# 2023北京人大附中初三9月月考

# 数　学

## 一、选择题（本题共24分，每小题3分）

1. 一元二次方程$4x^2+1=6x$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（　）

A. 4，1，6　　B. 4，6，1　　C. $4,-6,1$　　D. $4,-6,-1$

2. 下列*App*图标中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

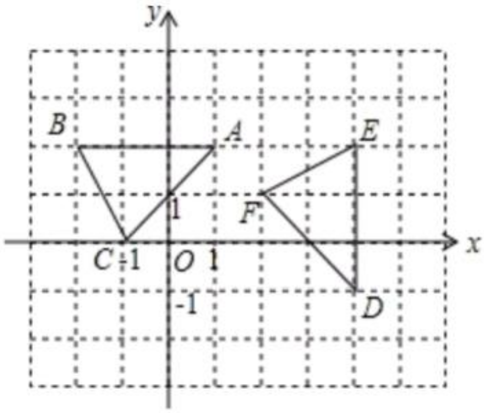
3. 用配方法解方程$x^2+4x+1=0$，下列变形正确的是（　）

A. $(x+2)^2=-5$　　B. $(x+2)^2=5$　　C. $(x+2)^2=-3$　　D. $(x+2)^2=3$

4. 近几年，手机支付用户规模增长迅速，据统计2015年手机支付用户约为3.58亿人，连续两年增长后，2017年手机支付用户达到约5.27亿人．如果设这两年手机支付用户的年平均增长率为$x$，则根据题意可以列出方程为（　）

A. $3.58(1+x)=5.27$　　B. $3.58(1+2x)=5.27$　　C. $3.58(1+x)^2=5.27$　　D. $3.58(1-x)^2=5.27$

5. 如图，$\triangle ABC$绕某点旋转，得到$\triangle DEF$，则其旋转中心的坐标是（　）

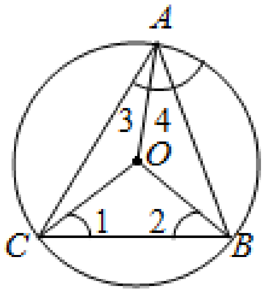



A. $(1,0)$　　B. $(1,-1)$　　C. $(0,-1)$　　D. $(0,0)$

6. 若$A\left(-\frac{1}{2},\ y_1\right)$，$B(1,\ y_2)$，$C(4,\ y_3)$三点都在二次函数$y=-(x-2)^2+k$的图象上，则$y_1$，$y_2$，$y_3$的大小关系为（　）

A. $y_1 < y_2 < y_3$　　B. $y_1 < y_3 < y_2$　　C. $y_2 < y_3 < y_1$　　D. $y_3 < y_1 < y_2$

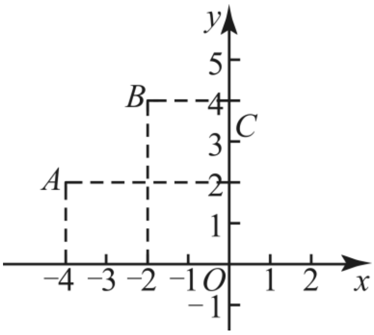
7. 如图，不等边$\triangle ABC$内接于$\odot O$，下列结论不成立的是（ ）




A. $\angle 1 = \angle 2$　　B. $\angle 1 = \angle 4$

C. $\angle AOB = 2\angle ACB$　　D. $\angle ACB = \angle 2 + \angle 3$

8. 如图，二次函数$y = ax^2 + bx + c\left(a \neq 0\right)$的图象经过点$A$，$B$，$C$．下列四个结论中，①抛物线开口向上；②当$x = -2$时，$y$取最大值；③当$m < 4$时，关于$x$的一元二次方程$cx^2 + bx + c = m$必有两个不相等的实数根；④直线$y = kx + c$经过点$A$，$C$，当$kx + c < ax^2 + bx + c$时，$x$的取值范围是$-4 < x < 0$．所有正确结论的序号是（　）

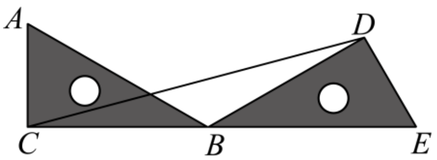



A. ③④　　B. ②③　　C. ②④　　D. ①②③④

## 二、填空题（本题共 24 分，每题 3 分）

9. 点$P\left(2, -1\right)$关于原点对称的点$P'$的坐标是________.

10. 如图，将一个含$30°$角的直角三角板$\triangle ABC$绕点$B$顺时针旋转$\alpha\left(0° < \alpha < 180°\right)$后与另一个直角三角板$\triangle EBD$完全重合，且点$C$，$B$，$E$在一条直线上，则$\alpha =$________.




11. 将抛物线$y=（x+1）^2-2$向上平移$a$个单位后得到的抛物线恰好与$x$轴有一个交点，则$a$的值为_____.

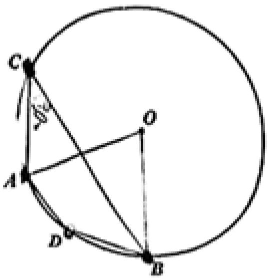
12. 若关于$x$的方程$x^2 - 4x + k - 1 = 0$有两个不相等的实数根，则$k$的取值范围是_____.

13. 已知二次函数$y = ax^2 + bx + c$中的$x$和$y$满足下表：

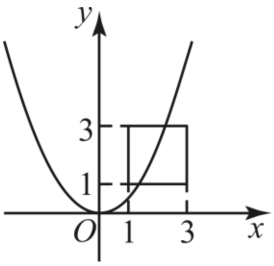
| $x$ | … | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | 15 | 10 | 7 | 6 | 7 | … |

根据表中信息推断，方程 $ax^2+bx+c=10$ 的根为________.

14. 如图，$A$，$B$，$C$，$D$ 四点都在 $\odot O$ 上．已知 $\angle AOB=70°$，则 $\angle ADB=$________.




15. 如图，正方形的四个顶点坐标分别为 $(1,1)$，$(1,3)$，$(3,1)$，$(3,3)$．若抛物线 $y=ax^2$ 与正方形有两个公共点，则 $a$ 的取值范围是________.




16. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，线段 $AB=4$，点 $M$，$N$ 在线段 $AB$ 上，且 $MN=2$，$P$ 为 $MN$ 的中点，如果任取一点 $Q$，将点 $Q$ 绕点 $P$ 顺时针旋转 $180°$ 得到点 $Q'$，则称点 $Q'$ 为点 $Q$ 关于线段 $AB$ 的“旋平点”．$\odot O$ 的半径为 4，点 $A$，$B$ 在 $\odot O$ 上，点 $Q(1,0)$，如果在直线 $x=m$ 上存在点 $Q$ 关于线段 $AB$ 的“旋平点”，则 $m$ 的最大值是________.

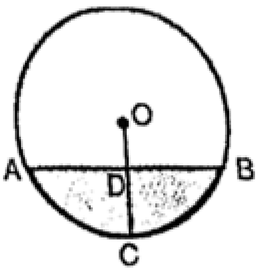
**三、解答题（本题共 52 分，第 17、21 题，每题 8 分；第 18、20 题，每题 5 分；第 19、22 题，每题 4 分；第 23-25 题，每题 6 分）**

17. 解方程：

（1）$x^2+2x=8$；

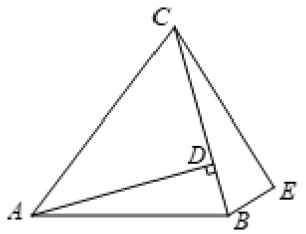
（2）$x^2+x-1=0$.

18. 如图，圆形油槽装入油后，油深 $CD$ 为 $16\text{cm}$，油面宽度 $AB$ 为 $48\text{cm}$，求圆形油槽的直径.

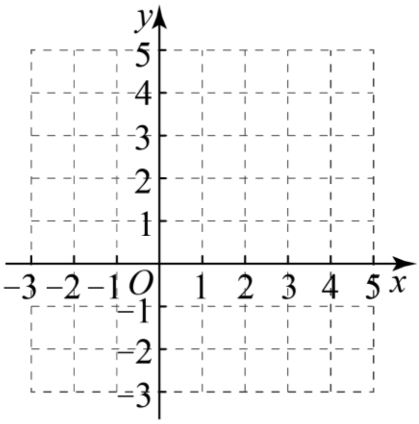



19. 已知 $a$ 是方程 $x^2-x-9=0$ 的一个根，求 $(a-1)^2+(a+3)(a-3)$ 的值.

20. 如图，等腰三角形 ABC 中，BA=BC，∠ABC=α. 作 AD⊥BC 于点 D，将线段 BD 绕着点 B 顺时针旋转角 α 后得到线段 BE，连接 CE. 求证：BE⊥CE.




21. 已知二次函数 $y=x^2-4x+2$，它的图象顶点为 A，并且与 $y$ 轴交于点 $B$.



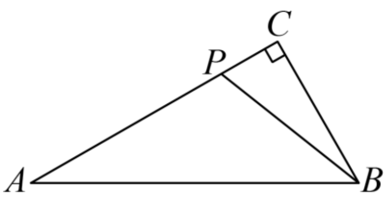

（1）直接写出 $A,B$ 的坐标.

（2）画出这个二次函数的图象.

（3）当 $0<x<3$ 时，结合图象，直接写出函数值 $y$ 的取值范围.

（4）若直线 $y=kx+b$ 也经过 $A,B$ 两点，直接写出关于 $x$ 的不等式 $kx+b<x^2-4x+2$ 的解集.

22. 如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°,\angle A=30°,BC=5$，点 $P$ 是 $AC$ 边上的一个动点，将线段 $BP$ 绕点 $B$ 顺时针旋转 $60°$ 得到线段 $BQ$，连接 $CQ$.




（1）请补全图形；

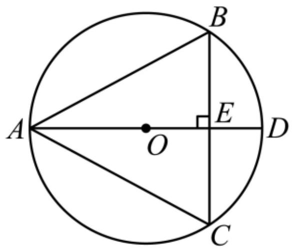
（2）直接写出在点 $P$ 运动过程中，线段 $CQ$ 的最大值为______，线段 $CQ$ 的最小值为______.

23. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-4x-m(m+4)=0$.

（1）求证：该方程总有两个实数根；

（2）若方程的一个根是另一个根的 3 倍，求 $m$ 的值.

24. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，直径 $AD=4$，$AD\perp BC$ 于点 $E$.

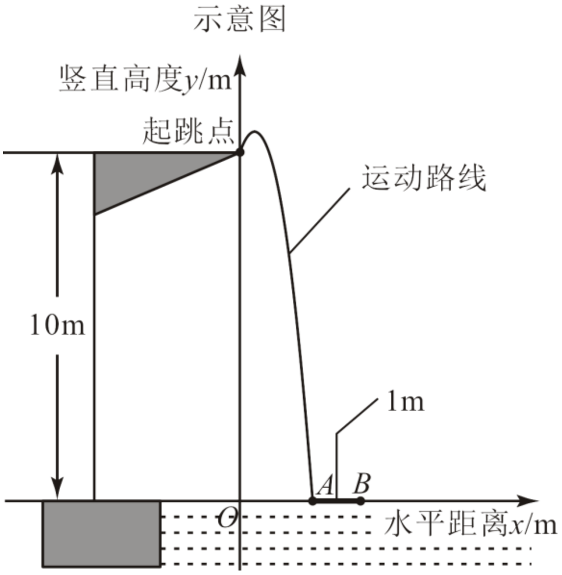



（1）求证：$\angle BAD=\angle CAD$；

（2）连接$BO$并延长，交$AC$于点$F$，交$\odot O$于点$G$，连接$GC$，$OE=1$，若点$F$恰为$AC$中点，补全图形并求$GC$的长．

25. 2023 年 4 月 16 日，世界泳联跳水世界杯首站比赛在西安圆满落幕，中国队共收获 9 金 2 银，位列奖牌榜第一．赛场上运动员优美的翻腾、漂亮的入水令人赞叹不已．在 10 米跳台跳水训练时，运动员起跳后在空中的运动路线可以看作是抛物线的一部分．建立如图所示的平面直角坐标系，从起跳到入水的过程中，运动员的竖直高度$y$（单位：m）与水平距离$x$（单位：m）近似满足函数关系

$y=a\left(x-h\right)^2+k\left(a<0\right)$.




某跳水运动员进行了两次训练．

（1）第一次训练时，该运动员的水平距离$x$与竖直高度$y$的几组数据如下：

| 水平距离 $x$ / m | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.6 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 竖直高度 $y$ / m | 10.00 | 10.45 | 10.60 | 10.45 | 10.00 | 5.20 | 1.00 |

①根据上述数据，直接写出该运动员竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系

$y=a\left(x-h\right)^2+k\left(a<0\right)$；

②运动员必须在距水面5m前完成规定的翻腾动作并调整好入水姿势，否则就会出现失误．在这次训练中，测得运动员在空中调整好入水姿势时，水平距离为1.6m，判断此次跳水会不会出现失误，并说明理由；

（2）第二次训练时，该运动员的竖直高度$y$与水平距离$x$近似满足函数关系

$y=-4.16(x-0.38)^2+10.60$．如图，记该运动员第一次训练的入水点为 $A$，若运动员在区域 $AB$ 内（含 $A$，$B$）入水能达到压水花的要求，则第二次训练__________达到要求（填“能”或“不能”）.

## 四.附加题（本题 10 分）

26. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $L: y=x^2-4mx+2m^2-1$ 的顶点为 $D$．

（1）求点 $D$ 的坐标（用含 $m$ 的代数式表示）;

（2）将抛物线 $L$ 沿直线 $y=1$ 翻折，得到的新抛物线顶点为 $C$，若 $m>0$，$CD=8$，求 $m$ 的值;

（3）已知 $A(k,-2)$，$B\left(-1,\dfrac{k}{2}-\dfrac{3}{2}\right)(k\neq-1)$，在（2）的条件下，当线段 $AB$ 与抛物线 $L$ 恰有一个公共点时，直接写出 $k$ 的取值范围.

# 参考答案

## 一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）

1.【答案】C

【分析】先把方程化为一元二次方程的一般形式，再根据一般形式解答即可．

【详解】解：$\because 4x^2+1=6x$，

$\therefore 4x^2-6x+1=0$，

$\therefore$一元二次方程$4x^2-6x+1=0$的二次项系数，一次项系数，常数项分别是 4，$-6$，1．

故选：C．

【点睛】本题考查了一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0$（$a$，$b$，$c$ 是常数且$a\neq 0$）特别要注意$a\neq 0$的条件．这是在做题过程中容易忽视的知识点．在一般形式中$ax^2$叫二次项，$bx$叫一次项，$c$ 是常数项．其中 $a$，$b$，$c$ 分别叫二次项系数，一次项系数，常数项．

2.【答案】B

【分析】根据中心对称图形和轴对称图形的定义即可得．

【详解】A、不是中心对称图形，但是是轴对称图形，此项不符合题意；

B、既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，此项符合题意；

C、不是中心对称图形，但是是轴对称图形，此项不符合题意；

D、是中心对称图形，但不是轴对称图形，此项不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查了中心对称图形和轴对称图形的定义，熟记定义是解题关键．

3.【答案】D

【分析】在本题中，把常数项 1 移项后，应该在左右两边同时加上一次项系数 4 的一半的平方．

【详解】把方程$x^2+4x+1=0$的常数项移到等号的右边，得到：$x^2+4x=-1$，

方程两边同时加上一次项系数一半的平方，得到：$x^2+4x+4=-1+4$，

配方得：$(x+2)^2=3$，

故选 D．

【点睛】本题考查了解一元二次方程－配方法．配方法的一般步骤：

（1）把常数项移到等号的右边；

（2）把二次项的系数化为 1；

（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方；

选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

4.【答案】C

【分析】如果设这两年手机支付用户的年平均增长率为 $x$，那么 2016 年手机支付用户约为 3.58（$1+x$）亿人，2017 年手机支付用户约为 3.58（$1+x$）$^2$亿人，而 2017 年手机支付用户达到约 5.27 亿人，根据 2017 年

手机支付用户的人数不变，列出方程．

【详解】解：设这两年手机支付用户的年平均增长率为 $x$，依题意，得

3.58（1+$x$）$^{2}$=5.27．

故选：C．

【点睛】本题考查的是由实际问题抽象出一元二次方程-平均增长率问题．解决这类问题所用的等量关系一般是：增长前的量×（1+平均增长率）$^{增长的次数}$=增长后的量．

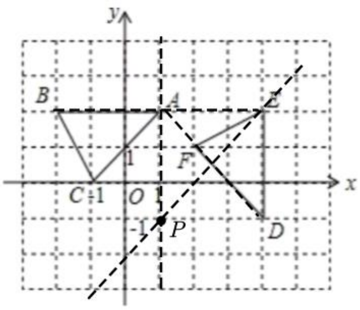
5.【答案】B

【分析】先根据旋转的性质得出点A的对应点为点 $D$，点 $B$ 的对应点为点 $E$，连接 $BE$、$AD$，作线段 $BE$、$AD$ 的垂直平分线，它们的交点为 $P(1,-1)$，即可得到答案．

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 绕某点旋转，得到 $\triangle DEF$，

∴点A的对应点为点 $D$，点 $B$ 的对应点为点 $E$，

如图，连接 $BE$、$AD$，作线段 $BE$、$AD$ 的垂直平分线，它们的交点为 $P(1,-1)$，




，

∴旋转中心的坐标是 $(1,-1)$，

故选：B．

【点睛】本题考查了旋转的性质、找旋转中心，熟练掌握以上知识点，采用数形结合的思想是解此题的关键．

6.【答案】B

【分析】根据抛物线的解析式可得二次函数的开口向下，对称轴为直线 $x=2$，再由 $x=-\frac{1}{2}$，$x=1$，$x=4$ 离对称轴 $x=2$ 的远近即可得到答案．

【详解】解：∵二次函数 $y=-(x-2)^2+k$，

∴ $a=-1<0$，二次函数的开口向下，对称轴为直线 $x=2$，

由 $x=-\frac{1}{2}$，$x=1$，$x=4$ 离对称轴 $x=2$ 的远近可得 $y_1<y_3$，$y_3<y_2$，

∴ $y_1<y_3<y_2$，

故选：B．

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质是解此题的关键．

7.【答案】B

【分析】利用 OB=OC 可对 A 选项的结论进行判断；由于 AB≠BC，则∠BOC≠∠AOB，而∠BOC=180°-2∠1，∠AOB=180°-2∠4，则∠1≠∠4，于是可对 B 选项的结论进行判断；根据圆周角定理可对 C 选项的结论进行判断；利用∠OCA=∠3，∠1=∠2 可对 D 选项的结论进行判断.

【详解】解：∵OB=OC，

∴∠1=∠2，所以 A 选项的结论成立；

∵OA=OB，

∴∠4=∠OBA，

∴∠AOB=180°-∠4-∠OBA=180°-2∠4，

∵△ABC 为不等边三角形，

∴AB≠BC，

∴∠BOC≠∠AOB，

而∠BOC=180°-∠1-∠2=180°-2∠1，

∴∠1≠∠4，所以 B 选项的结论不成立；

∵∠AOB 与∠ACB 都对弧 AB，

∴∠AOB=2∠ACB，所以 C 选项的结论成立；

∵OA=OC，

∴∠OCA=∠3，

∴∠ACB=∠1+∠OCA=∠2+∠3，所以 D 选项的结论成立.

故选：B.

【点睛】本题考查了三角形的外接圆与外心：三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心．也考查了圆周角定理和等腰三角形的性质.

8.【答案】A

【分析】结合函数图象，利用二次函数的对称性，恰当使用排除法，以及根据函数图象与不等式的关系可以得出正确答案.

【详解】解：①由图象可知，抛物线的开口向下，故①错误，不符合题意；

②若当 $x=-2$ 时，$y$ 取最大值，则由于点 A 和点 $C$ 到直线 $x=-2$ 的距离相等，这两点的纵坐标应该相等，但由图可得点 A 和点 $C$ 的纵坐标不相等，故②错误，不符合题意；

③当 $x=-2$ 时，$y=4$，而点 $B$ 不是抛物线的顶点，则当 $m<4$ 时，抛物线与直线 $y=m$ 有两个交点，即关于 $x$ 的一元二次方程 $cx^2+bx+c=m$ 必有两个不相等的实数根，故③正确，符合题意；

④∵直线 $y=kx+c$ 经过点 $A$，$C$，

∴由图象可得当 $kx+c<ax^2+bx+c$ 时，$x$ 的取值范围是 $-4<x<0$，故④正确，符合题意；

综上所述，正确的是③④，

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质、二次函数的对称性、二次函数与一元二次方程、二次函数与

不等式的关系等知识，熟练掌握以上知识点，采用数形结合的思想是解此题的关键．

## 二、填空题（本题共 24 分，每题 3 分）

9.【答案】$\left(-2,1\right)$

【分析】点关于原点对称点的特点是横纵坐标变为原来的点的相反数，由此即可求解．

【详解】解：点 $P\left(2,-1\right)$ 关于原点对称的点 $P'$ 的坐标是 $\left(-2,1\right)$，

故答案为：$\left(-2,1\right)$．

【点睛】本题主要考查点关于原点对称点的特点，掌握关于原点对称点的特点是解题的关键．

10.【答案】$150°$ ##150 度

【分析】由旋转的性质可得 $\angle ABC=\angle DBE=30°$，再由邻补角进行计算即可得到答案．

【详解】解：$\because$ 将一个含 $30°$ 角的直角三角板 $\triangle ABC$ 绕点 $B$ 顺时针旋转 $\alpha\left(0°<\alpha<180°\right)$ 后与另一个直角三角板 $\triangle EBD$ 完全重合，且点 $C$，$B$，$E$ 在一条直线上，

$\therefore \angle ABC=\angle DBE=30°$，

$\therefore \angle CBD=180°-\angle DBE=180°-30°=150°$，即 $\alpha=150°$，

故答案为：$150°$．

【点睛】本题考查了旋转的性质和邻补角的定义，根据题意得出 $\angle ABC=\angle DBE=30°$ 是解此题的关键．

11.【答案】2

【分析】根据“上加下减，左加右减”的规律写出平移后抛物线的解析式，由新抛物线恰好与 x 轴有一个交点得到△=0，由此求得 a 的值．

【详解】抛物线 $y=(x+1)^2-2$ 向上平移 $a$ 个单位后得到的抛物线的解析式为 $y=(x+1)^2-2+a$，

∵新抛物线恰好与 x 轴有一个交点，

∴△=4-4（-1+a）=0，

解得 a=2

故答案为 2．

【点睛】此题考查了抛物线与 x 轴的交点坐标，二次函数图象与几何变换．由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式．

12.【答案】$k<5$

【分析】根据判别式的意义得出 $\Delta=\left(-4\right)^2-4\times1\times\left(k-1\right)>0$，解一元一次不等式即可得到答案．

【详解】解：$\because$ 关于 $x$ 的方程 $x^2-4x+k-1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=\left(-4\right)^2-4\times1\times\left(k-1\right)>0$，

解得：$k<5$，

故答案为：$k<5$．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：①$\Delta>0$，方程有两个不相等的实数根，②$\Delta=0$，方程有两个相等的实数根，③$\Delta<0$，方程没有实数根.

13.【答案】$x_1=-1$，$x_2=3$

【分析】由点$\left(0,7\right)$和点$\left(2,7\right)$可得抛物线的对称轴为直线$x=\dfrac{0+2}{2}=1$，由当$x=-1$时，$y=10$可得当$x=3$时，$y=10$，由此即可得到答案.

【详解】解：由点$\left(0,7\right)$和点$\left(2,7\right)$可得抛物线的对称轴为直线$x=\dfrac{0+2}{2}=1$，

当$x=-1$时，$y=10$，即$ax^2+bx+c=10$，

由函数的对称性，当$x=3$时，$y=10$，

$\therefore$根据表中信息推断，方程$ax^2+bx+c=10$的根为$x_1=-1$，$x_2=3$，

故答案为：$x_1=-1$，$x_2=3$.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质、根据二次函数确定相应方程的根的情况，熟练掌握以上知识点是解此题的关键.

14.【答案】$145°$##145度

【分析】由圆周角定理可得$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=35°$，由圆内接四边形的性质可得$\angle ACB+\angle ADB=180°$，进行计算即可得到答案.

【详解】解：$\because \angle AOB=70°$，

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 70°=35°$，

$\because A$，$B$，$C$，$D$四点都在$\odot O$上，

$\therefore \angle ACB+\angle ADB=180°$，

$\therefore \angle ADB=180°-\angle ACB=180°-35°=145°$，

故答案为：$145°$.

【点睛】本题考查了圆周角定理、圆内接四边形的性质，熟练掌握同弧所对的圆周角等圆圆心角的一半以及圆内接四边形的对角互补是解此题的关键.

15.【答案】$\dfrac{1}{9}<a<3$

【分析】当抛物线经过$\left(1,3\right)$时$a=3$，当抛物线经过$\left(3,1\right)$时$a=\dfrac{1}{9}$，再结合图象即可得到答案.

【详解】解：当抛物线经过$\left(1,3\right)$时，则$a=3$，

当抛物线经过$(3,1)$时，则$1=9a$，解得$a=\dfrac{1}{9}$，

$\because$抛物线$y=ax^2$与正方形有两个公共点，

$\therefore$由图象可知：$\dfrac{1}{9}<a<3$，

故答案为：$\dfrac{1}{9}<a<3$．

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，根据图象找出临界点是解此题的关键．

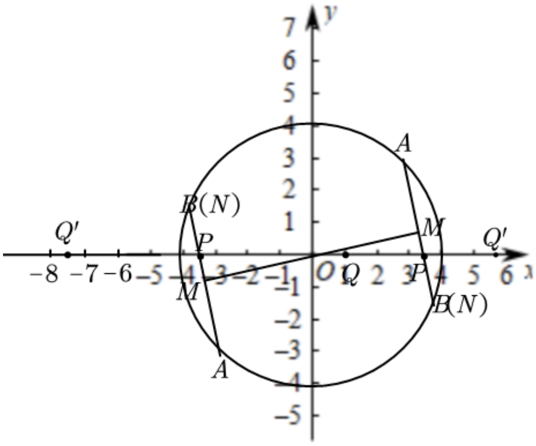
16.【答案】$2\sqrt{13}-1$

【分析】由点$Q(1,0)$在$x$轴上，可得当点$P$也在$x$轴上时，点$Q'$的横坐标有最值，由$AB$长求出弦心距长，求出$OP$的长，分两种情况求出点$Q'$的坐标，得出$m$的取值范围即可得到答案．

【详解】解：$\because$点$Q(1,0)$在$x$轴上，

$\therefore$当点$P$也在$x$轴上时，点$Q'$的横坐标有最值，

如图，作弦心距$OM$，




，

$\therefore BM=AM=\dfrac{1}{2}AB=2$，

$\because \odot O$的半径为4，

$\therefore OM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

$\because MN=2$，$P$为$MN$的中点，

$\therefore PM=1$，

$\therefore OP=\sqrt{OM^2+PM^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{13}$，

当点$P$在$x$轴负半轴时，$PQ=\sqrt{13}+1$，

$\therefore QQ'=2PQ=2\sqrt{13}+2$，

$\because 1-\left(2\sqrt{13}+2\right)=-2\sqrt{13}-1$，

$\therefore Q'\left(-2\sqrt{13}-1,0\right)$；

当点 $P$ 在 $x$ 轴正半轴时，$PQ=\sqrt{13}-1$，

$\therefore QQ'=2PQ=2\sqrt{13}-2$，

$\because 1+\left(2\sqrt{13}-2\right)=2\sqrt{13}-1$，

$\therefore Q'\left(2\sqrt{13}-1,0\right)$，

$\therefore -2\sqrt{13}-1\le m\le 2\sqrt{13}-1$，

$\therefore m$ 的最大值为 $2\sqrt{13}-1$，

故答案为：$2\sqrt{13}-1$．

【点睛】本题是圆的性质的综合运用，考查了垂径定理、坐标与图形、勾股定理等知识点，熟练掌握以上性质，采用分类讨论的思想解题，求出 $m$ 的取值范围是解此题的关键．

**三、解答题（本题共 52 分，第 17、21 题，每题 8 分；第 18、20 题，每题 5 分；第 19、22 题，每题 4 分；第 23-25 题，每题 6 分）**

17.【答案】（1）$x_1=-4$，$x_2=2$

（2）$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【分析】（1）采用因式分解法解一元二次方程即可得到答案；

（2）利用公式法解一元二次方程即可得到答案．

【小问 1 详解】

解：$\because x^2+2x=8$，

$\therefore x^2+2x-8=0$，

$\therefore (x+4)(x-2)=0$，

$\therefore x+4=0$ 或 $x-2=0$，

解得：$x_1=-4$，$x_2=2$，

$\therefore$ 原方程的解为：$x_1=-4$，$x_2=2$；

【小问 2 详解】

解：$\because x^2+x-1=0$，

$\therefore a=1$，$b=1$，$c=-1$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=1+4=5$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2\times 1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$， $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，

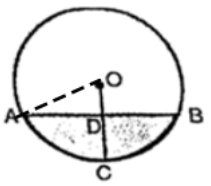
$\therefore$原方程的解为： $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$， $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$．

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程，解一元二次方程的方法有：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法，选择合适的方法解方程是解此题的关键．

18.【答案】52cm

【分析】连接$OA$，由垂径定理可得点$D$为$AB$的中点，则$AD=\dfrac{1}{2}AB=24\text{cm}$，设$OA=r\text{cm}$，则$OD=OC-CD=(r-16)\text{cm}$，由勾股定理可得$OD^2+AD^2=AO^2$，即$(r-16)^2+24^2=r^2$，求出$r$的值即可得到答案．

【详解】解：如图，连接$OA$，




，

由题意可得：$OC\perp AB$，

由垂径定理可得：点$D$为$AB$的中点，

$\because$油面宽度$AB$为$48\text{cm}$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=24\text{cm}$，

设$OA=r\text{cm}$，则$OD=OC-CD=(r-16)\text{cm}$，

由勾股定理得：$OD^2+AD^2=AO^2$，即$(r-16)^2+24^2=r^2$，

解得：$r=26$，

$\therefore OA=26\text{cm}$，

$\therefore$圆形油槽的直径为$2\times 26=52\text{cm}$．

【点睛】本题考查了垂径定理、勾股定理，熟练掌握以上知识点，添加适当的辅助线，构造直角三角形是解此题的关键．

19.【答案】10

【分析】将$x=a$代入方程，得到$a^2-a=9$，然后整体代入即可．

【详解】解：$\because a$是方程$x^2-x-9=0$的一个实数根，

$\therefore a^2-a-9=0$，

$\therefore a^2-a=9$

$\therefore$原式$=a^2-2a+1+a^2-9$

$=2a^2-2a-8$

$=2(a^2-a)-8$

$=2\times9-8$

$=10$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解的含义，解题的关键是根据方程的解的含义，将解代入原方程，从而求得代数式的解.

20.【答案】证明见解析.

【分析】由线段 BD 绕点 B 顺时针旋转角 α 得到线段 BE，

可得 $BD=BE$，$\angle ABC=\angle DBE.=$ α

然后证明△ABD 与△CBE 全等，

可得 $\angle ADB=\angle CEB=90°$.

所以 $BE\perp CE$.

【详解】证明：∵线段 BD 绕点 B 顺时针旋转角 α 得到线段 BE，

$\therefore BD=BE,\angle DBE=\alpha$.

$\because \angle ABC=\alpha$,

$\therefore \angle ABC=\angle DBE$.

$\because AD\perp BC$,

$\therefore \angle ADB=90°$.

在△ABD 与△CBE 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABD=\angle CBE,\\ BD=BE,\end{cases}$

∴△ABD≌△CBE.

$\therefore \angle ADB=\angle CEB=90°$.

$\therefore BE\perp CE$.

【点睛】本题考查了旋转的性质及三角形全等的证明.

21.【答案】（1） $A(2,-2)$， $B(0,2)$

（2）作图见详解　（3）当$0<x<3$时，函数值$y$的取值范围$-2\le y<2$

（4）当$x<0$或$x>2$时，$-2x+2<x^2-4x+2$

【分析】（1）将二次函数一般式配方为顶点式可求出顶点坐标，令$x=0$可求出与纵轴的交点，由此即可求解；

（2）根据题意分别求出二次函数与横轴的交点，顶点坐标，连线即可求解；

（3）根据自变量的取值范围求对应的函数值，由此即可求解；

（4）运用待定系数法求出直线的解析式，图形结合分析即可求解．

【小问 1 详解】

解：二次函数 $y=x^2-4x+2$ 化为顶点式得，$y=(x-2)^2-2$，

$\therefore$二次函数的顶点坐标为$\left(2,-2\right)$，

$\therefore A\left(2,-2\right)$，

$\because$二次函数 $y=x^2-4x+2$ 与 $y$ 轴交于点 $B$，

$\therefore$令 $x=0$，则 $y=2$，

$\therefore B\left(0,2\right)$．

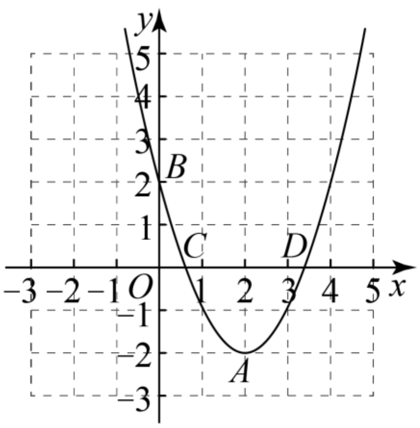
【小问 2 详解】

解：设二次函数 $y=x^2-4x+2$ 与横轴交于点 $C,D$（点 $C$ 在点 $D$ 的左边），

令 $y=0$，则 $x^2-4x+2=0$，解得，$x_1=2-\sqrt{2}$，$x_2=2+\sqrt{2}$，

$\therefore C\left(2-\sqrt{2},0\right)$，$D\left(2+\sqrt{2},0\right)$，且 $A\left(2,-2\right)$，$B\left(0,2\right)$，

$\therefore$作图如下，




【小问 3 详解】

解：二次函数 $y=x^2-4x+2$，

当 $x=0$ 时，$y=2$；当 $x=3$ 时，$y=9-12+2=-1$；

$\because$二次函数的对称轴为 $x=2$，且 $3>2$，

$\therefore$当 $x=2$ 时，$y=-2$；

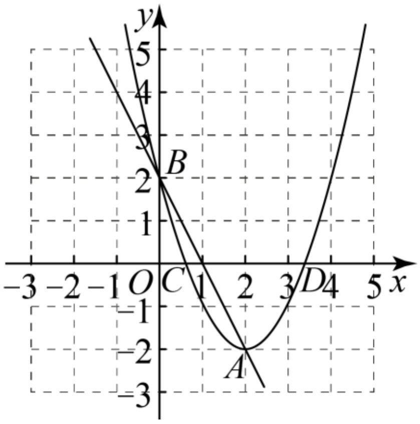
$\therefore$当 $0<x<3$ 时，函数值 $y$ 的取值范围 $-2\le y<2$．

【小问 4 详解】

解：已知 $A\left(2,-2\right)$，$B\left(0,2\right)$，直线 $y=kx+b$ 也经过 $A,B$ 两点，

$\therefore \begin{cases}2k+b=-2\\ b=2\end{cases}$，解得，$\begin{cases}k=-2\\ b=2\end{cases}$，

$\therefore$过 $A,B$ 两点的直线的解析式为 $y=-2x+2$，如图所示，




$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$-2x+2<x^2-4x+2$；当 $x>2$ 时，$-2x+2<x^2-4x+2$；

$\therefore$ 当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$-2x+2<x^2-4x+2$ .

【点睛】本题主要考查二次函数图象，一次函数图象的综合，掌握二次函数图象的性质，待定系数法求一次函数解析式，图形结合分析是解题的关键.

22.【答案】(1）作图见详解

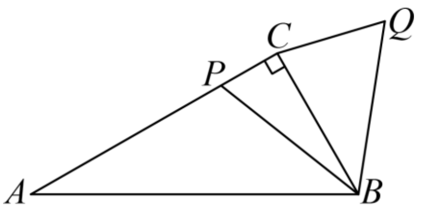
（2）5, $\frac{5}{2}$

【分析】(1）根据题意作图即可求解;

（2）如图所示，将 $\triangle ABC$ 绕点 $B$ 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'BC'$ ，可证点 $A',C,B$ 三点共线，点 $A',Q,C'$ 三点共线，点 $P$ 运动过程中，当点 $P$ 与点 A 重合时，点 $Q$ 与点 $A'$ 重合，则 $CQ=CA'$ ；当点 $P$ 与点 $C$ 重合时，点 $Q$ 与点 $C'$ 重合，则 $CQ=CC'$ ；可求出最大值，当 $CQ\perp A'C'$ 时，$CQ$ 的值最小，由此即可求解.

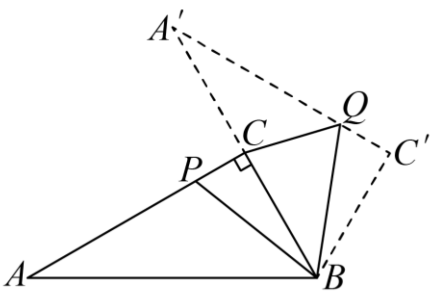
【小问 1 详解】

解：根据题意，作图如下，




【小问 2 详解】

解：如图所示，将 $\triangle ABC$ 绕点 $B$ 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'BC'$ ，




$\because$ Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°,\angle A=30°$ ，

$\therefore \angle ABC=60°$ ，

将$\triangle ABC$绕点$B$顺时针旋转$60°$得到$\triangle A'BC'$，则$BA$与$BC$重合，

$\therefore \angle A'BC' = 60°$，则点$A', C, B$三点共线，

$\because$线段$BP$绕点$B$顺时针旋转$60°$得到线段$BQ$，

$\therefore \angle PBQ = 60°$，且$\angle ABC = 60°$，即$\angle ABP + \angle PBC = \angle PBC + \angle CBQ$，

$\therefore \angle ABP = \angle A'BQ$，且$AB = A'B$，$\angle A = \angle A' = 30°$，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle A'BQ(\text{ASA})$，

$\therefore AP = A'Q$，

$\therefore$同理可得，$\triangle PBC \cong \triangle QBC'$，

$\therefore PC = QC'$，

$\therefore$点$A', Q, C'$三点共线，

$\therefore$点$P$运动过程中，当点$P$与点A重合时，点$Q$与点$A'$重合，则$CQ = CA'$；当点$P$与点$C$重合时，点$Q$与点$C'$重合，则$CQ = CC'$；

根据题意可知，$BC = 5$，

$\because \angle A = 30°$，

$\therefore AB = 2BC = 10$，

$\therefore A'C = A'B - BC = 10 - 5 = 5$，

$\therefore CQ = CA' = 5$；

根据旋转可得，$BC = BC' = 5$，且点$Q$与点$C'$重合，则$\angle PCQ = \angle CBC' = 60°$，

$\therefore \triangle CBC'(\triangle PBC')$是等边三角形，

$\therefore CQ = CB = BC' = 5$；

综上所述，线段$CQ$的最大值为5；

$\therefore$当$CQ \perp A'C'$时，$CQ$的值最小，

根据上述证明可知，$BC = 5$，

$\because \angle A = 30°$，

$\therefore AB = 2BC = 10$，

$\therefore A'C = A'B - BC = 10 - 5 = 5$，

在$\text{Rt}\triangle A'CQ$中，$CQ = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$，

$\therefore$线段$CQ$的最小值为$\frac{5}{2}$；

故答案为：$5, \frac{5}{2}$.

【点睛】本题主要考查含$30°$角的直角三角形的性质，旋转的性质，等边三角形的判定和性质，线段最大

值，最小值的计算方法，掌握以上知识是解题的关键.

23.【答案】(1) 见解析　(2) $m$ 的值为 $-3$ 或 $-1$

【分析】(1) 先计算出根的判别式的值得到 $\Delta=(2m+4)^2\geq0$，然后根据根的判别式的意义即可得到结论；

(2) 先解方程得出 $x_1=-m$，$x_2=m+4$，再分两种情况：当 $x_1=3x_2$ 时，当 $x_2=3x_1$ 时，分别列出方程，解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明：$\because\Delta=(-4)^2-4\times1\times[-m(m+4)]=16+4m^2+16m=(2m+4)^2\geq0$，

$\therefore$ 该方程总有两个实数根；

【小问 2 详解】

解：$\because x^2-4x-m(m+4)=0$，

$\therefore(x+m)[x-(m+4)]=0$，

解得：$x_1=-m$，$x_2=m+4$，

$\because$ 方程的一个根是另一个根的 3 倍，

$\therefore$ 当 $x_1=3x_2$ 时，$-m=3(m+4)$，

解得：$m=-3$；

当 $x_2=3x_1$ 时，$m+4=3\times(-m)$，

解得：$m=-1$，

综上所述，$m$ 的值为 $-3$ 或 $-1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式、解一元二次方程、解一元一次方程，熟练掌握以上知识点，采用分类讨论的思想解题，是解此题的关键.

24.【答案】(1) 证明过程见详解

(2) 补全图形见详解，$GC$ 的长为 $2$

【分析】(1) 运用垂径定理即可求解；

(2) 根据圆的基础知识，$AD$，$OB$，$OE$ 的关系可确定 $\angle OBE$ 的度数，根据含 $30^\circ$ 角的直角三角形即可求解.

【小问 1 详解】

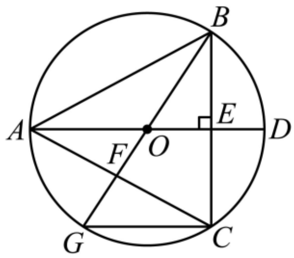
解：$\because$ 在 $\odot O$ 中，$AD$ 是直径，$AD\perp BC$，

$\therefore BE=CE$，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$.

【小问 2 详解】

解：根据题意作图如下，




∵ $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，直径 $AD=4$，$OE=1$，

∴ $OA=OB=\frac{1}{2}AD=2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$OB=2OE$，

∴ $\angle OBE=30°$，

∵连接 $BO$ 并延长，交 $\odot O$ 于点 $G$，

∴ $BG$ 是直径，即 $BG=AD=4$，

∴ $\angle BCG=90°$，且 $\angle OBE=30°$，

∴ $CG=\frac{1}{2}GB=\frac{1}{2}\times4=2$，

∴ $CG$ 的长为 $2$ .

【点睛】本题主要考查圆的基础知识，等腰三角形，含 $30°$ 角的直角三角形的性质，掌握垂径定理，等腰三角形的性质，含 $30°$ 角的直角三角形的性质是解题的关键.

25.【答案】（1）①10.60m，$y=-3.75(x-0.4)^2+10.60$；②此次跳水不会出现失误，理由见解析

（2）不能

【分析】（1）①先根据对称性求出抛物线对称轴，进而求出顶点坐标，然后利用待定系数法求出抛物线解析式，进而求出最高点的距离即可；②求出当 $x=1.6$ 时，$y$ 的值即可得到答案；

（2）分别求出两次入水点的位置即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：①由表格中的数据可知当 $x=0.2$ 时，$y=10.45$，当 $x=0.6$ 时，$y=10.45$，

∴抛物线对称轴为直线 $x=\frac{0.2+0.6}{2}=0.4$，

∴抛物线顶点坐标为 $(0.4,10.60)$，

∴抛物线解析式为 $y=a(x-0.4)^2+10.60$，

把 $x=0.2$，$y=10.45$ 代入得：$10.45=a(0.2-0.4)^2+10.60$，

解得 $a=-3.75$，

∴抛物线解析式为 $y=-3.75(x-0.4)^2+10.60$

∵抛物线开口向下，

∴该运动员竖直高度的最大值为$10.60\text{m}$；

②此次跳水不会出现失误，理由如下：

当$x=1.6$时，$y=-3.75(1.6-0.4)^2+10.60=5.2$，

∵$5.2>5$，

∴此次跳水不会出现失误；

【小问2详解】

解：在$y=-3.75(x-0.4)^2+10.60$中，当$y=0$时，则$-3.75(x-0.4)^2+10.60=0$，

解得$x\approx 2.08$或$x=-1.28$（舍去），

∴$A(2.08,0)$

在$y=-4.16(x-0.38)^2+10.60$中，当$y=0$时，则$-4.16(x-0.38)^2+10.60=0$，

解得$x\approx 1.98$或$x\approx -1.22$（舍去），

∴第二次入水的位置的水平距离为$1.98$米，

∵$1.98<2.08$，即第二次入水的位置在店$A$的左侧，

∴第二次训练不能达到要求，

故答案为：不能．

【点睛】本题主要考查了二次函数的实际应用，正确理解题意求出对应的函数关系式是解题的关键．

## 四.附加题（本题10分）

26.【答案】(1) $D(2m,-2m^2-1)$

(2) $m=1$

(3) $1\le k<3$或$k>15$

【分析】(1) 将$y=x^2-4mx+2m^2-1$化成顶点式即可得到答案；

(2) 根据题意得出点$D$到直线$y=1$的距离为4，即可得到$1-(-2m^2-1)=4$，从而即可求出$m$的值；

(3) 由(2)得：$m=1$，则抛物线$L:y=x^2-4x+1$将点$A(k,-2)$，$B\left(-1,\frac{k}{2}-\frac{3}{2}\right)$代入抛物线，此时抛物线与线段刚相交的时候，$k$在此范围内即可使得线段$AB$与抛物线$L$恰有一个公共点．

【小问1详解】

解：∵$y=x^2-4mx+2m^2-1=(x-2m)^2-2m^2-1$，

∴抛物线的顶点坐标为$D(2m,-2m^2-1)$；

【小问2详解】

解：∵抛物线$L$沿直线$y=1$翻折，得到的新抛物线顶点为$C$，$CD=8$，

∴由对称性可得，点$D$到直线$y=1$的距离为$\frac{1}{2}\times 8=4$，

$\therefore 1-\left(-2m^2-1\right)=4$，

解得： $m=\pm 1$，

$\because m>0$，

$\therefore m=1$；

【小问 3 详解】

解：由（2）得： $m=1$，

$\therefore$抛物线 $L: y=x^2-4x+1$，

当抛物线经过点 $A\left(k,-2\right)$ 时， $k^2-4k+1=-2$，

解得： $k=1$ 或 $k=3$；

当抛物线经过点 $B\left(-1,\frac{k}{2}-\frac{3}{2}\right)$ 时，$1+4+1=\frac{k}{2}-\frac{3}{2}$，

解得： $k=15$，

当 $k=1$ 时， $A\left(1,-2\right)$， $B\left(-1,-1\right)$，

设直线 $AB$ 的解析式为 $y=px+q$，

将 $A\left(1,-2\right)$， $B\left(-1,-1\right)$ 代入解析式得：$\begin{cases}p+q=-2\\-p+q=-1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}p=-\frac{1}{2}\\q=-\frac{3}{2}\end{cases}$，

$\therefore$直线 $AB$ 的解析式为： $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，

联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\\y=x^2-4x+1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{11}{4}\end{cases}$，

$\because \frac{5}{2}>1$，

$\therefore$此时线段 $AB$ 与抛物线 $L$ 恰有一个公共点，

$\therefore$线段 $AB$ 与抛物线 $L$ 恰有一个公共点时，$1\le k<3$ 或 $k>15$．

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质是解此题的关键．