

8. 下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$

B. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a < b$, $c > 0$, 则 $ac > bc$

D. 若 $a < b < 0$, $c > 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 ()

A. $(0, 1)$

B. $(0, \frac{1}{3})$

C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$

D. $[\frac{1}{7}, 1)$

10. 关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0$ ($a > 0$) 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $x_2 - x_1 = 15$, 则 $a =$ ()

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{15}{4}$

D. $\frac{15}{2}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

11. 已知命题 $p: \forall x \in (2, +\infty)$, $x^2 > 4$, 则 $\neg p$ 为 _____

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 _____

13. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^x$. 若 $f(\ln 2) = 8$, 则 $a =$ _____

14. 函数 $y = \log_2(x^2 - x - 2)$ 的单调减区间为 _____

15. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付 _____ 元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为 _____.

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

16. (本小题 15 分) 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 2x - 1 > a$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 若 $a = 1$, 求不等式的解集;

(2) 若不等式的解集为 \mathbb{R} , 求实数 a 的范围.



7. (本小题 10 分) 计算:

1) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} + (0.008)^{\frac{1}{3}} - (0.25)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

2) $27^{\frac{2}{3}} - 2^{\log_2 3} \cdot \log_2 \frac{1}{8} + \lg 4 + 2 \lg 5$

8. (本小题 10 分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 0 \\ 2x^2 + 5x + 2, & x < 0 \end{cases}$ 的零点:

19. (本小题 15 分) 已知 $f(x) = \log_2(1+x) + \log_2(1-x)$. 求

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的值.

20. (本小题 15 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} - x$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性,

(2) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

21. (本小题 20 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \leq 0), \\ |\log_2 x| & (x > 0). \end{cases}$

(1) 画出函数的示意图;

(2) 若函数 $F(x) = f(x) - 1$, 求使不等式 $F(x) \leq 1$ 成立的取值范围;

(3) 讨论函数 $G(x) = f(x) - a$ ($a \in \mathbb{R}$) 的零点的个数.

