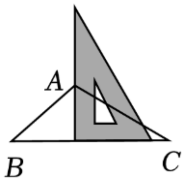
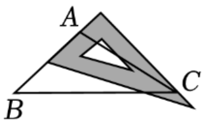
2023北京陈经纶中学初二9月月考

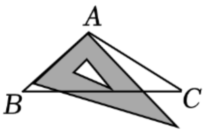
数　　学

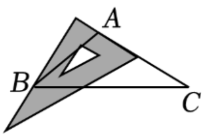
一、单选题

1．如图，用三角板作△*ABC*的边*AB*上的高线，下列三角板的摆放位置正确的是（　　）

A．

B．

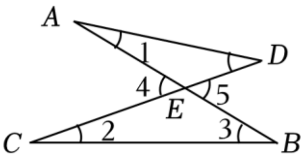
C．

D．

2．十二边形的内角和为（　　）

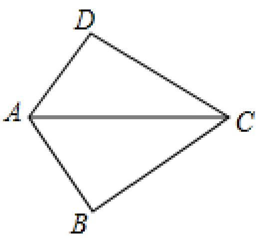
A．180°　　B．360°　　C．1800°　　D．无法计算

3．如图，*AB*和*CD*相交于点*O*，则下列结论正确的是（　　）



A．∠1＝∠2　　B．∠5＝∠1+∠3　　C．∠4＝∠5　　D．∠5＜∠2

4．如图，已知*AB*＝*AD*，那么添加下列一个条件后，仍无法判定△*ABC*≌△*ADC*的是（　　）



A．*CB*＝*CD*　　B．∠*BAC*＝∠*DAC*　　C．∠*B*＝∠*D*＝90°　　D．∠*BCA*＝∠*DCA*

5．下列判定两直角三角形全等的方法，错误的是（　　）

A．两条直角边对应相等

B．斜边和一直角边对应相等

C．两个锐角对应相等

D．斜边和一锐角对应相等

6．根据下列已知条件，能画出唯一的△*ABC*的是（　　）

A．∠*A*＝60°，∠*B*＝45°，*AB*＝4

B．∠*C*＝90°，∠*B*＝30°，∠*A*＝60°

C．*AB*＝3，*BC*＝4，*CA*＝8

D．$AB=4$，$BC=3$，$\angle A=60°$

7．下列是真命题的是（　　）

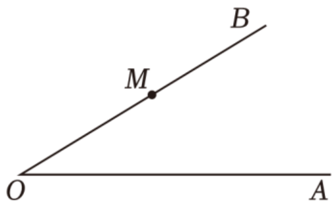
A．对顶角相等

B．两边和一角对应相等的两个三角形全等

C．三角形的外角大于内角

D．两条直线被第三条直线所截，同位角相等

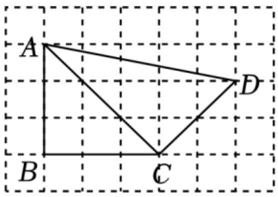
8．如图，$\angle AOB<90°$，点 M 在 OB 上，且 $OM=6$，点 M 到射线 OA 的距离为 a，点 P 在射线 OA 上，$MP=x$，若△OMP 的形状，大小是唯一确定的，则 x 的取值范围是（　　）



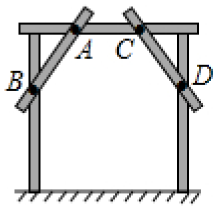
A．$x=a$ 或 $x\geqslant 6$　　B．$x\geqslant 6$　　C．$x=6$　　D．$x=6$ 或 $x>a$

二、填空题

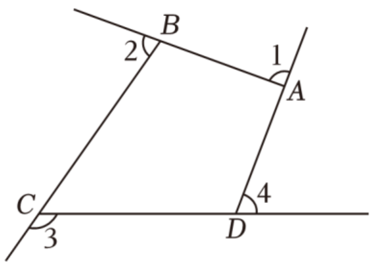
9．如图所示的网格是正方形网格，点 A，B，C，D 均在格点上，则 $S_{\triangle ABC}=$_____$S_{\triangle ACD}$（填"＞"，"＜"或"＝"）.



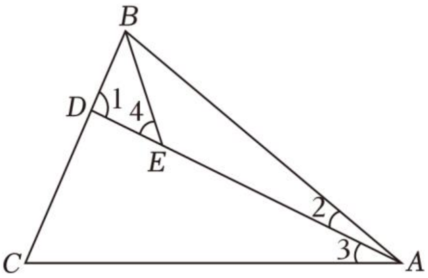
10．赵师傅在做完门框后，为防止变形，如图中所示的那样在门上钉上两条斜拉的木条（即图中的 AB，CD），这其中的数学原理是_________.



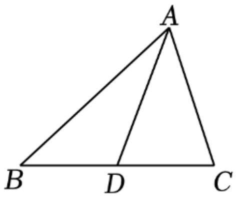
11．如图是由射线 AB、BC、CD、DA 组成的平面图形，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=$_______°．



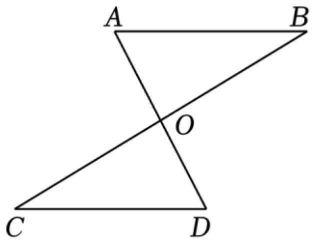
12．如图，在△ABC 中，$\angle 1=100°$，$\angle C=80°$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle 3$，$BE$ 平分 $\angle ABC$．则 $\angle 4$ 的度数为_______.



13．如图，已知 AD 是△ABC 的中线，且 AB＝5cm，AC＝3cm，则△ABD 和△ACD 的周长之差为 ______，△ABD 和△ACD 的面积之差为 _______．



14．如图，已知 OB＝OC，若以"SAS"为依据证明△AOB≌△DOC，还需要添加的条件是 ________．



15．甲乙两位同学进行一种数学游戏．游戏规则是：两人轮流对△ABC 及△$A'B'C'$ 对应的边或角添加等量条件（点 A'，B'，C' 分别是点 A，B，C 的对应点）．某轮添加条件后，若能判定△ABC 与△$A'B'C'$ 全等，则当轮添加条件者失败，另一人获胜．

轮次	行动者	添加条件
1	甲	AB＝$A'B'$＝2cm
2	乙	BC＝$B'C'$＝4cm
3	甲	?

上表记录了两人游戏的部分过程，则下列说法正确的是 ______（填写所有正确结论的序号）．

①若第 3 轮甲添加 AC＝$A'C'$＝5cm，则乙获胜；

②若甲想获胜，第 3 轮可以添加条件∠C＝∠C'＝30°；

③若乙想获胜，可修改第 2 轮添加条件为∠A＝∠A'＝90°．

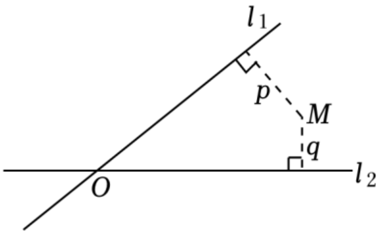
16．如图，平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若点 M 到直线 l_1、l_2 的距离分别是 $p$cm、$q$cm，则称有序实数对（p，q）是点 M 的"距离坐标"．特别地，当点在直线上时，定义点到直线的距离为 0．下列说法：

①"距离坐标"是（0，0）的点只有点 O；

②"距离坐标"是（0，1）的点只有 1 个；

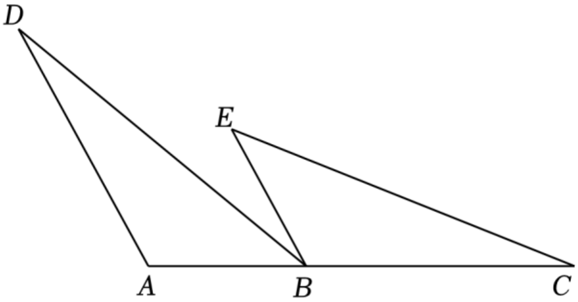
③"距离坐标"是（2，2）的点共有 4 个；

正确的有 ______（填序号）．



三、解答题

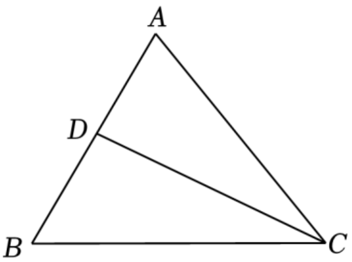
17．已知：如图，点 B 是线段 AC 上一点，$AD\parallel BE$，$AB=BE$，$\angle D=\angle C$．求证：$BD=EC$．



18．如图，在△ABC 中，$\angle BAC=70°$，$\angle ACB=60°$，$\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D．

（1）尺规作图：作$\angle ABC$ 的平分线 BO 交 CD 于点 O．（保留作图痕迹，不写作法）

（2）求$\angle BOD$ 的度数．

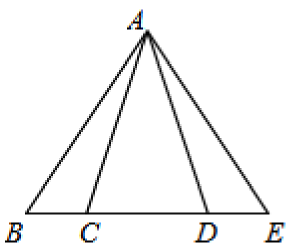


19．如图，在△ABE 中，C，D 是边 BE 上的两点，有下面四个关系式：（1）$AB=AE$，（2）$BC=DE$，（3）$AC=AD$，（4）$\angle BAC=\angle EAD$．请用其中两个作为已知条件，余下两个作为求证的结论，写出你的已知和求证，并证明．

已知：

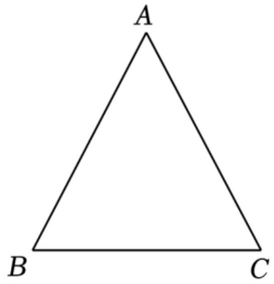
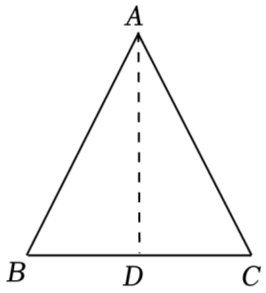
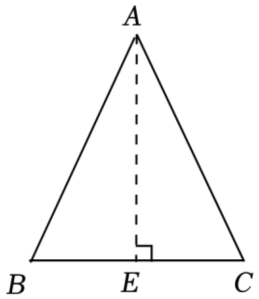
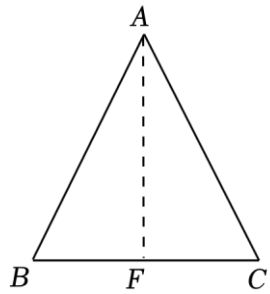
求证：

证明：



20．在证明等腰三角形的判定定理时，甲、乙、丙三位同学各添加一条辅助线，方法如图所示．你能用哪位同学添加辅助线的方法完成证明，请选择一种方法补全证明过程．

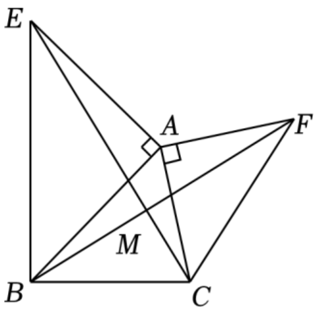
等腰三角形的判定定理：
如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）

<table>
<tr><td colspan="3">已知：如图，在△ABC 中，$\angle B=\angle C$．求证：$AB=AC$．

</td></tr>
<tr><td>甲的方法：
证明：作$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D．

</td><td>乙的方法：
证明：作 $AE\perp BC$ 于点 E．

</td><td>丙的方法：
证明：取 BC 中点 F，连接 AF．

</td></tr>
</table>

21．如图，已知 $AE\perp AB$，$AF\perp AC$，$AE=AB$，$AF=AC$，BF 与 CE 相交于点 M．

（1）求证：$EC=BF$；

（2）求证：$EC\perp BF$．

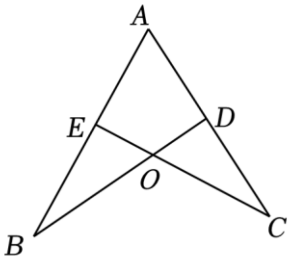


22．课上，老师提出了这样一个问题：

已知：如图，$AD=AE$，请你再添加一个条件，使得△ADB≌△AEC．

（1）同学们认为可以添加的条件并不唯一，你添加的条件是 ____________，并完成证明

（2）若添加的条件是 $OE=OD$，证明：△ADB≌△AEC．

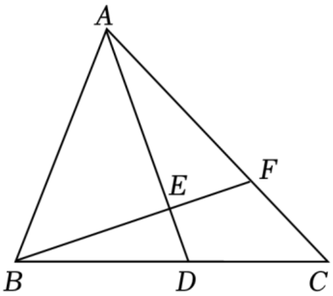


23．如图，在△ABC 中，点 D 在 BC 边上，连接 AD，$\angle ADB=\angle ABD$．BE 是△ABD 中 AD 边上的高线，延长 BE 交 AC 于点 F．设$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$．

（1）当 $\alpha=70^\circ$ 时，$\angle ABF$ 的度数为 _______；

（2）求 $\angle AFB$ 的度数（用含 α、β 的式子表示）；

（3）若 $\angle AFB=\angle BAF$，求 β 的值．



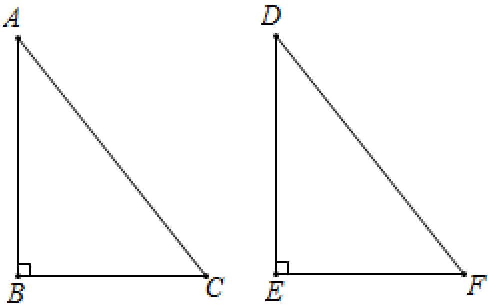
24．【提出问题】

我们已经知道了三角形全等的判定方法（*SAS*，*ASA*，*AAS*，*SSS*）和直角三角形全等的判定方法（*HL*），请你继续对“两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形（*SSA*）”的情形进行探究．

【探索研究】

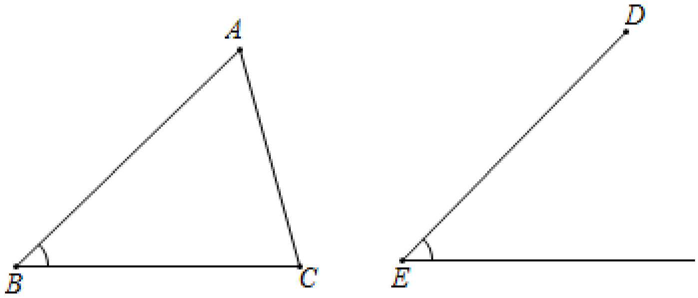
已知：在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle B=\angle E$．

（1）如图①，当$\angle B=\angle E=90^\circ$ 时，根据_______，可知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong \mathrm{Rt}\triangle DEF$；



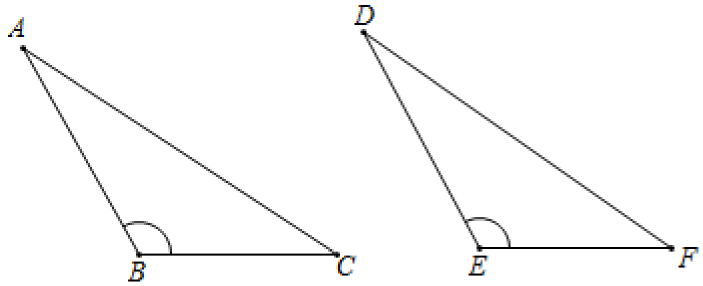
图①

（2）如图②，当$\angle B=\angle E<90^\circ$ 时，请用直尺和圆规作出$\triangle DEF$，通过作图，可知$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 全等．（填“一定”或“不一定”）



图②

（3）如图③，当$\angle B=\angle E>90^\circ$ 时，$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是否全等？若全等，请加以证明：若不全等，请举出反例．



图③

【归纳总结】

（4）如果两个三角形的两边分别相等且其中一组等边的对角相等，那么当这组对角是

时，这两个三角形一定全等.（填序号）

①锐角；②直角；③钝角.

25．阅读理解：课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：在△*ABC* 中，*AB*＝7，*AC*＝3，求 *BC* 边上的中线 *AD* 的取值范围.

（1）小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法（如图 1）：

①延长 *AD* 到 *Q* 使得 *DQ*＝*AD*；

②再连接 *BQ*，把 *AB*、*AC*、2*AD* 集中在△*ABQ* 中；③利用三角形的三边关系可得 4＜*AQ*＜10，则 *AD* 的取值范围是 ________.

感悟：解题时，条件中若出现“中点”“中线”等条件，可以考虑倍长中线，构造全等三角形，把分散的已知条件和所求证的结论集中到同一个三角形中.

（2）请写出图 1 中 *AC* 与 *BQ* 的位置关系并证明；

（3）思考：已知，如图 2，*AD* 是△*ABC* 的中线，*AB*＝*AE*，*AC*＝*AF*，∠*BAE*＝∠*FAC*＝90°，试探究线段 *AD* 与 *EF* 的数量和位置关系，并加以证明.

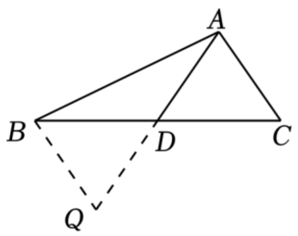


图1

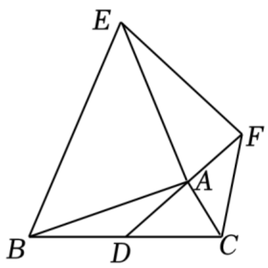


图2

参考答案

一、单选题

1.【分析】根据高线的定义即可得出结论．

【解答】解：A，C，D都不是$\triangle ABC$的边AB上的高，

故选：B．

【点评】本题考查的是作图－基本作图，熟知三角形高线的定义是解答此题的关键．

2.【分析】根据多边形的内角和公式（$n-2$）$\cdot 180°$列式计算即可得解．

【解答】解：（$12-2$）$\cdot 180°=1800°$．

故选：C．

【点评】本题考查了多边形内角与外角，熟记多边形内角和公式是解题的关键．

3.【分析】由对顶角的性质，三角形外角的性质，即可判断．

【解答】解：A、$\angle 1$与$\angle 2$不一定相等，故A不符合题意；

B、$\angle 5=\angle 1+\angle D$，$\angle 5$不一定等于$\angle 1+\angle 3$，故$B$不符合题意；

C、对顶角相等，因此$\angle 4=\angle 5$，故C符合题意；

D、$\angle 5>\angle 2$，故D不符合题意．

故选：C．

【点评】本题考查对顶角，三角形外角的性质，掌握以上知识点是解题的关键．

4.【分析】要判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，已知$AB=AD$，$AC$是公共边，具备了两组边对应相等，故添加$CB=CD$、$\angle BAC=\angle DAC$、$\angle B=\angle D=90°$后可分别根据$SSS$、$SAS$、$HL$能判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，而添加$\angle BCA=\angle DCA$后则不能．

【解答】解：A、添加$CB=CD$，根据SSS，能判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，故$A$选项不符合题意；

B、添加$\angle BAC=\angle DAC$，根据SAS，能判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，故$B$选项不符合题意；

C、添加$\angle B=\angle D=90°$，根据HL，能判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，故$C$选项不符合题意；

D、添加$\angle BCA=\angle DCA$时，不能判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，故$D$选项符合题意；

故选：D．

【点评】本题考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL．

注意：AAA、SSA不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

5.【分析】结合四个选项所给的条件和全等三角形的判定方法分别进行分析即可．

【解答】解：A、可利用SAS判定两直角三角形全等，故此选项不合题意；

B、可利用HL判定两直角三角形全等，故此选项不合题意；

C、不能判定两直角三角形全等，故此选项符合题意；

D、可利用AAS判定两直角三角形全等，故此选项不合题意；

故选：C．

【点评】本题考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL．

注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

6.【分析】根据全等三角形的判定定理和三角形的三边关系理逐个判断即可．

【解答】解：A、$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AB=4$，符合全等三角形的判定定理，能画出唯一的三角形，故本选项符合题意；

B、$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\angle A=60°$，不符合全等三角形的判定定理，不能画出唯一的三角形，故本选项不符合题意；

C、$3+4<8$，不符合三角形的三边关系定理，不能画出三角形，故本选项不符合题意；

D、$AB=4$，$BC=3$，$\angle A=60°$，不符合全等三角形的判定定理，不能画出唯一的三角形，故本选项不符合题意；

故选：A．

【点评】本题考查了全等三角形的判定定理和三角形三边关系定理，能熟记全等三角形的判定定理是解此题的关键，注意：全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS，两直角三角形全等还有 HL．

7.【分析】根据对顶角相等、全等三角形的判定、三角形的外角的概念、平行线的性质判断即可．

【解答】解：A、对顶角相等，是真命题，符合题意；

B、两边及其夹角对应相等的两个三角形全等，故本选项命题是假命题，不符合题意；

C、三角形的外角不一定大于内角，故本选项命题是假命题，不符合题意；

D、两条平行线被第三条直线所截，同位角相等，故本选项命题是假命题，不符合题意；

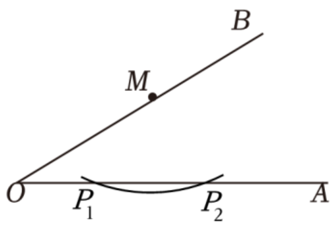
故选：A．

【点评】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理．

8.【分析】分情况讨论，结合图形，即可得到答案．

【解答】解：当 $MP\perp OA$ 时，$PM=x=a$，$\triangle OMP$ 是直角三角形，$\triangle OMP$ 的形状，大小是唯一确定的；

当 $a<x<6$ 时，如图，有两种情况；



当 $x\geqslant 6$ 时，$\triangle OMP$ 的形状，大小是唯一确定的．

$\therefore x=a$ 或 $x\geqslant 6$．

故选：A．

【点评】本题考查全等三角形的判定，关键是分情况讨论．

二、填空题

9．【分析】由题意可得$\triangle ABC$与$\triangle ACD$都是直角三角形，则可求得相应的面积，再比较即可．

【解答】解：由图可得：$\triangle ABC$与$\triangle ACD$都是直角三角形，

$\because AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}<S_{\triangle ACD}$．

故答案为：$<$．

【点评】本题主要考查三角形的面积，解答的关键是熟记三角形的面积公式并灵活运用．

10．【分析】三角形具有稳定性，其它多边形不具有稳定性，把多边形分割成三角形则多边形的形状就不会改变．

【解答】解：赵师傅这样做是运用了三角形的稳定性．

故答案为：三角形的稳定性．

【点评】本题考查三角形稳定性的实际应用．三角形的稳定性在实际生活中有着广泛的应用，如钢架桥、房屋架梁等，因此要使一些图形具有稳定的结构，往往通过连接辅助线转化为三角形而获得．

11．【分析】根据多边形的外角和即可求得答案．

【解答】解：由题意可得$\angle1$，$\angle2$，$\angle3$，$\angle4$为四边形$ABCD$的外角，

则$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=360^\circ$，

故答案为：360．

【点评】本题考查多边形的外角和，结合图形得出$\angle1$，$\angle2$，$\angle3$，$\angle4$为四边形$ABCD$的外角是解题的关键．

12．【分析】先求出$\angle2$，$\angle3$，再求出$\angle ABE$即可解答．

【解答】解：$\because$在$\triangle ABC$中，$\angle1=100^\circ$，$\angle C=80^\circ$，

$\therefore\angle3=20^\circ$，

$\because\angle2=\frac{1}{2}\angle3$，

$\therefore\angle2=10^\circ$，

在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=180^\circ-100^\circ-10^\circ=70^\circ$，

$\because BE$平分$\angle ABC$．

$\therefore\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=35^\circ$，

$\therefore\angle4=35^\circ+10^\circ=45^\circ$．

故答案为：45°．

【点评】本题考查三角形内角和定理和外角的性质，熟练掌握以上知识是解题．

13．【分析】根据三角形的中线的定义可得$BD=CD$，然后求出$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的周长之差$=AB-AC$．面

积之差等于 0．

【解答】解：∵AD 为中线，

∴$BD=CD$，

∴△ABD 与△ACD 的周长之差＝（$AB+AD+BD$）﹣（$AC+AD+CD$）＝$AB-AC$，

∵$AB=5cm$，$AC=3cm$，

∴△ABD 与△ACD 的周长之差＝5﹣3＝2（cm）．

又 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

∴$S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ACD}=0$，即△$ABD$ 和△ACD 的面积之差为 $0cm^2$．

故答案为：$2cm$；$0cm^2$．

【点评】本题考查了三角形的中线，熟记概念并求出两个三角形的周长的差等于两边的差是解题的关键．

14．【分析】根据题意，对顶角∠AOB＝∠COD，若以“SAS”为依据证明△AOB≌△DOC，还需添加一个边的信息且该边与夹角相邻，据此解题．

【解答】解：添加条件 $OA=OD$．

理由：在△AOB≌△DOC 中，

$$\begin{cases}OA=OD\\ \angle AOB=\angle COD,\\ OB=OC\end{cases}$$

∴△AOB≌△DOC（SAS）．

故答案为：$OA=OD$．

【点评】本题考查三角形的判定，难度较易，掌握相关知识是解题关键．

15．【分析】根据全等三角形的判定定理逐一判断即可．

【解答】解：①若第 3 轮甲添加 $AC=A'C'=5cm$，根据 SSS 即可判定△ABC≌△$A'B'C'$，则甲失败，乙获胜，故说法正确，符合题意；

②若第 3 轮甲添加条件∠C＝∠C'＝30°，由于含 30°的直角三角形直角边等于斜边的一半，满足 HL，能判定△ABC≌△$A'B'C'$，则甲失败，乙获胜，故说法错误，不符合题意；

③若乙第 2 轮添加条件为∠A＝∠A'＝90°，则第 3 轮甲无论添加任何对应的边或角的等量条件，都能判定△ABC≌△$A'B'C'$，则甲失败，乙获胜，故说法正确，符合题意；

故答案为：①③．

【点评】本题重点考查了三角形全等的判定定理，普通两个三角形全等共有四个定理，即 AAS、ASA、SAS、SSS，直角三角形可用 HL 定理，注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

16．【分析】根据（p，q）是点 M 的“距离坐标”，得出①若 $pq\neq0$，则“距离坐标”为（p、q）的点有且仅有 4 个．②若 $pq=0$，且 $p+q\neq0$，则“距离坐标”为（p、q）的点有且仅有 2 个，进而得出解集从而确定答案．

【解答】解：如图，平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，

若 p、q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离，则称有序非负数实数对（p、q）是点 M 的“距离坐标”.

已知常数 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，给出下列两个个结论：

（1）若 $pq\neq 0$，则“距离坐标”为（p、q）的点有且仅有 4 个.

（2）若 $pq=0$，且 $p+q\neq 0$；

①$p=0$，$q=0$，则“距离坐标”为（0，0）的点有且仅有 1 个；故①“距离坐标”是（0，0）的点只有点 O 是正确的；

②$p=0$，$q=1$，则“距离坐标”为（0，1）的点有且仅有 2 个；故②“距离坐标”是（0，1）的点有 1 个是错误的；

③得出（2，2）是与 l_1 距离是 2 的点是与之平行的两条直线，与 l_2 的距离是 2 的也是与之平行的两条直线，这四条直线共有 4 个交点．所以③是正确的.

正确的有：①③.

故答案为：①③.

【点评】此题主要考查了角平分线的性质，有分类讨论的思想方法，又有创新意识，解题时需要注意．这是一个好题，注意变形去掉 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 又该怎样解是解决问题的关键.

三、解答题

17.【分析】由平行线的性质可得 $\angle A=\angle EBC$，由“AAS”可证 $\triangle ABD\cong\triangle BEC$，可得 $BD=EC$.

【解答】证明：$\because AD\parallel BE$

$\therefore \angle A=\angle EBC$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BEC$ 中，

$$\begin{cases}\angle D=\angle C\\ \angle A=\angle EBC,\\ AB=BE\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle BEC$（$AAS$），

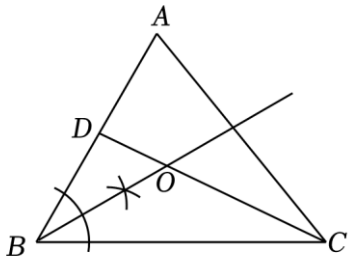
$\therefore BD=EC$.

【点评】本题考查了全等三角形的判定和性质，熟练运用全等三角形的判定是本题的关键.

18.【分析】（1）根据角平分线的作法即可作 $\angle ABC$ 的平分线 BO 交 CD 于点 O；

（2）根据内角和定理求出 $\angle ABC$，再根据角平分线定义求出 $\angle OCB$，$\angle OBC$，再利用外角的性质求解.

【解答】解：（1）如图，BO 即为所求；



（2）$\because \angle BAC=70^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，

$\therefore \angle ABC=180^\circ-70^\circ-60^\circ=50^\circ$，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，BO 平分 $\angle ABC$，

∴$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$，$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=25°$，

∴$\angle BOD=\angle OCB+\angle OBC=30°+25°=55°$．

【点评】本题考查了作图－基本作图，三角形内角和定理和外角的性质，解决本题的关键是掌握角平分线的作法．

19．【分析】已知：$AB=AE$，$BC=DE$，求证：$AC=AD$，$\angle BAC=\angle EAD$；由“SAS”可证$\triangle ABC\cong\triangle AED$，可得$AC=AD$，$\angle BAC=\angle EAD$．

【解答】解：已知：$AB=AE$，$BC=DE$，

求证：$AC=AD$，$\angle BAC=\angle EAD$，

证明：∵$AB=AE$，

∴$\angle B=\angle E$，

∵$AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=DE$，

∴$\triangle ABC\cong\triangle AED$（$SAS$），

∴$AC=AD$，$\angle BAC=\angle EAD$；

也可以（1）（3）⇒（2）（4）或（2）（3）⇒（1）（4）或（1）（4）⇒（2）（3）或（3）（4）⇒（1）（2）．证明方法类似．

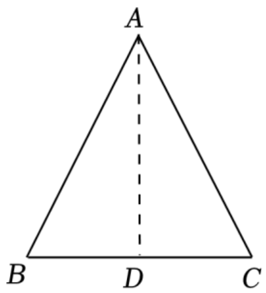
【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质：判断三角形全等的方法有“SSS”、“SAS”、“ASA”、“AAS”；全等三角形的对应角相等，对应边相等．

20．【分析】证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$（$AAS$）或$\triangle ABE\cong\triangle ACE$（$AAS$），即可得出结论．

【解答】解：能用甲、乙同学添加辅助线的方法完成证明，

甲的方法，证明如下：

如图，作$\angle BAC$的平分线交BC于点D，



则$\angle BAD=\angle CAD$，

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

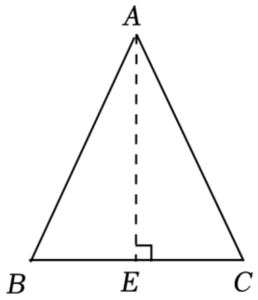
$$\begin{cases}\angle B=\angle C\\ \angle BAD=\angle CAD,\\ AD=AD\end{cases}$$

∴$\triangle ABD\cong\triangle ACD$（$AAS$），

∴$AB=AC$；

乙的方法，证明如下

如图，过A作$AE\perp BC$于点E，



则$\angle AEB=\angle AEC=90^\circ$，

在$\triangle ABE$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle C\\ \angle AEB=\angle AEC,\\ AE=AE\end{cases}$$

∴$\triangle ABE\cong\triangle ACE$（$AAS$），

∴$AB=AC$.

【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质，正确作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

21.【分析】（1）利用SAS说明$\triangle ABF\cong\triangle AEC$得结论；

（2）先利用全等三角形的性质说明$\angle AEC=\angle ABF$，再利用三角形内角和定理说明$\angle BMD=90^\circ$得结论.

【解答】证明：（1）∵$AE\perp AB$，$AF\perp AC$，

∴$\angle BAE=\angle CAF=90^\circ$.

∴$\angle BAE+\angle BAC=\angle CAF+\angle BAC$，即$\angle EAC=\angle BAF$.

在$\triangle ABF$和$\triangle AEC$中，

$$\begin{cases}AB=AE\\ \angle EAC=\angle BAF,\\ AC=AF\end{cases}$$

∴$\triangle ABF\cong\triangle AEC$（$SAS$）.

∴$EC=BF$.

（2）由（1）知：$\triangle ABF\cong\triangle AEC$，

∴$\angle AEC=\angle ABF$.

∵$AE\perp AB$，

∴$\angle BAE=90^\circ$.

∴$\angle AEC+\angle ADE=90^\circ$.

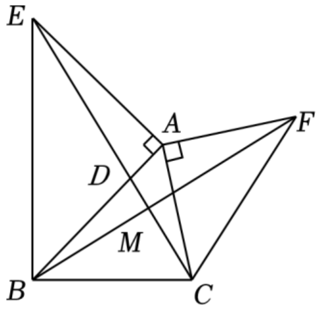
∵$\angle ADE=\angle BDM$，

∴$\angle ABF+\angle BDM=90^\circ$.

在$\triangle BDM$中，

$\angle BMD=180^\circ-\angle ABF-\angle BDM=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

∴$EC\perp BF$.



【点评】本题主要考查了全等三角形，掌握三角形内角和定理，全等三角形的性质和判定是解决本题的关键.

22.【分析】（1）此题是一道开放型的题目，答案不唯一，只要符合全等三角形的判定定理即可；

（2）连接 AO，根据全等三角形的判定定理 SSS 推出△AEO≌△ADO，根据全等三角形的性质得出∠AEO＝∠ADO，求出∠B＝∠C，再根据全等三角形的判定定理 AAS 证明即可.

【解答】（1）解：添加的条件是 AB＝AC，

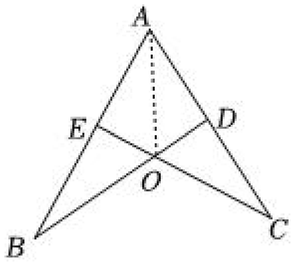
证明：在△ADB 和△AEC 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle A=\angle A, \\ AD=AE \end{cases}$$

∴△ADB≌△AEC（SAS），

故答案为：AB＝AC（答案不唯一）；

（2）证明：连接 OA，



在△AEO 和△ADO 中，

$$\begin{cases} AE=AD \\ OE=OD, \\ AO=AO \end{cases}$$

∴△AEO≌△ADO（SSS），

∴∠AEO＝∠ADO，

∵∠AEO＝∠B+∠BOE，∠ADO＝∠C+∠DOC，∠BOE＝∠DOC，

∴∠B＝∠C，

在△ADB 和△AEC 中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle C \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

∴$\triangle ADB\cong\triangle AEC$（$AAS$）.

【点评】本题考查了全等三角形的判定定理，能熟记全等三角形的判定定理是解此题的关键，全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS，两直角三角形全等还有 HL.

23.【分析】(1）根据垂直的定义得到$\angle BED=90^\circ$，根据内角和定理得到$\angle DBE=90^\circ-70^\circ=20^\circ$，根据角的和差即可得到结论;（2）根据垂直的定义得到$\angle BED=90^\circ$，根据三角形的内角和定理即可得到结论;

（3）由（2）知，$\angle BAC=180^\circ-\alpha-\beta$，$\angle AFB=90^\circ-\alpha+\beta$；根据$\angle AFB=\angle BAF$ 列方程即可得到结论.

【解答】解：(1）∵BE 是$\triangle ABD$ 中 AD 边上的高线，

∴$\angle BED=90^\circ$，

∵$\angle ABC=\angle ADB=70^\circ$，

∴$\angle DBE=90^\circ-70^\circ=20^\circ$，

∴$\angle ABF=\angle ABD-\angle DBE=140^\circ-90^\circ=50^\circ$，

故答案为：50°；

（2）∵BE 是$\triangle ABD$ 中 AD 边上的高线，

∴$\angle BED=90^\circ$，

∵$\angle ABC=\angle ADB=\alpha$，

∴$\angle DBE=90^\circ-\alpha$，

∴$\angle ABF=\angle ABD-\angle DBE=2\alpha-90^\circ$，

∵$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，

∴$\angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=180^\circ-\alpha-\beta$，

∴$\angle AFB=180^\circ-\angle ABF-\angle BAF=180^\circ-(2\alpha-90^\circ)-(180^\circ-\alpha-\beta)=90^\circ-\alpha+\beta$；

（3）由（2）知，$\angle BAC=180^\circ-\alpha-\beta$，$\angle AFB=90^\circ-\alpha+\beta$；

∵$\angle AFB=\angle BAF$，

∴$180^\circ-\alpha-\beta=90^\circ-\alpha+\beta$，

∴$\beta=45^\circ$.

【点评】本题考查了三角形的内角和定理，熟练掌握三角形的内角和定理是解题的关键.

24.【分析】(1）根据 HL 即可判断；

（2）画出图形，可知两个三角形不一定全等.

（3）结论：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$．如图③中，作 $AG\perp CB$ 交 CB 的延长线于 G，作 $DH\perp FE$ 交 FE 的延长线于 H．利用 3 次全等解决问题即可；

（4）利用（1）（3）中结论即可解决问题；

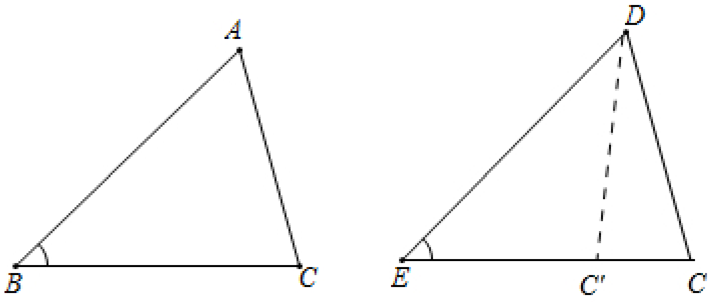
【解答】解：(1）在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle DEF$ 中，

$\begin{cases}AB=DE\\AC=DF\end{cases}$，

∴Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle DEF$（HL），

故答案为 HL.

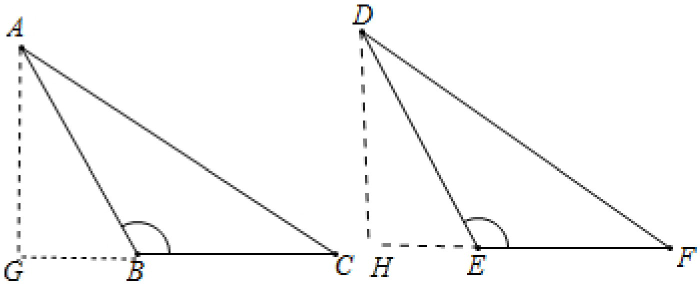
（2）如图②中，通过作图，可知$\triangle ABC$与$\triangle DEF$不一定全等.



图②

（3）结论：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

理由：如图③中，作 $AG\perp CB$ 交 CB 的延长线于 G，作 $DH\perp FE$ 交 FE 的延长线于 H.



图③

$\because \angle ABC=\angle DEF$，

$\therefore \angle ABG=\angle DEH$，

$\because \angle G=\angle H=90^\circ$，$AB=DE$，

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle DEH$，

$\therefore AG=DH$，

$\because AC=DF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACG\cong\triangle DFH$，

$\therefore \angle C=\angle F$，

$\because \angle ABC=\angle DEF$，$AB=DE$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$.

（4）由（1）（3）中的结论可知，如果两个三角形的两边分别相等且其中一组等边的对角相等，那么当这组对角是直角或钝角，

故答案为②③.

【点评】本题考查三角形综合题、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握三角形的全等的判定方法，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

25.【分析】（1）先判断出 $BD=CD$，进而得出$\triangle QDB\cong\triangle ADC$（$SAS$），得出 $BQ=AC=5$，最后用三角形

三边关系即可得出结论；

（2）由（1）知，$\triangle QDB \cong \triangle ADC$（$SAS$），得出$\angle BQD=\angle CAD$，即可得出结论；

（3）同（1）的方法得出$\triangle BDQ \cong \triangle CDA$（$SAS$），$\therefore \angle DBQ=\angle ACD$，$BQ=AC$，进而判断出$\angle ABQ=\angle EAF$，进而判断出$\triangle ABQ \cong \triangle EAF$，得出$AQ=EF$，$\angle BAQ=\angle AEF$，即可得出结论．

【解答】解：（1）延长AD到Q使得$DQ=AD$，连接BQ，

$\because AD$是$\triangle ABC$的中线，

$\therefore BD=CD$，

在$\triangle QDB$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases} BD=CD \\ \angle BDQ=\angle CDA, \\ DQ=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle QDB \cong \triangle ADC$（$SAS$），

$\therefore BQ=AC=3$，

在$\triangle ABQ$中，$AB-BQ<AQ<AB+BQ$，

$\therefore 4<AQ<10$，

$\therefore 2<AD<5$，

故答案为：$2<AD<5$；

（2）$AC \parallel BQ$，

理由：由（1）知，$\triangle QDB \cong \triangle ADC$，

$\therefore \angle BQD=\angle CAD$，

$\therefore AC \parallel BQ$；

（3）$EF=2AD$，$AD \perp EF$，

理由：如图2，延长AD到Q使得$DQ=AD$，连接BQ，

由（1）知，$\triangle BDQ \cong \triangle CDA$（$SAS$），

$\therefore \angle DBQ=\angle ACD$，$BQ=AC$，

$\because AC=AF$，

$\therefore BQ=AF$，

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，

$\therefore \angle BAC+\angle ABC+\angle DBQ=180^\circ$，

$\therefore \angle BAC+ABQ=180^\circ$，

$\because \angle BAE=\angle FAC=90^\circ$，

$\therefore \angle BAC+\angle EAF=180^\circ$，

$\therefore \angle ABQ=\angle EAF$，

在$\triangle ABQ$和$\triangle EAF$中，

$\begin{cases} AB=EA \\ \angle ABQ=\angle EAF, \\ BQ=AF \end{cases}$

∴△*ABQ*≌△*EAF*（*SAS*），

∴*AQ*＝*EF*，∠*BAQ*＝∠*AEF*，

延长 *DA* 交 *EF* 于 *P*，

∵∠*BAE*＝90°，

∴∠*BAQ*+∠*EAP*＝90°，

∴∠*AEF*+∠*EAP*＝90°，

∴∠*APE*＝90°，

∴*AD*⊥*EF*，

∵*AD*＝*DQ*，

∴*AQ*＝2*AD*，

∵*AQ*＝*EF*，

∴*EF*＝2*AD*，

即：*EF*＝2*AD*，*AD*⊥*EF*.

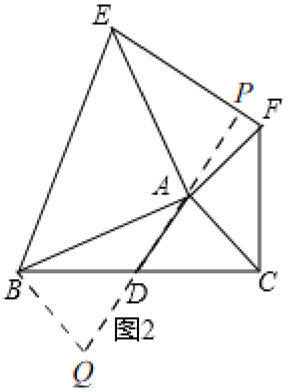


图2

【点评】本题是三角形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质，倍长中线法，三角形三边关系，正确地作出辅助线，构造全等三角形是解本题的关键.