

2023 北京中关村中学高三 9 月开学考

数 学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 \geq 3\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()

A. $[1, \sqrt{3})$

B. $[1, \sqrt{3}]$

C. $(\sqrt{3}, +\infty)$

D. $[\sqrt{3}, +\infty)$

2. 在复平面内，复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ 对应的点位于

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (3, 2)$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

4. 已知 $f(x) = x - \sin x$ ，命题 $P: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) < 0$ ，则 ()

A. P 是假命题， $\neg P: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) \geq 0$

B. P 是假命题， $\neg P: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) \geq 0$

C. P 是真命题， $\neg P: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) \geq 0$

D. P 是真命题， $\neg P: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) \geq 0$

5. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点重合，则 p 的值为 ()

A. 4

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2$ 的值域为 $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ ，则 a 的值是



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 2

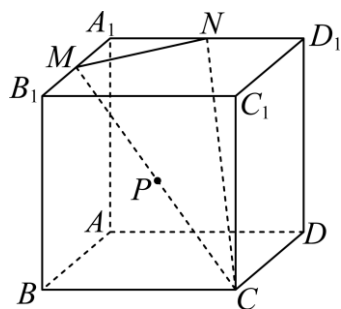
7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边, 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. 若关于 x 的方程, $f(x) - k = 0$ 有三个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $[-2, -1] \cup [1, 2]$ B. $(-2, -1) \cup (1, 2)$
 C. $(-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2)$ D. $(-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 2)$.

9. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 E 在 BD 上, 点 F 在 B_1C_1 上, 且 $BE = CF$, 点 P 在线段 CM 上运动, 给出下列四个结论:



- ①当点 E 是 BD 中点时, 直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ;
 ②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 ③存在点 P , 使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$;
 ④ $\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.



其中所有正确结论的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则 a 的取值范围是

- A. $[-1, 1]$ B. $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ D. $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 二项式 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是 _____; 二项式系数和是 _____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于原点对称, 点 $M(x, -1)$ 在角 β 的终边上. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\beta =$ _____.

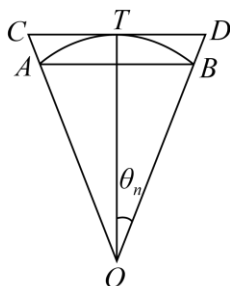
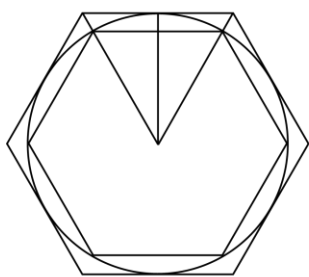
13. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差不为零, 其前 n 项和为 S_n , 则 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_{n+1} > S_n$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的 _____ 条件 (填 “充分不必要”, “必要而不充分”, “充要” 或 “既不充分也不必要”)

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时,

$f(x) = x(x-1)$. $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____; 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 _____.

15. 作单位圆的外切和内接正 3×2^n 边形 ($n = 1, 2, \dots$), 记外切正 3×2^n 边形周长的一半为 a_n , 内接正 3×2^n 边形周长的一半为 b_n . 计算可得 $a_n = 3 \times 2^n \tan \theta_n$, 其中 θ_n 是正 3×2^n 边形的一条边所对圆心角的一半.

给出下列四个结论:



① $b_n = 3 \times 2^n \sin \theta_n$; ② $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$;

③ $b_{n+1}^2 = a_{n+1} b_n$; ④ 记 $c_n = a_n - b_n$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{1}{4}$.

其中正确结论的序号是 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 85 分.

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \cos^2 \omega x - \frac{1}{2}$, 其中 $0 < \omega < 2$, 有如下三个条件: 条件① $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$;

条件② $f(x + \pi) = f(x)$; 条件③ $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$. 从以上三个条件中选择一个作为已知, 求解

下列问题.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

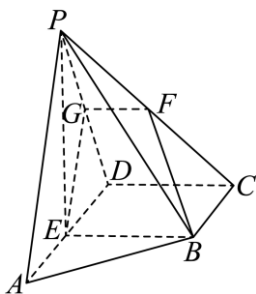
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最大值为 1, 求实数 m 的取值范围.

注: 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $BC \parallel AD$, $\angle ADC = 90^\circ$,



$BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$, E 为线段 AD 的中点. $PE \perp$ 底面 $ABCD$, 点 F 是棱 PC 的中点, 平面 BEF 与棱 PD 相交于点 G .



(1) 求证: $BE \parallel FG$;

(2) 若 PC 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 求直线 PB 与平面 BEF 所成角的正弦值.

18. 我国脱贫攻坚战取得全面胜利, 现行标准下农村贫困人口全部脱贫, 消除了绝对贫困. 为了解脱贫家庭人均年纯收入情况, 某扶贫工作组对 A, B 两个地区 2019 年脱贫家庭进行简单随机抽样, 共抽取 500 户家庭作为样本, 获得数据如下表:

	A 地区	B 地区
2019 年人均年纯收入超过 10000 元	100 户	150 户
2019 年人均年纯收入未超过 10000 元	200 户	50 户

假设所有脱贫家庭的人均年纯收入是否超过 10000 元相互独立.

- 从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户, 估计该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的概率;
- 在样本中, 分别从 A 地区和 B 地区 2019 年脱贫家庭中各随机抽取 1 户, 记 X 为这 2 户家庭中 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的户数, 求 X 的分布列和数学期望;
- 从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户, 发现这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元. 根据这个结果, 能否认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年有变化? 请说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{1}{2}ax^3 - ax^2 (a \in \mathbb{R})$.

- 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最值;
- 若 $f(x) \leq \frac{1}{2}ax^3 - x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- 若函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 求 $g(x_1) + g(x_2)$ 的取值范围.

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过 $A(-2, 0), B(0, 1)$ 两点.

(1) 求椭圆 M 的离心率;

(2) 设椭圆 M 的右顶点为 C , 点 P 在椭圆 M 上 (P 不与椭圆 M 的顶点重合), 直线 AB 与直线 CP 交于点 Q , 直线 BP 交 x 轴于点 S , 求证: 直线 SQ 过定点.

21. 已知有限数列 $\{a_n\}$, 从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 \cdots 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$), 顺次排列构成数列 $\{b_k\}$, 其中 $b_k = a_{i_k}$, $1 \leq k \leq m$, 则称新数列 $\{b_k\}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的子列, 若数列 $\{a_n\}$ 的每一子列的所有项的和都不相同, 则称数列 $\{a_n\}$ 为完全数列. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n$, $1 \leq n \leq 25, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 判断下面数列 $\{a_n\}$ 的两个子列是否为完全数列, 并说明由;

数列①: 3, 5, 7, 9, 11; 数列②: 2, 4, 8, 16.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度为 m , 且 $\{b_k\}$ 为完全数列, 证明: m 的最大值为 6;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度 $m = 5$, 且 $\{b_k\}$ 为完全数列, 求 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5}$ 的最大值.



参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】A

【分析】求得集合 $A = \{x | x \geq \sqrt{3}\}$ ，结合集合补集的概念及运算，即可求解。

【详解】由题意，集合 $A = \{x | x \geq \sqrt{3}\}$

又由 $U = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ ，所以 $\complement_U A = \{x | 1 \leq x < \sqrt{3}\} = [1, \sqrt{3})$ 。

故选：A.

2. 【答案】D

【分析】由题意可得： $z = 2 - i$ ，据此确定复数所在的象限即可。

【详解】由题意可得： $z = \frac{1+2i}{i} = \frac{i+2i^2}{i^2} = \frac{i-2}{-1} = 2-i$ ，

则复数 z 对应的点为 $2, -1$ ，位于第四象限。

本题选择 D 选项。

【点睛】本题主要考查复数的运算法则，各个象限内复数的特征等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力。

3. 【答案】A

【分析】本题先计算 $\vec{a} - \vec{b}$ ，再根据模的概念求出 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 。

【详解】由已知， $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3) - (3, 2) = (-1, 1)$ ，

所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

故选 A

【点睛】本题主要考查平面向量模长的计算，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查。由于对平面向量的坐标运算存在理解错误，从而导致计算有误；也有可能是在计算模的过程中出错。

4. 【答案】A

【分析】利用导数判断函数单调性，可判断命题 P 的真假，根据含有一个量词的命题的否定可得 $\neg P$ ，即得答案。

【详解】因为 $f(x) = x - \sin x$ ，故 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ ，

即 $f(x) = x - \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，而 $f(0) = 0$ ，



故 $f(x) > f(0) = 0$, 即命题 $p: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x) < 0$ 为假命题;

又命题 $p: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x) < 0$ 为特称命题,

其否定为 $\neg p: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x) \geq 0$,

故选: A

5. 【答案】A

【分析】求出双曲线的右焦点坐标, 根据抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点重合可得 $p = 4$.

【详解】由双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 得 $a^2 = 3, b^2 = 1$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4, c = 2$,
所以双曲线的右焦点为 $(2, 0)$,

因为抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点重合,

所以 $\frac{p}{2} = 2$, 所以 $p = 4$.

故选: A

6. 【答案】C

【分析】利用基本不等式求得当 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时函数值的取值范围, 以及题目所给值域列出方程组, 解方程组求得 a 的值.

【详解】由题意可得 $a > 0$, ①当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2 \geq 2\sqrt{a} + 2$, 当且仅当 $x = \sqrt{a}$ 时取等号; ②当 $x < 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2 \leq -2\sqrt{a} + 2$, 当且仅当 $x = -\sqrt{a}$ 时取等号. 所以 $\begin{cases} 2 - 2\sqrt{a} = 0 \\ 2\sqrt{a} + 2 = 4 \end{cases}$ 解得 $a = 1$, 故选 C.

【点睛】本小题主要考查利用基本不等式求和式的最值, 应用过程中要注意“一正二定三相等”这个基本不等式应用的要点. 一正的意思是利用基本不等式的两个数要确保是正数, 如本题中当 $x < 0$ 时, 函数要转

化为 $f(x) = -\left[(-x) + \frac{a}{-x}\right] + 2$, 才能运用基本不等式求最值. 二定的意思是最后的最值是一个常数, 三相等的意思是等号成立的条件.

7. 【答案】C

【分析】由已知结合余弦定理得出 ab 的值, 即可根据面积公式得出答案.

【详解】 $\because c^2 = (a-b)^2 + 6 = a^2 - 2ab + b^2 + 6$,

即 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6$,



由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2}$,

解得: $ab = 6$,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

故选: C.



8. 【答案】D

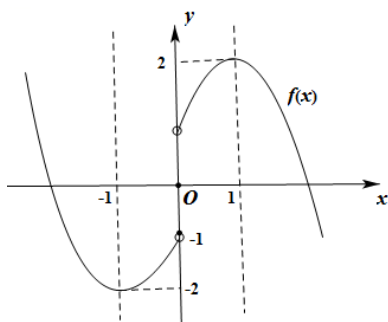
【分析】根据函数的奇偶性作出函数图象, 将 $f(x) - k = 0$ 有三个不同的实数解转化为函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y = k$ 有三个不同交点问题, 数形结合, 即可求得答案.

【详解】由题意函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 知 $f(0) = 0$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$,

则当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(x) = -f(-x) = x^2 + 2x - 1$;

作出函数 $f(x)$ 的图象如图:



因为关于 x 的方程, $f(x) - k = 0$ 有三个不同的实数解,

即函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y = k$ 有三个不同交点,

结合图象可知 $k \in (-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 2)$,

故选: D

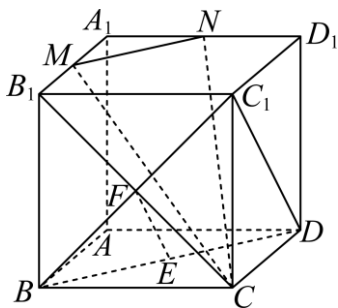
9. 【答案】C

【分析】根据线面平行的判定判断①; 根据等体积法求得点 D_1 到平面 CMN 的距离即直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离, 判断②; 建立空间直角坐标系, 利用空间向量的数量积运算解决垂直问题, 判断③; 求出 $\triangle PDD_1$ 面积的表达式, 结合二次函数知识求得面积的最小值, 判断④, 即得答案.

【详解】对于①, 点 E 是 BD 中点, $BD = B_1C = 2\sqrt{2}$,

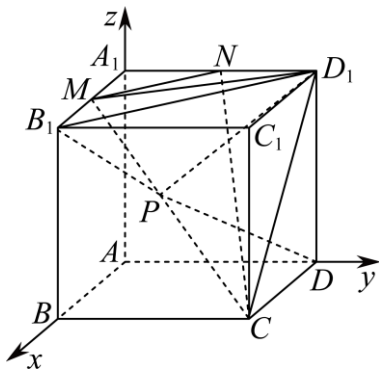
而 $BE = CF$, 故 $CF = BE = \sqrt{2}$, 即 F 为 B_1C 的中点,

连接 DC_1 , 则 $EF \parallel DC_1$, 因为 $EF \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , $DC_1 \subset$ 平面 DCC_1D_1 ,



故直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ，①正确；

对于②，连接 B_1D_1 ， M, N 分别是棱 A_1B_1 ， A_1D_1 的中点，



故 $B_1D_1 \parallel MN$ ， $B_1D_1 \not\subset$ 平面 CMN ， $MN \subset$ 平面 CMN ，

故 $B_1D_1 \parallel$ 平面 CMN ，

故直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离等于点 D_1 到平面 CMN 的距离，设为 h ；

$$MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = \sqrt{2}, CN = CM = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3, V_{C-MND_1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times 2 = \frac{1}{3},$$

$$S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ 故 } V_{D_1-CMN} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h,$$

$$\text{由于 } V_{C-MND_1} = V_{D_1-CMN}, \text{ 故 } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h, \therefore h = \frac{2\sqrt{17}}{17}, \text{ ②错误；}$$

对于③，以点 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $M(1,0,2), C(2,2,0), B_1(2,0,2), D_1(0,2,2)$ ，

$$\overrightarrow{MC} = (1, 2, -2), \text{ 设 } \overrightarrow{MP} = t \cdot \overrightarrow{MC} = (t, 2t, -2t), t \in [0, 1],$$

$$\text{故 } P(t+1, 2t, -2t+2), \text{ 则 } \overrightarrow{PB_1} = (1-t, -2t, 2t), \overrightarrow{PD_1} = (-t-1, 2-2t, 2t),$$

$$\text{由 } \angle B_1PD_1 = 90^\circ, \text{ 得 } \overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PD_1} = (1-t)(-t-1) + (-2t)(2-2t) + 2t \cdot 2t = 9t^2 - 4t - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } t = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9} \in [0, 1], \text{ 故存在点 } P, \text{ 使得 } \angle B_1PD_1 = 90^\circ, \text{ ③正确；}$$

对于④，由③知 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 在 DD_1 上的投影为 $(0, 2, -2t+2)$ ，



故 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 到 DD_1 的距离为 $d = \sqrt{(t+1)^2 + (2-2t)^2} = \sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$,

则 $\triangle PDD_1$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times d = \sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}, t \in [0, 1]$,

当 $t = \frac{3}{5} \in [0, 1]$ 时, $5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$ 取得最小值 $\frac{16}{5}$,

故 $\triangle PDD_1$ 的面积 S 取到最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, ④错误,

故所有正确结论的个数是 2,

故选: C

10. 【答案】 C

【详解】 试题分析: $f'(x) = 1 - \frac{2}{3} \cos 2x + a \cos x \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

故 $1 - \frac{2}{3}(2\cos^2 x - 1) + a \cos x \geq 0$, 即 $a \cos x - \frac{4}{3} \cos^2 x + \frac{5}{3} \geq 0$ 恒成立,

即 $-\frac{4}{3}t^2 + at + \frac{5}{3} \geq 0$ 对 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 构造 $f(t) = -\frac{4}{3}t^2 + at + \frac{5}{3}$, 开口向下的二次函数 $f(t)$ 的最小

值的可能值为端点值, 故只需保证 $\begin{cases} f(-1) = \frac{1}{3} - a \geq 0 \\ f(1) = \frac{1}{3} + a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$. 故选 C.

【考点】 三角变换及导数的应用

【名师点睛】 本题把导数与三角函数结合在一起进行考查, 有所创新, 求解的关键是把函数单调性转化为不等式恒成立, 再进一步转化为二次函数在闭区间上的最值问题, 注意与三角函数值域或最值有关的问题, 即注意正、余弦函数的有界性.

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】 ①. -160 ②. 64

【分析】 根据二项式展开式的通项公式可求得常数项; 根据二项式系数和性质可求得二项式系数和.

【详解】 由题意得二项式 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r \cdot 2^{6-r} C_6^r x^{6-2r}, (r=0, 1, \dots, 6),$$

令 $6-2r=0, \therefore r=3$,

则二项式 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是 $(-1)^3 \cdot 2^{6-3} C_6^3 = -160$;



二项式系数和是 $2^6 = 64$,

故答案为: $-160; 64$.

12. 【答案】 $-\frac{1}{3}$

【分析】由题意知角 α 与角 β 的终边关于原点对称, 确定点 $N(-x, 1)$ 在角 α 的终边上, 根据角的终边上一点的坐标求解三角函数值, 即可得答案.

【详解】由题意知角 α 与角 β 的终边关于原点对称, 点 $M(x, -1)$ 在角 β 的终边上, 则点 $N(-x, 1)$ 在角 α 的终边上,

由 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 以及 $|ON| = \sqrt{x^2 + 1}$, 可得 $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{3}$;

由点 $M(x, -1)$ 在角 β 的终边上且 $|OM| = \sqrt{x^2 + 1}$,

可知 $\sin \beta = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{1}{3}$,

故答案为: $-\frac{1}{3}$



13. 【答案】充分不必要

【分析】判断 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_{n+1} > S_n$ ” 和 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 之间的逻辑推理关系, 即可得答案.

【详解】 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 设其公差为 $d, d \neq 0$,

由 $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_{n+1} > S_n$ 可知 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$,

即 $a_1 + nd > 0$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 则必有 $d > 0$,

则 $\{a_n\}$ 为递增数列;

若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 比如等差数列: $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 是递增数列,

但 $S_2 < S_1$, 故 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_{n+1} > S_n$ ” 不成立,

故 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_{n+1} > S_n$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的充分不必要条件,

故答案为: 充分不必要

14. 【答案】 ①. $-\frac{1}{2} \leq -0.5$ ②. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$

【分析】结合函数满足的性质以及当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$, 即可求得 $f\left(\frac{3}{2}\right)$; 利用函数的性质

推得其解析式, 作出其大致图象, 数形结合, 求解不等式 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 即可确定 m 的取值范围.

【详解】由题意得 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}$;

当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$,

当 $x \in (-1, 0]$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$,

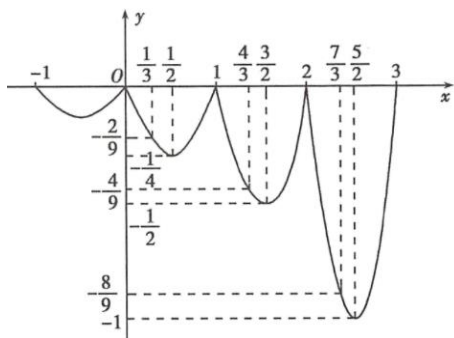
当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2f(x-1) = 2(x-1)(x-2) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$,

当 $x \in (2, 3]$ 时, $f(x) = 4(x-2)(x-3) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 1$,

...

故由 $f(x+1) = 2f(x)$ 得 $f(x+t) = 2^t f(x), (t \in \mathbb{Z})$,

由此作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图:



当 $x \in (2, 3]$ 时, 令 $f(x) = 4(x-2)(x-3) = -\frac{8}{9}$, 解得 $x = \frac{7}{3}$ 或 $x = \frac{8}{3}$,

结合图象解不等式 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 可得 $x \leq \frac{7}{3}$ 或 $x \geq \frac{8}{3}$,

由于对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 故 $m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$,

故答案为: $-\frac{1}{2}, \left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$

15. 【答案】①③④

【分析】对于①, 在等腰三角形 AOB 中求出 $\frac{1}{2}AB$, 从而可求出 b_n , 对于②, 分别计算 $\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$ 进行判断, 对于③, 分别计算 $b_{n+1}^2, a_{n+1}b_n$ 进行判断, 对于④, 先计算 c_n , 再计算 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 化简后, 利用换元法, 构造函数利用导数可求得结果.



【详解】对于①，等腰三角形 AOB 中， $OA = OB = 1$ ， $\angle AOB = 2\theta_n$ ，则 $\sin \theta_n = \frac{1}{2}AB$ ，

所以 $b_n = 3 \times 2^n \sin \theta_n$ ，所以①正确；

对于②，因为 $a_n = 3 \times 2^n \tan \theta_n$ ， $b_n = 3 \times 2^n \sin \theta_n$ ，所以 $a_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} \tan \theta_{n+1}$ ， $\theta_n = 2\theta_{n+1}$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+1} \tan \theta_{n+1}},$$

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3 \times 2^n \tan \theta_n} + \frac{1}{3 \times 2^n \sin \theta_n} = \frac{1}{3 \times 2^n} \left(\frac{1}{\tan \theta_n} + \frac{1}{\sin \theta_n} \right)$$

$$= \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{\cos \theta_n + 1}{\sin \theta_n}$$

$$= \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{\cos 2\theta_{n+1} + 1}{\sin 2\theta_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{2 \cos^2 \theta_{n+1}}{2 \sin \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{\cos \theta_{n+1}}{\sin \theta_{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^n} \cdot \frac{1}{\tan \theta_{n+1}},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}, \text{ 所以②错误；}$$

对于③，因为 $a_n = 3 \times 2^n \tan \theta_n$ ， $b_n = 3 \times 2^n \sin \theta_n$ ，所以 $a_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} \tan \theta_{n+1}$ ， $b_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} \sin \theta_{n+1}$ ，

$$\theta_n = 2\theta_{n+1},$$

$$\text{所以 } b_{n+1}^2 = (3 \times 2^{n+1} \sin \theta_{n+1})^2 = 9 \times 2^{2n+2} \sin^2 \theta_{n+1},$$

$$a_{n+1} b_n = (3 \times 2^{n+1} \tan \theta_{n+1}) \times (3 \times 2^n \sin \theta_n)$$

$$= 9 \times 2^{2n+1} \tan \theta_{n+1} \cdot \sin 2\theta_{n+1}$$

$$= 9 \times 2^{2n+1} \frac{\sin \theta_{n+1}}{\cos \theta_{n+1}} \cdot 2 \sin \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}$$

$$= 9 \times 2^{2n+2} \sin^2 \theta_{n+1},$$

$$\text{所以 } b_{n+1}^2 = a_{n+1} b_n, \text{ 所以③正确；}$$

对于④， $c_n = a_n - b_n = 3 \times 2^n \tan \theta_n - 3 \times 2^n \sin \theta_n = 3 \times 2^n (\tan \theta_n - \sin \theta_n)$ ，

$$\text{所以 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3 \times 2^{n+1} (\tan \theta_{n+1} - \sin \theta_{n+1})}{3 \times 2^n (\tan \theta_n - \sin \theta_n)} = \frac{2(\tan \theta_{n+1} - \sin \theta_{n+1})}{\tan \theta_n - \sin \theta_n}$$

$$= \frac{2(\tan \theta_{n+1} - \sin \theta_{n+1})}{\tan 2\theta_{n+1} - \sin 2\theta_{n+1}}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin \theta_{n+1} \left(\frac{1}{\cos \theta_{n+1}} - 1 \right)}{\sin 2\theta_{n+1} \left(\frac{1}{\cos 2\theta_{n+1}} - 1 \right)} \\
&= \frac{\frac{1 - \cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_{n+1}}}{\cos \theta_{n+1} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta_{n+1}}{\cos 2\theta_{n+1}}} \\
&= \frac{1 - \cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_{n+1}} \cdot \frac{\cos 2\theta_{n+1}}{\cos \theta_{n+1} (1 - \cos 2\theta_{n+1})} \\
&= \frac{1 - \cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_{n+1}} \cdot \frac{2 \cos^2 \theta_{n+1} - 1}{\cos \theta_{n+1} \cdot 2 \sin^2 \theta_{n+1}} \\
&= \frac{(1 - \cos \theta_{n+1})(2 \cos^2 \theta_{n+1} - 1)}{2(1 - \cos^2 \theta_{n+1}) \cos^2 \theta_{n+1}},
\end{aligned}$$

令 $t = \cos \theta_{n+1}$ ($\cos 15^\circ \leq t < 1$), 则

$$f(t) = \frac{(1-t)(2t^2-1)}{2t^2(1-t^2)} = \frac{2t^2-1}{2t^3+2t^2},$$

$$\text{所以 } f'(t) = \frac{4t(2t^3+2t^2) - (2t^2-1)(6t^2+4t)}{(2t^3+2t^2)^2} = \frac{2t(2+3t-2t^3)}{(2t^3+2t^2)^2} = \frac{2t[2(1-t^3)+3t]}{(2t^3+2t^2)^2} > 0,$$

所以 $f(t)$ 在 $[\cos 15^\circ, 1)$ 上递增,

所以 $f(t) < f(1) = \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{1}{4}$, 所以④正确,

故答案为: ①③④.

【点睛】 关键点点睛: 此题考查三角函数的综合应用, 考查数列的应用, 解题的关键是根据题意利用三角函数表示出 a_n 和 b_n , 及三角函数恒等变换公式的灵活应用, 考查计算能力, 属于难题.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 85 分.

16. **【答案】** (1) $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$

(2) $[\frac{\pi}{6}, +\infty)$

【分析】 (1) 先将函数的解析式利用三角恒等变换化简为 $f(x) = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 若选①, 根据特殊值代入 $f(x)$ 求得 ω , 即得函数解析式, 结合正弦函数性质即可求得答案; 若选②, 根据函数的周期性求得 ω , 即得函数解析式, 结合正弦函数性质即可求得答案; 若选③, 根据函数的对称性求得 ω , 即得函数解析式, 结合正弦函数性质即可求得答案;



(2) 根据 $x \in [0, m]$, 确定 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6} \right]$, 结合正弦函数的性质列出相应不等式, 即可求得答案.

【小问 1 详解】

$$\text{由题意得 } f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \cos^2 \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{若选① } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, \text{ 则 } \sin\left(2\omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{由于 } 0 < \omega < 2, \text{ 故 } 2\omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi\right),$$

$$\text{则 } 2\omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi, \therefore \omega = 1, \text{ 即 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$;

$$\text{若选② } f(x + \pi) = f(x), \text{ 则 } \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6} + 2\omega\pi\right) = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{故 } 2\omega\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore \omega = k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{由于 } 0 < \omega < 2, \text{ 故 } \omega = 1, \text{ 故 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$;

$$\text{若选③ } f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + x\right), \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 为函数 } f(x) \text{ 的一条对称轴},$$

$$\text{故 } 2 \times \frac{\pi}{6} \omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \omega = 1 + 3k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{由于 } 0 < \omega < 2, \text{ 故 } \omega = 1, \text{ 故 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$;



【小问 2 详解】

当 $x \in [0, m]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6} \right]$,

令 $t = 2x + \frac{\pi}{6}, \therefore t \in \left[\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6} \right]$,

则函数 $y = \sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6} \right]$ 上的最大值为 1,

故 $2m + \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}$, 解得 $m \geq \frac{\pi}{6}$,

即实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, +\infty \right)$.



17. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】(1) 利用平行四边形的判定定理和性质, 结合线面平行的判定定理和性质定理进行证明即可;

(2) 建立空间直角坐标系, 利用空间向量夹角公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 因为 E 为 AD 中点,

所以 $DE = \frac{1}{2}AD = 1$.

又因为 $BC = 1$, 所以 $DE = BC$. 在梯形 $ABCD$ 中, $DE \parallel BC$,

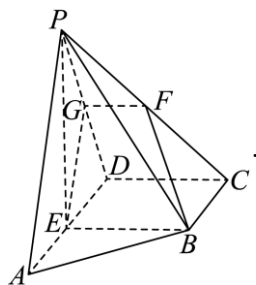
所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形. 所以 $BE \parallel CD$.

又因为 $BE \not\subset$ 平面 PCD , 且 $CD \subset$ 平面 PCD ,

所以 $BE \parallel$ 平面 PCD .

因为 $BE \subset$ 平面 BEF , 平面 $BEF \cap$ 平面 $PCD = FG$,

所以 $BE \parallel FG$.



【小问 2 详解】

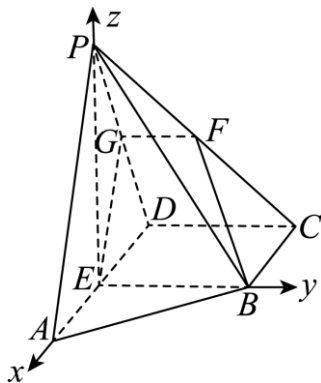
因为 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AE, BE \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp AE$, 且 $PE \perp BE$.

因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形, $\angle ADC = 90^\circ$,

所以 $AE \perp BE$.

以 E 为坐标原点, 如图建立空间直角坐标系 $E - xyz$.



则 $E(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(-1,1,0), D(-1,0,0)$.

设 $P(0,0,m)(m > 0)$,

所以 $\overrightarrow{CP} = (1, -1, m), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$.

因为 PC 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{4}$,

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{2+m^2} \cdot \sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $m = \sqrt{2}$.

则 $P(0,0,\sqrt{2}), F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{EB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{PB} = (0, 1, -\sqrt{2})$.

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{2}$, 则 $z = 1$,

所以 $\vec{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$.

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \overrightarrow{PB}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

所以直线 PB 与平面 BEF 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



18. 【答案】(1) $\frac{1}{3}$; (2) 概率分布列见解析, 期望为 $\frac{13}{12}$; (3) 可以.

【分析】(1) 直接由古典概型概率公式计算;

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2, 分别计算出概率后可得分布列, 然后由期望公式计算出期望;

(3) 根据概率的意义作答.

【详解】(1) 由题意所求概率为 $P = \frac{100}{100+200} = \frac{1}{3}$;

(2) 由题意 X 的可能取值为 0, 1, 2,

B 地区抽取 1 户, 纯收入超过 10000 元的概率为 $\frac{150}{150+50} = \frac{3}{4}$,

$$P(X=0) = (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{3}{4}) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

期望为 $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$;

(3) 如果 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数没有变化, 其概率为

$$P = \frac{C_{100}^4}{C_{300}^4} = \frac{\frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{300 \times 299 \times 298 \times 297}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} \approx 0.012, \text{ 因此发生改变的概率为 } 1 - 0.012 = 0.988, \text{ 概率接近于 } 1$$

了, 可以认为 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数有改变.

【点睛】思路点睛: 本题考查古典概型, 考查随机变量的概率分布列和数学期望, 考查概率的意义.

求分布列时, 需要选确定随机变量的可能取值, 然后计算出概率, 列表得分布列, 最后由期望公式可计算出期望.

19. 【答案】(1) 最小值是 $-\frac{1}{e}$, 无最大值; (2) $a \geq 1$; (3) $(-\infty, -3 - \ln 4)$.

【分析】(1) 由 $a = 0$, 得到 $f(x) = x \ln x$, 再利用导数法求解;

(2) 将 $f(x) \leq \frac{1}{2}ax^3 - x$ 恒成立, 转化为 $a \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立, 设 $\varphi(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, 用导数法求其最大值即可;



(3) 求导, 根据 $g(x)$ 在两个极值点 x_1, x_2 , 得到 $a > 4, x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{1}{a}$, 然后化简得到

$$h(a) = g(x_1) + g(x_2) = -\frac{1}{2}a - \ln a - 1 \text{ 求解.}$$

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = 1 + \ln x$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$, 也是最小值, 无最大值.

(2) $\because f(x) \leq \frac{1}{2}ax^3 - x$ 恒成立,

$\therefore x \ln x - ax^2 \leq -x$ 恒成立,

$\therefore a \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立,

设 $\varphi(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$,

令 $\varphi'(x) = 0$, 则 $x = 1$,

$\therefore x \in (0, 1), \varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 单调递增,

$x \in (1, +\infty), \varphi'(x) < 0, \varphi(x)$ 单调递减

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 1$

$\therefore a \geq 1$

(3) 由题意 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - ax, g'(x) = \frac{1}{x} + ax - a = \frac{ax^2 - ax + 1}{x}$,

因为 $g(x)$ 在两个极值点 x_1, x_2 , 则 x_1, x_2 是方程 $ax^2 - ax + 1 = 0$ 的两个不等正根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = a^2 - 4a > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0 \end{cases},$$

$\therefore a > 4, x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{1}{a}$,

则 $h(a) = g(x_1) + g(x_2) = \ln x_1 + \frac{1}{2}ax_1^2 - ax_1 + \ln x_2 + \frac{1}{2}ax_2^2 - ax_2$,

$= \ln(x_1 x_2) + \frac{1}{2}a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - a(x_1 + x_2)$



$$= \ln \frac{1}{a} + \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{2}{a} \right) - a,$$

$$= -\frac{1}{2} a - \ln a - 1,$$

显然 $h(a) = -\frac{1}{2} a - \ln a - 1$ 是关于 a 的减函数,

$$\therefore h(a) < h(4) = -3 - \ln 4$$

$\therefore g(x_1) + g(x_2)$ 的取值范围是 $(-\infty, -3 - \ln 4)$.

【点睛】 方法点睛: 恒(能)成立问题的解法:

若 $f(x)$ 在区间 D 上有最值, 则

$$(1) \text{ 恒成立: } \forall x \in D, f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)_{\min} > 0; \quad \forall x \in D, f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)_{\max} < 0;$$

$$(2) \text{ 能成立: } \exists x \in D, f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)_{\max} > 0; \quad \exists x \in D, f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)_{\min} < 0.$$

若能分离常数, 即将问题转化为: $a > f(x)$ (或 $a < f(x)$), 则

$$(1) \text{ 恒成立: } a > f(x) \Leftrightarrow a > f(x)_{\max}; \quad a < f(x) \Leftrightarrow a < f(x)_{\min};$$

$$(2) \text{ 能成立: } a > f(x) \Leftrightarrow a > f(x)_{\min}; \quad a < f(x) \Leftrightarrow a < f(x)_{\max}.$$

20. **【答案】** (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) 证明见解析.

【分析】 (1) 由已知两点坐标得 a, b , 求得 c 后可得离心率;

(2) 直线 AB 方程为 $x = 2y - 2$, 设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq 0, y_0 \neq \pm 1$), $Q(2y_0 - 2, y_0)$, $S(x_s, 0)$. 由 C, P, Q 三点共线求得 Q 点坐标 (用 P 点坐标表示), 由 B, P, S 共线求得 S 点坐标 (用 P 点坐标表示), 写出直线 QS 的方程, 把 $x_0^2 = 4 - 4y_0^2$ 代入化简对方程变形可得定点坐标.

【详解】 解: (1) 因为点 $A(-2, 0)$, $B(0, 1)$ 都在椭圆 M 上,

所以 $a = 2, b = 1$.

所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

所以椭圆 M 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 由 (1) 知椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, C(2, 0)$.

由题意知: 直线 AB 的方程为 $x = 2y - 2$.

设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \neq 0, y_0 \neq \pm 1$), $Q(2y_0 - 2, y_0)$, $S(x_s, 0)$.

因为 C, P, Q 三点共线, 所以有 $\overline{CP} \parallel \overline{CQ}$, $\overline{CP} = (x_0 - 2, y_0), \overline{CQ} = (2y_0 - 2 - 2, y_0)$,

所以 $(x_0 - 2)y_0 = y_0(2y_0 - 4)$.



$$\text{所以 } y_Q = \frac{4y_0}{2y_0 - x_0 + 2}.$$

$$\text{所以 } Q\left(\frac{4y_0 + 2x_0 - 4}{2y_0 - x_0 + 2}, \frac{4y_0}{2y_0 - x_0 + 2}\right).$$

因为 B, S, P 三点共线,

$$\text{所以 } \frac{1}{-x_s} = \frac{y_0 - 1}{x_0}, \text{ 即 } x_s = \frac{x_0}{1 - y_0}.$$

$$\text{所以 } S\left(\frac{x_0}{1 - y_0}, 0\right).$$

$$\text{所以直线 } QS \text{ 的方程为 } x = \frac{\frac{4y_0 + 2x_0 - 4}{2y_0 - x_0 + 2} - \frac{x_0}{1 - y_0}}{\frac{4y_0}{2y_0 - x_0 + 2}} y + \frac{x_0}{1 - y_0},$$

$$\text{即 } x = \frac{x_0^2 - 4y_0^2 - 4x_0y_0 + 8y_0 - 4}{4y_0(1 - y_0)} y + \frac{x_0}{1 - y_0}.$$

又因为点 P 在椭圆 M 上, 所以 $x_0^2 = 4 - 4y_0^2$.

$$\text{所以直线 } QS \text{ 的方程为 } x = \frac{2 - 2y_0 - x_0}{1 - y_0}(y - 1) + 2.$$

所以直线 QS 过定点 $(2, 1)$.

【点睛】 关键点点睛: 本题考查求椭圆的离心率, 考查椭圆的直线过定点问题, 解题方法是设椭圆上的点坐标 $P(x_0, y_0)$, 利用三点共线变为向量平行, 求得直线交点 Q, S 的坐标, 得出直线 QS 方程, 再由 P 在椭圆上, 代入化简凑配出定点坐标.

21. **【答案】** (1) 数列①不是完全数列, 数列②是完全数列, 理由见详解

(2) 证明见详解 (3) $\frac{31}{16}$

【分析】 (1) 根据题意逐项分析判断即可;

(2) 根据题意利用反证法结合等差数列求和分析说明;

(3) 根据题意转化为求 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 的各项最小值, 结合题意分析运算即可.

【小问 1 详解】

数列①不是完全数列, 数列②是完全数列, 理由如下:

数列①: 因为 $3 + 9 = 5 + 7 = 12$, 所以数列①不是完全数列;

数列②: 因为 $2 + 4 = 6, 2 + 8 = 10, 2 + 16 = 18, 4 + 8 = 12, 4 + 16 = 20, 8 + 16 = 24,$

$2 + 4 + 8 = 14, 2 + 4 + 16 = 22, 2 + 8 + 16 = 26, 4 + 8 + 16 = 28, 2 + 4 + 8 + 16 = 30,$

即每一子列的所有项的和都不相同, 所以数列②是完全数列.

【小问 2 详解】



假设存在完全数列 $\{b_k\}$ ，其长度为 $7 \leq m \leq 25$ ，则 $b_1 < b_2 < \dots < b_m$ ，

则长度为 m 的数列 $\{b_k\}$ 的每一子列的所有项的和有 $2^m - m - 1$ 个，

设其所有项的和的最小值为 $a = b_1 + b_2$ ，最大值为 b ，

$$\text{则 } b = 25 + 24 + \dots + 28 - m + b_1 + b_2 = \frac{(m-2)(53-m)}{2} + b_1 + b_2,$$

$$\text{可得 } 2^m - m - 1 \leq \left[\frac{(m-2)(53-m)}{2} + b_1 + b_2 \right] - (b_1 + b_2) + 1 = \frac{(m-2)(53-m)}{2} + 1,$$

$$\text{整理得 } 2^{m+1} + m^2 - 57m + 102 \leq 0,$$

$$\text{当 } m = 7 \text{ 时, } 2^{7+1} + 7^2 - 57 \times 7 + 102 = 8 > 0;$$

$$\text{当 } m = 8 \text{ 时, } 2^{8+1} + 8^2 - 57 \times 8 + 102 = 222 > 0;$$

$$\text{当 } m = 9 \text{ 时, } 2^{9+1} + 9^2 - 57 \times 9 + 102 = 694 > 0;$$

$$\text{当 } 10 \leq m \leq 25, \text{ 则 } 2^{m+1} + m^2 + 102 \geq 2^{10+1} + 10^2 + 102 = 2250, \quad 57m \leq 57 \times 25 = 1425,$$

$$\text{所以 } 2^{m+2} + m^2 - 57m + 104 \geq 2250 - 1425 = 825 > 0;$$

综上所述：当 $7 \leq m \leq 25$ 时，不存在 $m \in \mathbf{N}^*$ ，使得 $2^{m+2} + m^2 - 57m + 102 \leq 0$ 成立。

所以假设不成立，则 $m \leq 6$ ，且 12, 18, 21, 23, 24, 25，符合题意，

所以 m 的最大值为 6。

【小问 3 详解】

因为 $\{b_k\}$ 长度 $m = 5$ ，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，且 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ ，

可知 b_1 的最小值为 1， b_2 的最小值为 2，取 $b_1 = 1, b_2 = 2$ ；

因为 $b_1 + b_2 = 3$ ，则 b_3 的最小值为 4，取 $b_3 = 4$ ；

因为 $b_1 + b_3 = 5, b_2 + b_3 = 6, b_1 + b_2 + b_3 = 7$ ，则 b_4 的最小值为 8，取 $b_4 = 8$ ；

因为 $b_1 + b_4 = 9, b_2 + b_4 = 10, b_3 + b_4 = 12, b_1 + b_2 + b_4 = 11, b_1 + b_3 + b_4 = 13, b_2 + b_3 + b_4 = 14$ ，

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 15,$$

则 b_5 的最小值为 16，取 $b_5 = 16$ ；

此时 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 均取到对应的最小值，则 $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \frac{1}{b_5}$ 均取到对应的最大值，

$$\text{则 } \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16},$$

所以 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5}$ 的最大值为 $\frac{31}{16}$ 。

【点睛】关键点睛：1. 对于数列新定义问题，要充分理解题意，根据题意分析运算；

2. 对于直接证明比较困难，可以采用反证法，适当放缩运算求解。

