2023北京交大附中高三9月开学考

数　学

说明：本试卷共4页，共150分. 考试时长120分钟.

一、选择题（每题的四个备选答案中只有一个答案正确）

1. 已知集合$M=\{x|x-1>0\}$，集合$M=\{x|x-2\geq 0\}$，则(　　)

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$　　C. $M\cap N=\varnothing$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 若复数z满足$iz=2-4i$，则复数z在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3. 下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是(　　)

A．$y=\sin x$　　B．$y=x|x|$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=x-\dfrac{1}{x}$

4. “$x>1$”是“$\frac{x+1}{x}<2$”的(　　)

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

5. 已知平面向量$\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(-4,x)$，若$\vec{b}$与$(\vec{a}+\vec{b})$共线，则实数$x=$（　）

A. -8　　B. 8　　C. -2　　D. 2

6. 已知f（x）是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且在（$-\infty$，0]上单调递增，若$a=f$（$\log_{\frac{1}{5}}3$），$b=f$（$\log_3 5$），$c=f$（$0.2^{0.5}$），则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<a<c$　　D．$c<b<a$

7. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，已知$a_2=-4$，$S_4=-10$，则(　　)

A．S_n有最小值，T_n有最小值　　B．S_n有最大值，T_n有最大值

C．S_n有最小值，T_n有最大值　　D．S_n有最大值，T_n有最小值

8. 已知点$M(2,0)$，点P在曲线$y^2=4x$上运动，点F为抛物线的焦点，则$\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}$的最小值为

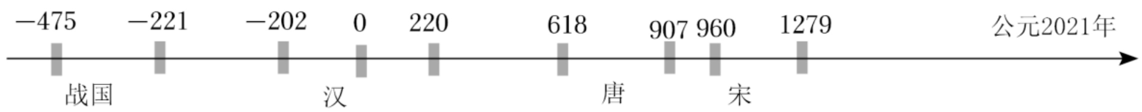
A．$\sqrt{3}$　　B．2（$\sqrt{5}-1$）

C．$4\sqrt{5}$　　D．4

9. 生物体死亡后，它机体内原有的碳14含量P会按确定的比率衰减（称为衰减率），P与死亡年数t之间的函数关系式为$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{a}}$（其中$a$为常数），大约每经过5730年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”．若2021年某遗址文物出土时碳14的残余量约占原始含量的75%，则可推断该文物属于（　　）

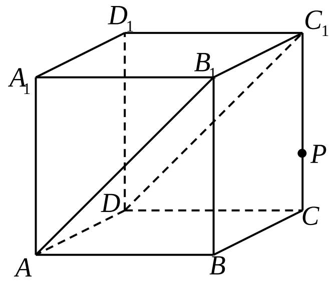
参考数据：$\log_2 0.75\approx-0.4$

参考时间轴：



A．宋　　B．唐　　C．汉　　D．战国

10. 若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N = f_{\alpha}(M)$. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 AB_1C_1D 为 β，平面 $ABCD$ 为 γ，点 P 是棱 CC_1 上一动点（与 C，C_1 不重合），$Q_1 = f_{\gamma}[f_{\beta}(P)]$，$Q_2 = f_{\beta}[f_{\gamma}(P)]$. 给出下列三个结论：



①线段 PQ_2 长度的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$；

②存在点 P 使得 PQ_1 // 平面 β；

③存在点 P 使得 $PQ_1 \perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①②③　　（B）②③　　（C）①③　　（D）①②

二、填空题

11．已知 x，$y>0$，且满足 $x+y=2$，则 $xy+x+y$ 的最大值为__________.

12．已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数，$f(x+4)=f(x)$，若当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x+a)$，则 $f(2023)$=______.

13．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}$，若将其图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得的图象关于原点对称，则 φ 的最小值为____.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\ge a, \\ |x-3-a|+3a, & x<a, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为____；a 的最大值为____.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2(n\in N^*)$，给出下列四个结论中，正确的结论是______.

①数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列；　　②数列 $\{a_n\}$ 中存在不大于 0 的项；

③存在 $N_0\in N^+$，当 $n>N_0$ 时，$a_n<\frac{1}{100}$；　　④ $a_{100}\le\frac{1}{40}$.

三、解答题

16．在 ΔABC 中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求：

（Ⅰ）c 的值；

（Ⅱ）$\sin C$ 和 ΔABC 的面积.

条件①：$B=\dfrac{\pi}{4}$；条件②：$b=5$．

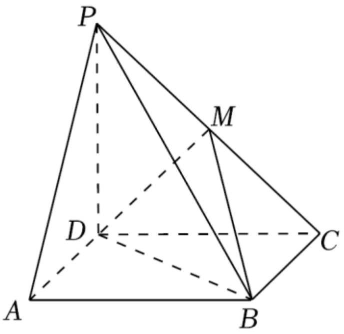
(注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分)

17．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形，M 是线段 PC 的中点．已知 $PD=CD=2$，$AD=1$．

（Ⅰ）求证：$PA//$平面 BDM；

（Ⅱ）求二面角 $M-BD-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）直线 BD 上是否存在点 N，使得 MN 与 PA 垂直？若存在，求 MN 的长；若不存在，请说明理由．



18．某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如表：

汽车型号	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.5	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值．假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等．

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）若以样本的频率估计概率，从Ⅰ型号和Ⅴ型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ，求 ξ 的分布列和期望；

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示不满意．写出方差 $D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$ 的大小关系．

19．已知 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$．

(I)求椭圆 C 的方程；

(II)设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值.

20．已知函数 $f(x)=\dfrac{lnx}{ax}(a>0)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)\leq x-\dfrac{1}{a}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3)若 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0\left(x_1\neq x_2\right)$，证明：$x_1+x_2>2$.

21．已知无穷数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：$x_{n+1}=|y_n|-|z_n|$，$y_{n+1}=|z_n|-|x_n|$，$z_{n+1}=|x_n|-|y_n|$，$n\in N^*$.

记 $u_n=max\{|x_n|，|y_n|，|z_n|\}$（$max\{x，y，z\}$ 表示 3 个实数 x，y，z 中的最大值）.

（Ⅰ）若 $x_1=2$，$y_1=3$，$z_1=4$，求 u_1，u_2，u_3；

（Ⅱ）若 $x_1=2$，$y_1=3$，$u_2=u_1$，求 z_1；

（Ⅲ）设 x_1，y_1，z_1 是有理数，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 中是否一定存在无穷个 0？请说明理由.

参考答案

1. 已知集合$M=\{x\,|\,x-1>0\}$，集合$N=\{x\,|\,x-2\geq 0\}$，则（　）

A. $M\subseteq N$　　　　B. $N\subseteq M$

C. $M\cap N=\varnothing$　　　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

【答案】B

【解析】

【分析】先化简集合M,N，利用集合间的关系和交集，并集的概念求解即可.

【详解】由题意可得$M=\{x\,|\,x>1\}$，$N=\{x\,|\,x\geq 2\}$，

所以$N\subseteq M$，$M\bigcap N=\{x\,|1<x\leq 2\}$，$M\cup N=M$，

即 ACD 错误，B 正确.

故选：B

2.（4 分）若复数z满足$iz=2-4i$，则复数z在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【分析】化简复数，求出复数z在复平面内对应的点位于的象限即可．

【解答】解：$\because iz=2-4i$，$\therefore z=\dfrac{2-4i}{i}=\dfrac{(2-4i)i}{i\cdot i}=\dfrac{4+2i}{-1}=-4-2i$，

故复数z在复平面内对应的点位于第三象限，

故选：C．

【点评】本题考查了复数的运算及其几何意义，是基础题．

3. 下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是

A. $y=\sin x$　　B. $y=x|x|$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=x-\dfrac{1}{x}$

解析：对于 A，有增有减，排除；对于 C，D 都是分段函数且不能用并集，排除；选 B.

4. “$x>1$”是“$\frac{x+1}{x}<2$”的（　）

A．充分非必要条件　B．必要非充分条件　C．充要条件　D．既非充分也非必要条件

A

【解析】

【详解】

由$\frac{x+1}{x}<2$，可得$x>1$或$x<0$

则由“$x>1$”可以得到“$\frac{x+1}{x}<2$”；由“$\frac{x+1}{x}<2$” 不能得到“$x>1$”

则“$x>1$”是“$\frac{x+1}{x}<2$”的充分非必要条件

故选：A

5. 已知平面向量$\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(-4,x)$，若$\vec{b}$与$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$共线，则实数$x=$（　）

A. -8　　　　B. 8　　　　C. -2　　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量加法和共线 坐标表示求解即可.

【详解】由题意可得$\vec{a}+\vec{b}=(-2,-1+x)$，

因为$\vec{b}$与$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$共线，

所以$\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，即$\begin{cases}-4=\lambda(-2)\\x=\lambda(-1+x)\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=2\\x=2\end{cases}$，

故选：D

6. 已知$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且在$(-\infty,0]$上单调递增，若$a=f(\log_{\frac{1}{5}}3)$，$b=f(\log_3 5)$，$c=f(0.2^{0.5})$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<a<c$　　D．$c<b<a$

【分析】根据函数奇偶性好的单调性的关系进行转化求解即可．

【解答】解：$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且在$(-\infty,0]$上单调递增，

$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$单调递减，

$a=f(\log_{\frac{1}{5}}3)=f(-\log_5 3)=f(\log_5 3)$，

$\log_3 5>1$，$0.2^{0.5}=\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{1}{2}$，

$\log_5\sqrt{5}<\log_5 3<1$，即$\frac{1}{2}<\log_5 3<1$，

则$0.2^{0.5}<\log_5 3<\log_3 5$，

则$f(\log_3 5)<f(\log_5 3)<f(0.2^{0.5})$，

即$b<a<c$，

故选：C．

【点评】本题主要考查函数值的大小比较，结合对数函数的性质以及函数奇偶性和单调性的关系进行转化是解决本题的关键．

7．等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，已知$a_2=-4$，$S_4=-10$，则(　　)

A．S_n有最小值，T_n有最小值　　B．S_n有最大值，T_n有最大值

C．S_n有最小值，T_n有最大值　　D．S_n有最大值，T_n有最小值

【分析】先由题设求得a_n，再利用数列$\{a_n\}$的性质及项的特点，即可得到正确选项．

【解答】解：$\because S_4=-10$，

$\therefore\frac{4(a_1+a_4)}{2}=2(a_2+a_3)=-10$，即$a_2+a_3=-5$，

又 $a_2=-4$，$\therefore a_3=-1$，

$\therefore$公差 $d=a_3-a_2=3$，

$\therefore a_n=a_2+(n-2)d=-4+3(n-2)=3n-10$，

易知：当 $n\leqslant 3$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant 4$ 时，$a_n>0$，

$\therefore (S_n)_{min}=S_3$，$(T_n)_{max}=T_2$，

故选：C.

【点评】本题主要考查等差数列基本量的计算及性质的应用，属于中档题.

8．已知点 $M(2,0)$，点 P 在曲线 $y^2=4x$ 上运动，点 F 为抛物线的焦点，则 $\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为

A．$\sqrt{3}$　　B．$2(\sqrt{5}-1)$　　C．$4\sqrt{5}$　　D．4

【分析】设出 P 的坐标，利用已知条件化简表达式，通过基本不等式求解最小值即可.

【解答】解：设 $P(x，y)$，可得 $\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}=\dfrac{(x-2)^2+y^2}{x}=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$.

当且仅当 $x=2$ 时取得最小值 4.

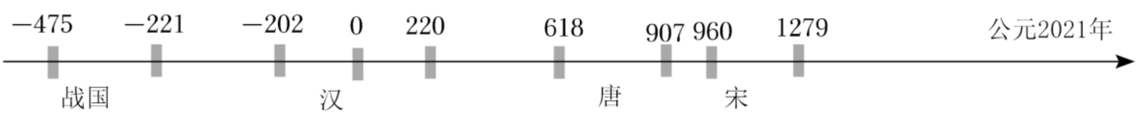
故选：D.

【点评】本题考查抛物线的简单性质以及基本不等式的应用，是基本知识的考查.

9．生物体死亡后，它机体内原有的碳 14 含量 P 会按确定的比率衰减（称为衰减率），P 与死亡年数 t 之间的函数关系式为$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{a}}$（其中 a 为常数），大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”．若 2021 年某遗址文物出土时碳 14 的残余量约占原始含量的 75%，则可推断该文物属于（　　）

参考数据：$\log_2 0.75\approx-0.4$

参考时间轴：



A．宋　　B．唐　　C．汉　　D．战国

【分析】根据已知条件，结合对数函数的公式，即可求解.

【解答】解：$\because$每经过 5730 年衰减为原来的一半，

$\therefore P$ 与死亡年数 t 之间的函数关系式为$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}(t>0)$，

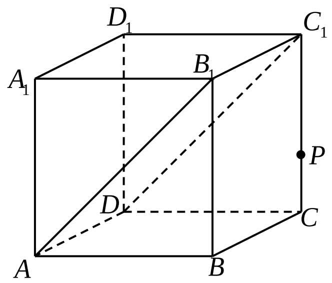
由题意可得，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}=0.75$，即$\frac{t}{5730}=-\log_2 0.75\approx 0.4$，解得 $t\approx 2292$，

由 $2021-2292=-271$，可判断该文物属于战国.

故选：D.

【点评】本题主要考查函数的实际应用，掌握对数函数的公式是解本题的关键，属于基础题.

10. 若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N=f_\alpha(M)$. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 AB_1C_1D 为 β，平面 $ABCD$ 为 γ，点 P 是棱 CC_1 上一动点（与 C，C_1 不重合），$Q_1=f_\gamma[f_\beta(P)]$，$Q_2=f_\beta[f_\gamma(P)]$. 给出下列三个结论：



①线段 PQ_2 长度的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$；

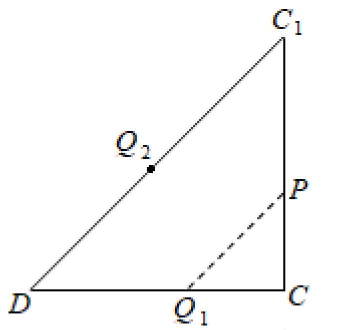
②存在点 P 使得 PQ_1 // 平面 β；

③存在点 P 使得 $PQ_1\perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

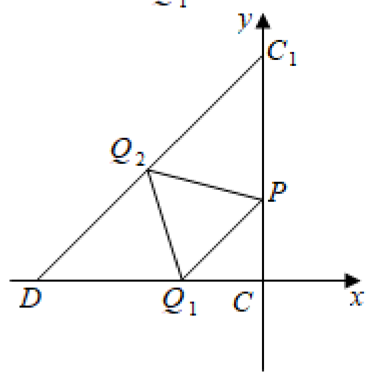
（A）①②③　　（B）②③　　（C）①③　　（D）①②

【解析】解：设点 P 在 β 内投影为 P'，则 $PP'=\frac{\sqrt{2}}{2}C_1P$，设 P'在 γ 内投影为 Q_1，则 $CQ_1=\frac{\sqrt{2}}{2}PP'=\frac{1}{2}C_1P$，



①当 P 为 CC_1 中点时，距 Q_2 最近，$|PQ_2|=\frac{1}{2}$，当 P 在 C_1 时，$|PQ_2|$最大，此时$|PQ_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

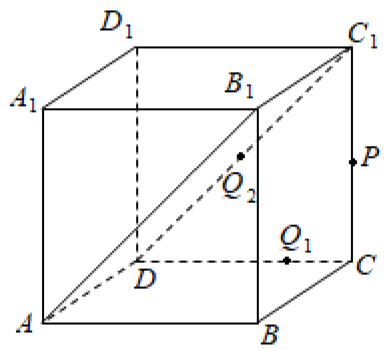
因为 P 与 C 不重合，所以，$|PQ_2|$的范围是$[\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2})$，故①正确；



②由条件可知，P，Q_1，Q_2 在平面 C_1CD 中，将其画出，假设 PQ_1∥β 成立，则 PQ_1∥C_1D，

设 $CQ_1=x$，则 $PC=x$，所以 $C_1P=2CQ=2x$，$PC+PC_1=x+2x=3x=1$，则 $x=\frac{1}{3}$，

所以 $CQ_1=\frac{1}{3}$，$CD=\frac{1}{3}$，即存在点 P 使得 PQ_1∥β，故②正确；



③设 $CQ_1=x$，以 C 为原点建系得 Q_1（$-x$，0），P（0，$1-2x$），Q_2（$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），

假设 $PQ_1\perp PQ_2$. 则$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=0$，即（$-x$，$2x-1$）（$-\frac{1}{2}$，$2x-\frac{1}{2}$）$=4x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$，此时 Δ＜0，方程无解，故③不成立，

故选：D.

二、填空题

11. 已知 x，$y>0$，且满足 $x+y=2$，则 $xy+x+y$ 的最大值为__________

【解析】

【详解】

因为 x， $y>0$，且满足 $x+y=2$，

则 $xy+x+y=xy+2\leqslant(\frac{x+y}{2})^2+2=3$

当且仅当 $x=y=1$ 时取等号，

所以 $xy+x+y$ 的最大值为 3.

故答案为：3

12．已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数，$f(x+4)=f(x)$，若当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x+a)$，则 f（2023）=______.

【解答】解：所以 f（x+4）=f（x），

所以 f（x）是周期为 4 的周期函数，

又函数 y=f（x）为奇函数，当 x∈[0，2]时，$f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x+a)$，

所以 f（0）=0，即 $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(a)$=0，可得 a=1，

则 f（2023）=f（-1）=$-f(1)=-log_{\frac{1}{2}}2$=1.

故答案为：1.

13．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}$，若将其图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得的图象关于原点对称，则 φ 的最小值为__$\frac{\pi}{12}$__.

【分析】化函数 f（x）为正弦型函数，根据图象平移和对称性，即可求得 φ 的最小值.

【解答】解：函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

若将其图象向右平移 φ（φ>0）个单位长度后，得 $f(x-\varphi)=\sin[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{6}]=\sin(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6})$，

由 f（x - φ）的图象关于原点对称，所以 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\varphi=-\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$；

又 φ>0，所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$.

故答案为：$\frac{\pi}{12}$.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质的应用问题，也考查了运算求解能力，是基础题.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\geq a, \\ |x-3-a|+3a, & x<a, \end{cases}$，若函数 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为 ____； a 的最大值为 ____.

【答案】 $a\in\left[-\frac{4}{3},4\right]$ 即可， a 的最大值为 4.

【解答】解：$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant a\\ |x-3-a|+3a, & x<a\end{cases}=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant a\\ -x+3+4a, & x<a\end{cases}$，

①当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 0\\ -x+3, & x<0\end{cases}$，

则 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\in[-1,+\infty)$，$x<0$ 时，$f(x)\in(3,+\infty)$，

此时 $f(x)$ 存在最小值 -1，故 a 的一个取值为 0；

②当 $a>0$ 时，则 $x\geqslant a$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\in[a^2-1,+\infty)$，

$x<a$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，$f(x)\in(3+3a,+\infty)$，

要使 $f(x)$ 存在最小值，$3+3a\geqslant a^2-1$，解得 $0\leqslant a\leqslant 4$；

③当 $a<0$ 时，则 $x\geqslant a$ 时，$f(x)$ 在 $[a,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\in[-1,+\infty)$，

$x<a$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，$f(x)\in(3+3a,+\infty)$，

要使 $f(x)$ 存在最小值，$3+3a\geqslant -1$，解得 $-\frac{4}{3}\leqslant a<0$；

综上所述，a 的取值范围为 $[-\frac{4}{3},4]$；

故答案为：0；4．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2(n\in N^*)$，给出下列四个结论中，正确的结论是______．

①数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列；　　②数列 $\{a_n\}$ 中存在不大于 0 的项；

③存在 $N_0\in N^+$，当 $n>N_0$ 时，$a_n<\frac{1}{100}$；　　④ $a_{100}\leq\frac{1}{40}$．

【答案】①③

【分析】分析可知数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，根据题意先确定上限，得到 $a_n\leqslant\frac{3}{n+2}$，由此可推得 $100a_n<3$，再将原式变形确定下限，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+1})+1$，由此可推得 $100a_{100}>\frac{5}{2}$，综合即可得到答案．

【详解】解：$\because a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{3}a_n^2<0$，

$\therefore\{a_n\}$ 为递减数列，所以选项①正确；

又 $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n{}^2\leqslant\frac{2}{3}$，且 $a_n\neq 0$，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{3}a_n\geqslant\frac{2}{3}>0$，

又 $a_1=1>0$，则 $a_n>0$，选项②错误；

$\therefore a_n-a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n{}^2\geqslant\frac{1}{3}a_na_{n+1}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\geqslant\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_n}\geqslant\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{1}{3}n+\dfrac{2}{3}$，则 $a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}$，

取 $N_0=298$，当 $n>N_0$ 时，$a_n<a_{N_0}\leq\dfrac{1}{100}$，所以选项③正确；

因为 $a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}$ $\therefore 100a_{100}\leqslant 100\times\dfrac{3}{102}<\dfrac{306}{102}=3$；即 $a_{100}<\dfrac{3}{100}$

又由 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{3}a_n{}^2$ 得 $a_{n+1}=a_n(1-\dfrac{1}{3}a_n)$，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3-a_n}\leqslant\dfrac{1}{3-\dfrac{3}{n+2}}=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{n+1})$，

累加可得，$\dfrac{1}{a_{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{3}n+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n+1})+1$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{100}}\leqslant 34+\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{100})<34+\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 6+\dfrac{1}{8}\times 93)<40$，

综上，$\dfrac{1}{40}<a_{100}<\dfrac{3}{100}$.

故选：①③

三、解答题（13+14+14+14+15+15）

16．在 ΔABC 中，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求：

（Ⅰ）c 的值；

（Ⅱ）$\sin C$ 和 ΔABC 的面积．

条件①：$B=\dfrac{\pi}{4}$；条件②：$b=5$．

【解答】解：若选条件①：$B=\dfrac{\pi}{4}$，

（Ⅰ）由于 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$ ……………………………………1

可得 $\sin A=\sqrt{1-cos^2 A}=\dfrac{4}{5}$，……………………………………2

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

可得 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，……………………………………3

解得 $b=5$，……………………………………5

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

可得 $32=25+c^2-2\times5\times c\times\dfrac{3}{5}$，……………………………………6

整理可得：$c^2-6c-7=0$，

解得 $c=7$，或 -1，（舍去）．……………………………………8

（Ⅱ）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{7}{\sin C}$，……………………………………9

可得 $\sin C=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，……………………………………11

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times7\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=14$．……………………………………13

若选条件②：$b=5$，

（Ⅰ）由于 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $32=25+c^2-2\times5\times c\times\dfrac{3}{5}$，……………………………………3

整理可得：$c^2-6c-7=0$，

解得 $c=7$，或 -1（舍去）．……………………………………7

（Ⅱ）由于$\because A\in(0,\pi)$……………………………………8

可得 $\sin A=\sqrt{1-cos^2A}=\dfrac{4}{5}$，……………………………………9，

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{7}{\sin C}$，……………………………………10

可得 $\sin C=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，……………………………………11

可得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times5\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}=14$．……………………………………13

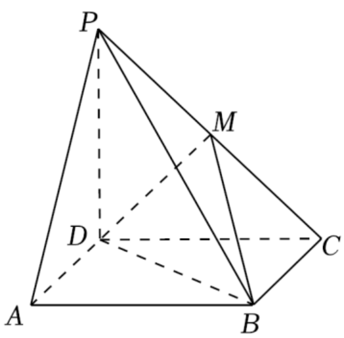
【点评】本题主要考查了同角三角函数基本关系式，正弦定理，余弦定理，三角形的面积公式在解三角形中的综合应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题．

17．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形，M 是线段 PC 的中点．已知 $PD=CD=2$，$AD=1$．

（Ⅰ）求证：$PA//$ 平面 BDM；

（Ⅱ）求二面角 $M-BD-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）直线 BD 上是否存在点 N，使得 MN 与 PA 垂直？若存在，求 MN 的长；若不存在，请说明理由．



【解答】（Ⅰ）证明：连接 AC 交 BD 于 N，连接 MN．

因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 N 是线段 AC 的中点.

又因为 M 是线段 PC 的中点，所以 $PA//MN$.

又因为 $PA\not\subset$ 平面 BDM ， $MN\subset$ 平面 BDM ，

所以 $PA//$ 平面 BDM . ……………………………………4

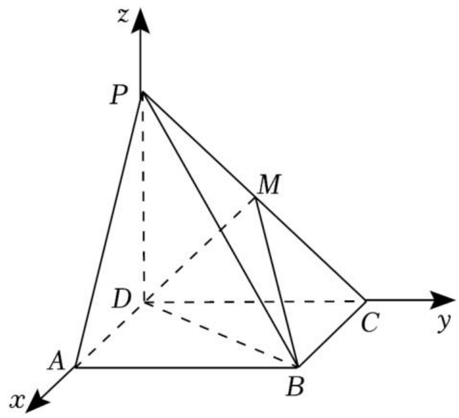
（II）解：因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD\subset$ 底面 $ABCD$ ， $CD\subset$ 底面 $ABCD$ ，

所以 $PD\perp AD$ ， $PD\perp CD$.

因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以， $AD\perp CD$.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

则 $D(0，0，0)$ ， $A(1，0，0)$ ， $C(0，2，0)$ ， $P(0，0，2)$ ， $B(1，2，0)$.



因为 M 是线段 PC 的中点，故 $M(0，1，1)$.

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,2,0)$ ， $\overrightarrow{DM}=(0,1,1)$.

设平面 BDM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=y+z=0\end{cases}$.

令 $y=1$ ，则 $x=-2$ ， $z=-1$.

于是 $\vec{n}=(-2,1,-1)$.

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 $\overrightarrow{DP}$ 为平面 BDC 的法向量.

因为 $\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$ ，所以 $\cos\langle\overrightarrow{DP},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DP}||\vec{n}|}=\dfrac{-2}{2\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

由题知二面角 $M-BD-C$ 是锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………………10

（III）解：因为 N 为直线 BD 上一点，所以 $N(\lambda，2\lambda，0)$ ，其中 $\lambda\in R$.

所以 $\overrightarrow{MN}=(\lambda,2\lambda-1,-1)$.

又因为 $\overrightarrow{AP}=(-1,0,2)$ ， $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AP}=-\lambda-2$.

所以 MN 与 PA 垂直等价于 $\lambda=-2$.

所以存在点 $N(-2，-4，0)$ ，使得 MN 与 PA 垂直，

此时 $\lambda=-2$ ， $\overrightarrow{MN}=(-2,-5,-1)$ ， MN 的长为 $\sqrt{30}$. ……………………………14

18．某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.5	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值．假设客户是否满意互相独立，且每

种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等.

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）若以样本的频率估计概率，从Ⅰ型号和Ⅴ型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为ξ，求ξ的分布列和期望；

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示不满意．写出方差$D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$的大小关系．

【解答】解：（Ⅰ）设“从所有的回访客户中随机抽 1 人，这个客户满意”为事件M．

由题意知，样本中的回访客户的总数是$250+100+200+700+350=1600$，

满意的客户人数是$250\times0.5+100\times0.5+200\times0.6+700\times0.3+350\times0.2=575$，

故所求概率为$P(M)=\dfrac{575}{1600}=\dfrac{23}{64}$．…………………………4

（Ⅱ）$\xi=0$，1，2．

设“从Ⅰ型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”为事件A，

“从Ⅴ型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”为事件B．

根据题意，P（A）估计为 0.5，P（B）估计为 0.2，A与B相互独立．

所以$P(\xi=0)=P(\bar{A}\bar{B})=(1-P(A))(1-P(B))=0.5\times0.8=0.4$；

$P(\xi=1)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$；

$P(\xi=2)=P(AB)=P$（A）P（B）$=0.5\times0.2=0.1$．

所以ξ的分布列为：

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

所以ξ的期望$E(\xi)=0\times0.4+1\times0.5+2\times0.1=0.7$．…………………………10

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示I，II，III，IV，V型号汽车让客户满意，

“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示I，II，III，IV，V型号汽车让客户不满意．

则$D\eta_1=0.5(1-0.5)=0.25$，$D\eta_2=0.5(1-0.5)=0.25$，$D\eta_3=0.6(1-0.6)=0.24$，

$D\eta_4=0.3(1-0.3)=0.21$，$D\eta_5=0.2(1-0.2)=0.16$．

$\therefore$方差$D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$的大小关系为：$D\eta_1=D\eta_2>D\eta_3>D\eta_4>D\eta_5$．………………14

19．已知$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$．

(I)求椭圆C的方程；

(II)设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值.

解：（I）设椭圆的半焦距为 c，依题意 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a=\sqrt{3},\end{cases}$ $\therefore b=1$，$\therefore$ 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$． ……………………4

（II）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$．

①当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|=\sqrt{3}$，此时 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{4}$.

②当 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$．

由已知 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $m^2=\frac{3}{4}(k^2+1)$．把 $y=kx+m$ 代入椭圆方程，整理得

$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，$\therefore x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$．

$$\therefore |AB|^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2=(1+k^2)\left[\frac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\frac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]$$

$$=\frac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}=\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}.$$

思路 1：从分子分析，分离常数,化为反比例函数结构.

$$|AB|^2=3+\frac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}=3+\frac{12}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}(k\neq 0)\leqslant 3+\frac{12}{2\times 3+6}=4.$$

当且仅当 $9k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立．当 $k=0$ 时，$|AB|=\sqrt{3}$，即 $|AB|_{\max}=2$.

$\therefore$ 当 $|AB|$ 最大时，△AOB 面积取最大值 $S=\frac{1}{2}\times|AB|_{\max}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由于 $\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故：当 $k=0$ 时，△AOB 面积取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

思路 2：从分母分析，换元优化，化为基本初等函数结构.

设 $3k^2+1=t(t\geq 1)$，则 $k^2=\frac{t-1}{3}$，$|AB|^2=\frac{(t+2)(3t-2)}{t^2}=$

$3+\frac{4}{t}-\frac{4}{t^2}=-(\frac{2}{t}-1)^2+4$，当 $t=2$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$|AB|_{\max}=2$.

思路 3：整体优化，使用均值定理.

$$|AB|^2=\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}=\frac{(3k^2+3)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}\leq\left(\frac{\frac{3k^2+3}{3k^2+1}+\frac{9k^2+1}{3k^2+1}}{2}\right)^2=4$$

,即 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，

$|AB|_{\max}=2$.…………………………………14

20．已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{ax}(a>0)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)\le x-\dfrac{1}{a}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3)若 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0\left(x_1\ne x_2\right)$，证明：$x_1+x_2>2$.

【详解】（1）$f'(x)=\dfrac{1}{a}\bullet\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，显然有 $f'(\mathrm{e})=0$，当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，单调递增，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，单调递减；……………………4

（2）由 $\dfrac{\ln x}{ax}\le x-\dfrac{1}{a}$ 得：$ax^2-x-\ln x\ge 0$，$a\ge\dfrac{x+\ln x}{x^2}$，

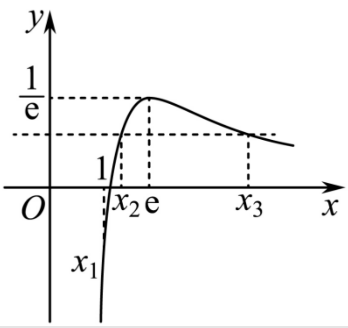
令 $g(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$，则有 $g'(x)=\dfrac{-x-2\ln x+1}{x^3}$，令 $k(x)=-x-2\ln x+1$，

显然 $k(x)$ 是减函数，$k(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$k(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(1,+\infty)$ 时，

$k(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

$\therefore$ $g(x)_{\max}=g(1)=1$，a 的取值范围是 $a\ge 1$；……………………5

（3）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，由（1）的结论作函数图像如下：



$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

对于 $x_1\ln x_2+x_2\ln x_1=0$，得 $-\dfrac{\ln x_1}{x_2}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，不妨设 $x_2>x_1$，则有 $-f(x_1)=f(x_2)$，

由图可知当 $0<f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，对应的自变量有 2 个值 x_2,x_3，其中 $x_3>\mathrm{e},1<x_2<\mathrm{e}$，

要证明 $x_1+x_2>2$，只需 x_2 取 x_2,x_3 中较小的数 x_2 即可，

$\because 0<f(x_2)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$\therefore -\dfrac{1}{\mathrm{e}}<f(x_1)<0$，$x_1\in(0,1)$，$2-x_1\in(1,2)$，

要证明 $x_1+x_2>2$，只需证明 $x_2>2-x_1$，在 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ 只需证明 $f(x_2)>f(2-x_1)$，$\because f(x_2)=-f(x_1)$，$\therefore$ 只需证明 $-f(x_1)>f(2-x_1)$，

即 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$，构造函数 $p(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln(2-x)}{2-x}\left(x\in(0,1)\right)$，

$p'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{-1+\ln(2-x)}{(2-x)^2}=\dfrac{x^2\ln(2-x)-(2-x)^2\ln x+4(1-x)}{x^2(2-x)^2}$，

$\because x\in(0,1),\therefore 2-x\in(1,2),x^2\ln(2-x)>0,-(2-x)^2\ln x>0,4(1-x)>0$，

$p^{'}(x)>0$，$p(x)$ 是增函数，又 $p(1)=0,\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$p(x)<0$，

即 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$，命题得证；

综上，（1）当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，单调递增，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，单调递减；（2）$a\geq1$.……………………6

21．已知无穷数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：$x_{n+1}=|y_n|-|z_n|$，$y_{n+1}=|z_n|-|x_n|$，$z_{n+1}=|x_n|-|y_n|$，$n\in N^*$．记 $u_n=max\{|x_n|，|y_n|，|z_n|\}$（$max\{x，y，z\}$ 表示 3 个实数 x，y，z 中的最大值）．

（Ⅰ）若 $x_1=2$，$y_1=3$，$z_1=4$，求 u_1，u_2，u_3；

（Ⅱ）若 $x_1=2$，$y_1=3$，$u_2=u_1$，求 z_1；

（Ⅲ）设 x_1，y_1，z_1 是有理数，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 中是否一定存在无穷个 0？请说明理由．

【解答】（Ⅰ）因为 $x_1=2$，$y_1=3$，$z_1=4$，

依题意，$x_2=-1$，$y_2=2$，$z_2=-1$，

$x_3=1$，$y_3=0$，$z_3=-1$．

所以 $u_1=4$，$u_2=2$，$u_3=1$；……………………4

（Ⅱ）设 $a_n=|x_n|$，$b_n=|y_n|$，$c_n=|z_n|$，$n\in N^*$，$a_n\geqslant0$，$b_n\geqslant0$，$c_n\geqslant0$，

依题意，$u_n=max\{a_n，b_n，c_n\}$，$a_{n+1}=|b_n-c_n|$，$b_{n+1}=|c_n-a_n|$，$c_{n+1}=|a_n-b_n|$，

所以 a_{n+1}，b_{n+1}，$c_{n+1}\leqslant max\{a_n，b_n，c_n\}$，

所以 $max\{a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}\}\leqslant max\{a_n，b_n，c_n\}$，

即 $u_{n+1}\leqslant u_n$（当且仅当 a_n，b_n，c_n 中至少有一项为 0 时等号成立），

因为 $u_2=u_3$，所以 a_2，b_2，c_2 中至少有一项为 0，

因为 $x_1=2$，$y_1=3$，所以 $a_1=2$，$b_1=3$，

所以 $a_2=|3-c_1|$，$b_2=|c_1-2|$，$c_2=|2-3|=1$，

所以 $c_1=2$ 或 3，

所以 $z_1=-3$，-2，2 或 3；…………………………10

（Ⅲ）数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 中一定存在无穷个 0，

设 x_1，y_1，z_1 的最小公分母为 p，将 x_n，y_n，z_n 均改为原来的 p 倍，

则 x_1，y_1，z_1 均为整数，题目的其它条件仍然成立，且问题不变，

于是对任意 $n\in N^*$，x_n，y_n，z_n 均为整数，a_n，b_n，c_n，u_n 均为自然数，

反证法，假设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 中没有 0，或者有有限个 0，

则存在 $m\in N$，对任意 $k>m$，均有 a_k，b_k，c_k，$u_k\geqslant1$，

设 $d_n=u_{n+1}-u_n(n\in N^*)$，则 $u_{m+n+1}=u_{m+1}+d_{m+1}+d_{m+2}+\ldots+d_{m+n}$，

由（Ⅱ），$u_{n+1}\leqslant u_n$.，故 $d_n=u_{n+1}-u_n\leqslant0$，

假若对任意 $k>m$，d_k 均不为0，则 $d_k\leqslant -1$，$u_{m+n+1}\leqslant u_{m+1}-n$，

令 $n=u_{m+1}$，则 $u_{m+n+1}\leqslant 0$，与 $u_{m+n+1}\geqslant 1$矛盾，

所以存在 $n_0>m$，使得 $d_{n_0}=0$，即 $u_{n_0+1}=u_{n_0}$，

由（Ⅱ），a_{n_0}，b_{n_0}，c_{n_0} 中至少有一项为0，与 $a_{n_0},b_{n_0},c_{n_0}\geqslant 1$矛盾，……………………………15

所以假设不成立，数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$中一定存在无穷个0.

【点评】本题考查了数列的综合应用，涉及到分类讨论思想以及反证法的应用，考查了学生的分析问题的能力以及推理能力，属于难题.