$|c_1-c_2|=3|k_1-k_2|\ne 1,k_1,k_2\in\mathrm{N}^*$；

【小问 2 详解】

当$n=1000$时，集合$A=\{1,2,3,\cdots,2000\}$，

若集合 S 具有性质 P，那么集合$T=\left\{2001-x\middle|x\in S\right\}$一定具有性质 P，理由如下：

首先因为集合$T=\left\{2001-x\middle|x\in S\right\}$，任取$t=2001-x_0\in T$，其中$x_0\in S$，

因为$S\subseteq A$，所以$x_0\in\{1,2,3,\cdots,2000\}$，

从而$1\le 2001-x_0\le 2000$，即$t=2001-x_0\in A$，故$T\subseteq A$，

由于 S 具有性质 P，可知存在不大于 1000 的正整数 m，

使得对于 S 中的任意一对元素s_1,s_2，都有$|s_1-s_2|\ne m$，

对于上述正整数 m，从集合$T=\left\{2001-x\middle|x\in S\right\}$中任取一对元素$t_1=2001-x_1,t_2=2001-x_2$，

其中 $x_1, x_2 \in S$，则有 $|t_1 - t_2| = |x_1 - x_2| \neq m$，

故集合 $T = \{2001 - x | x \in S\}$ 具有性质 P.

【小问 3 详解】

设集合 S 有 k 个元素，由第（2）问可知，若集合 S 具有性质 P，那么集合 $T = \{2001 - x | x \in S\}$ 一定具有性质 P，

任给 $x \in S, 1 \leq x \leq 2000$，则 x 与 $2001 - x$ 中必有一个不超过 1000，

所以集合 S 与 T 中必有一个集合中至少存在一半元素不超过 1000，

不妨设 S 中有 t（$t \geq \frac{k}{2}$）个元素 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 不超过 1000，

由集合 S 具有性质 P 可知存在正整数 $m \leq 1000$，

使得对于 S 中的任意一对元素 s_1, s_2，都有 $|s_1 - s_2| \neq m$，

所以一定有 $b_1 + m, b_2 + m, \cdots, b_t + m \notin S$，

又 $b_T + m \leq 1000 + 1000 = 2000$，故 $b_1 + m, b_2 + m, \cdots, b_t + m \in A$，

因此集合 A 中至少有 t 个元素不在子集 S 中，

故 $k + \frac{k}{2} \leq k + t \leq 2000$，即 $k + \frac{k}{2} \leq 2000$，结合 k 为正整数，可得 $k \leq 1333$，

当 $S = \{1, 2, 3, \cdots, 665, 666, 1334, \cdots, 1999, 2000\}$ 时，取 $m = 667$，

则可知集合 S 中任意两个元素 y_1, y_2，都有 $|y_1 - y_2| \neq 667$，

即集合 S 具有性质 P，而此时集合 S 中有 1333 个元素，

因此集合 S 中元素个数的最大值为 1333.

【点睛】难点点睛：本题是关于集合新定义类题目，解答的难点在于要理解新定义，明确其内涵，并能根据其含义去解决问题.