北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高二数学统练一

班级：________ 学号：________ 姓名：________ 成绩：________

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知直线 m，直线 n 和平面 α，则下列四个命题中正确的是（　　）

(A) 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$，则 $m \parallel$　　　(B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$，则 $m \parallel n$

(C) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$，则 $m \perp n$　　　(D) 若 $m \perp n, n \parallel \alpha$，则 $m \perp \alpha$

2. 已知平面 α 的法向量为 $n = (-2, 1, 1)$，若平面 α 外的直线 l 的方向向量为 $a = (1, 0, 2)$，则可以推断（　　）

(A) $l \parallel \alpha$　　　(B) $l \perp \alpha$　　　(C) l 与 α 斜交　　　(D) $l \subset \alpha$

3. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$，则（　　）

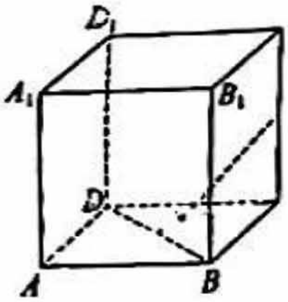
(A) ,ιc =　　　(B) AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30

(C) $AC = CB$　　　(D) B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

4. 已知正四棱锥 $P - ABCD$ 的高为 4，棱 AB 的长为 2，点 H 为侧棱 PC 上一动点，那么 $\triangle HBD$ 面积的最小值为（

(A)　　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$，M 是 CC_1 的中点，N 是正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且 $MN \perp BD$，则线段 MN 长度的取值范围是（　　）



(A) $[1,2\sqrt{2}]$　　(B) $[1,3]$　　(C) $[\sqrt{3},2\sqrt{2}]$　　(D) $[\sqrt{3},3]$

6. 已知点 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,2)$、$P(1,-1,0)$，那么过点 P 平行于平面 ABC 的平面与平面 ABC 的距离是（　　）

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{1}{4}$

7. 已知空间中三点 $A(-1,0,0)$，$B(0,1,-1)$，$C(-2,-1,2)$，则点 C 到直线 AB 的距离为（　　）

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^\circ$，若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）

(A) π　　(B) $\sqrt{6}\pi$　　(C) 3π　　(D) $3\sqrt{6}\pi$

9. 如图甲是一水晶饰品，其对应的几何体叫星形八面体，也叫八角星体，是一种二复合四面体，它是由两个有共同中心的正四面体交叉组合而成且所有面都是全等的小正三角形，如图乙所示．若一星形八面体中两个正四面体的棱长均为 2，则该星形八面体体积为（　　）


甲

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$　　(C) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$　　(D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

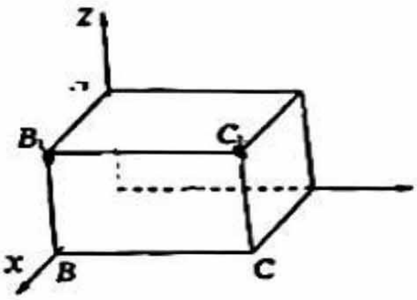
10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 M 为侧面 CC_1D_1D 的中心，点 N 在棱 A_1B_1 上运动，正方体表面 $A_1B_1C_1D_1$ 上有一点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，则所有满足条件的 P 点所构成图形的面积为（　　）

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{3}{8}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{3}{4}$

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

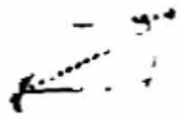
11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,0)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________．

12. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，若 $\overrightarrow{AC_1}=(2,2,1)$，则 $\overrightarrow{B_1D}$ 的坐标为______．

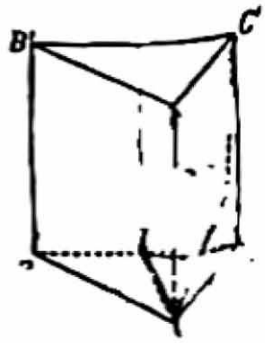


13. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，且 $PD=AB=1$，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 PG 与底面 $ABCD$ 所成的角 θ 满足________.

①$\theta=\frac{\pi}{4}$；②$\cos\theta=\frac{2\sqrt{34}}{17}$；③$\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；④$\sin\theta=$



14. 如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的棱长均为 2，O 是 BC 中点，P 是侧面 $BB'C'C$ 内一点，且 $PA=2$，则点 P 的轨迹长度为________；当 PC' 的长取最小值时，三棱锥 $O-PAA'$ 的体积为________.



15. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的菱形，且 $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$PD=AD$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，F，O 分别是 PA，BD 的中点，E 是线段 PB 上的动点，给出下列四个结论：

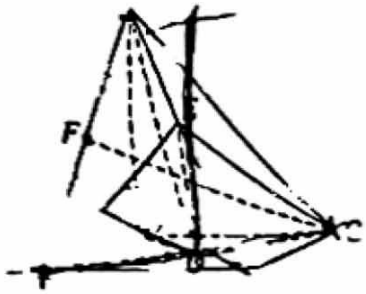
①$AC\perp OE$；

②$FC=PO$；

③直线 PO 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$；

④$\triangle AEC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{15}]$.

其中所有正确结论的序号是________.



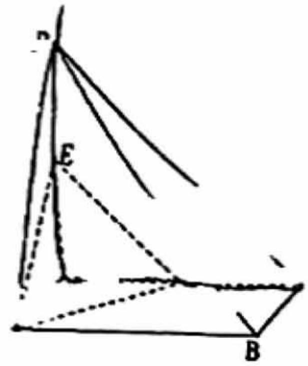
三、解答题共 3 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 10 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD=DC=2AD=2$，E、F 分别是 PD，DC 的中点.

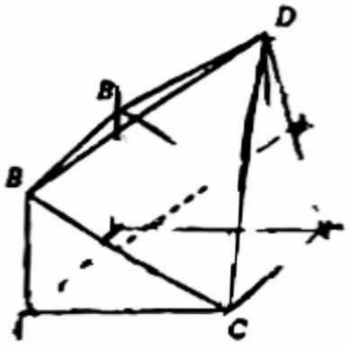
(1) 求证：$PC\parallel$ 平面 AEF；

(2) 求直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值.



(本小题15分)

如图，由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D-BB_1C_1C$ 构成的几何体中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$BC=BB_1=2$，$C_1D=CD=\sqrt{5}$，平面 $CC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1.



(1) 求证：$AC\perp DC_1$；

(2) 若 M 为 DC_1 中点，求证：$AM\parallel$ 平面 DBB_1；

(3) 在线段 BC 上（含端点）是否存在点 P，使直线 DP 与平面 DBB_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$？若存在，求 $\frac{BP}{BC}$ 的值，若不存在，说明理由.

18. (本小题15分)

对于三维向量 $a_k=(x_k,y_k,z_k)$ $(x_k,y_k,z_k\in\mathbf{N},k=0,1,2,\cdots)$，定义"$F$ 变换"：$a_{k+1}=F(a_k)$，其中，$x_{k+1}=|x_k-y_k|$，$y_{k+1}=|y_k-z_k|$，$z_{k+1}=|z_k-x_k|$. 记 $<a_k>=x_ky_kz_k$，$\|a_k\|=x_k+y_k+z_k$.

(1) 若 $a_0=(3,1,2)$，求 $<a_2>$ 及 $\|a_2\|$；

(2) 证明：对于任意 a_0，经过若干次 F 变换后，必存在 $K\in\mathbf{N}^*$，使 $<a_K>=0$；

(3) 已知 $a_1=(p,2,q)$ $(q\geqslant p)$，$\|a_1\|=2024$，将 a_1 再经过 m 次 F 变换后，$\|a_{m+1}\|$ 最小，求 m 的最小值.