顺义区 2023—2024 学年度第二学期期末质量监测

高一数学试卷

考生须知	1. 本试卷总分 150 分,考试用时 120 分钟. 2. 本试卷共 6 页,分为选择题(40 分)和非选择题(110 分)两个部分. 3. 试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效．第一部分必须用 2B 铅笔作答;第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答. 4. 考试结束后,请将答题卡交回,试卷自己保留.

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分．在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项．

(1)在复平面内,复数$-2+i$ 的共轭复数对应的点位于

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 可以是

(A)$(-2,-1)$　(B)$(-2,1)$　(C)$(1,2)$　(D)$(1,-2)$

(3)在$\triangle ABC$ 中,已知 $\sin B=\frac{3}{5}$,$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,则 $b=$

(A)$\frac{8}{5}$　(B)$\frac{6\sqrt{3}}{5}$　(C)$\frac{6}{5}$　(D)$\frac{8\sqrt{3}}{5}$

(4)已知 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=-3$,则 $\tan\alpha$ 的值为

(A)-2　B)2　(C)-1　(D)$-\frac{1}{2}$

(5)以一个等腰直角三角形的直角边所在直线为轴,其余两边旋转一周形成的面围成一个几何体,若该等腰直角三角形的直角边长度为 2,则该几何体的体积为

(A)$\frac{8\pi}{3}$　(B)8π　(C)$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$　(D)$\frac{4\pi}{3}$

(6)已知直线 m,n,l 与平面 α,则下列四个命题中正确的是

(A)若 $m\perp\alpha,m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$　(B)若 $m\perp n,n/\!/\alpha$,则 $m\perp\alpha$

(C)若 $m\perp l,n\perp l$,则 $m/\!/n$　(D)若 $m/\!/n,m\perp l$,则 $n\perp l$

(7) 下列函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增的是

(A) $y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$　　(B) $y=|\sin x|$　　(C) $y=\cos 2x$　　(D) $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$

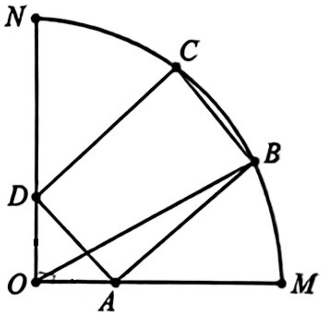
(8) 一个人骑自行车由 A 地出发向东骑行了 x km 到达 B 地，然后由 B 地向北偏西 60° 方向骑行了 $3\sqrt{3}$ km 到达 C 地，此时这个人由 A 地到 C 地位移的大小为 3km，那么 x 的值为

(A) 3　　(B) 6　　(C) 3 或 6　　(D) $3\sqrt{3}$

(9) 已知 $\triangle ABC$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，满足 $|\overrightarrow{AP}|=1$.
则 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|+|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为

(A) 2　　(B) $\frac{5}{2}$　　(C) 1　　(D) $\frac{1}{2}$

(10) 如图，在扇形 OMN 中，半径 $OM=1$，圆心角 $\angle MON=\frac{\pi}{2}$，B 是 $\overset{\frown}{MN}$ 上的动点（点 B 不与 M、N 及 $\overset{\frown}{MN}$ 的中点重合），矩形 $ABCD$ 内接于扇形 OMN，且 $OA=OD$. $\angle BOM=\alpha$，设矩形 $ABCD$ 的面积 S 与 α 的关系为 $S=f(\alpha)$，则 $f(\alpha)$ 最大值为



(A) $\sqrt{2}-1$　　(B) $2-\sqrt{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分. 把答案填在答题卡上.

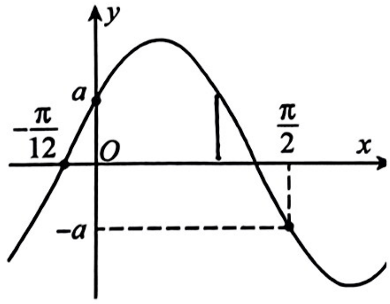
(11) 设复数 z 满足 $(3+4i)\cdot z=5i$，则 $z=$________.

(12) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$，则 $\cos C=$________.

(13) 在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，则 $|\overrightarrow{AP}|=$________，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$________.

(14) 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ (ω,φ 为常数,$\omega>0$) 的部分图象如图所示. 则 $f(\frac{5\pi}{12})=$ ________;若将函数 $f(x)$ 图象上的点 $P(0,a)$ 向右平移 $t(t>0)$ 个单位长度得到点 Q,且点 Q 仍在函数 $f(x)$ 的图象上,则 t 的最小值为________.



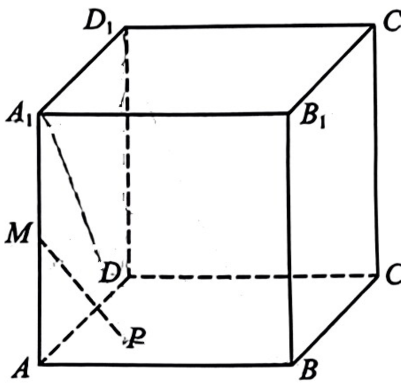
(15) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 2,且 M 为棱 AA_1 的中点,点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动,且满足 MP 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$,给出下列四个结论:

① 存在点 P 使得 $MP\perp BD_1$;

② 点 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$;

③ 三棱锥 $P-A_1BD_1$ 的体积的最小值为 $\frac{2}{3}$;

④ 线段 $|PC_1|$ 长度最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{2}$.



其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 道题,共 85 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(16) (本小题 13 分)

已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个单位向量,其夹角为 $120°$,$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

(Ⅰ) 求 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|$;

(Ⅱ) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

17)(本小题 13 分)

设函数 $f(x)=2A\sin x\cos x+2\cos^2 x(A\in\mathbf{R},A\neq 0)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定．

条件①：$f(0)=0$；

条件②：$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$；

条件③：直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴．

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间．

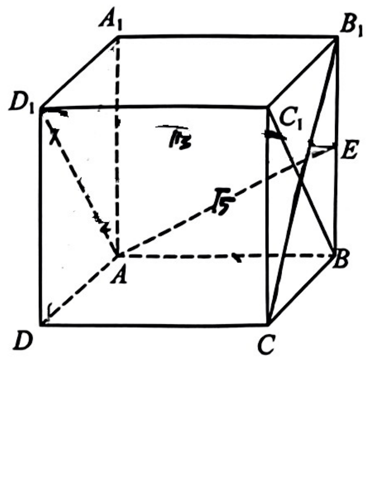
18)(本小题 14 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点．

(Ⅰ)求证：BC_1∥平面 AD_1E；

(Ⅱ)求证：$CB_1\perp$ 平面 ABC_1D_1；

(Ⅲ)写出直线 D_1E 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值(只需写出结论)．



)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$. 在 $\triangle ABC$ 中，$f(B)=f(C)$，且 $b\neq c$.

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）若 $a=5, b+c=7$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

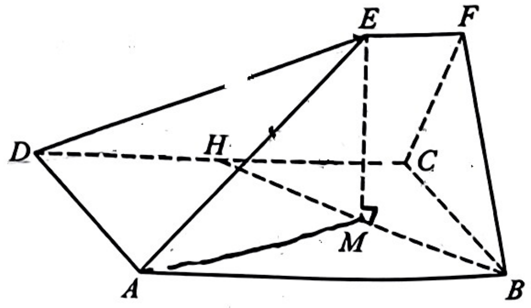
20)（本小题 15 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4, EF=1, ED=EA$，H 为 CD 的中点，M 为 BH 的中点，$EM\perp BH$，$EM=2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求证：$AB /\!/ EF$；

（Ⅱ）求证：平面 $AME\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅲ）求五面体 $ABCDEF$ 的体积.



(21)（本小题15分）

对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，$n\geqslant 2$. 定义向量集 $Y=\{\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$. 若对于任意 $\boldsymbol{a}_1\in Y$，存在 $\boldsymbol{a}_2\in Y$，使得 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$，则称 X 具有性质 P.

（Ⅰ）已知数集 $X_1=\{-1,1,2\}$，请写出数集 X_1 对应的向量集 Y_1，并说明 X_1 是否具有性质 P？

（Ⅱ）若 $x>2$，且 $X_2=\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 P，求 x 的值；

（Ⅲ）若 X 具有性质 P，求证：$1\in X$，且当 $x_n>1$ 时，$x_1=1$.

顺义区 2023—2024 学年度第二学期期末质量检测

高一数学试卷答案

一、选择题

1-5 CDCBA

6-10 DBCAA

二、填空题

11、$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$　12、$\frac{1}{4}$　13、2；-3　14、0；$\frac{\pi}{3}$　15、①②③

三、解答题

16． 参考答案与评分标准：

解（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个单位向量，其夹角为 120°，

则 $|\boldsymbol{e}_1|=1$，$|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{2}$.--2 分

又 $\boldsymbol{a}^2=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=7$，------------------------------4 分

所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}$，------------------------------5 分

同理 $\boldsymbol{b}^2=(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2=9\boldsymbol{e}_1^2+12\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2=7$，------------------------------7 分

所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.------------------------------8 分

（Ⅱ）由题得，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=6\boldsymbol{e}_1^2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_2^2=\frac{7}{2}$. ------------10 分

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{2}$.------------------------------12 分

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.----------------------13 分

17．参考答案与评分标准：

（Ⅰ）由 $f(x)=2A\sin x\cos x+2\cos^2 x\,(A\in R)$，知 $f(0)=2$ 即条件①不满足.------1 分

且有 $f(x)=A\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{A^2+1}\sin(2x+\varphi)+1$，$\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\tan\varphi=\frac{1}{A}\right)$，------------------

--4 分

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{A^2+1}+1$，---5 分

由条件②：$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$，

得 $\sqrt{A^2+1}+1=\sqrt{2}+1$，解得：$A=\pm1$. ------------------------------6 分

当 $A=1$ 时， $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$， $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+1$ 满足条件③，--------------7 分

当 $A=-1$ 时， $f(x)=-\sqrt{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})+1$， $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1$ 不满足条件③，---------------8 分

所以 $f(x)$ 满足条件②和条件③，且 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$.------------------9 分

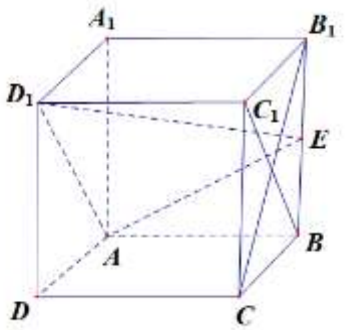
因此，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.----------------------------------10 分

（Ⅱ）由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得到 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$ ----------------------11 分

$\because x\in[0,\pi]$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{8}\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{8},\pi\right]$-----13 分

18. 参考答案及评分标准:

解:（Ⅰ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,



因为 $AB // C_1D_1$，且 $AB=C_1D_1$， ....2 分

所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形.

所以 $BC_1 // AD_1$ ....4 分

又 $BC_1\not\subset$ 平面 AD_1E，

$AD_1\subset$ 平面 AD_1E

所以 $BC_1 //$ 平面 AD_1E . ...5 分

（Ⅱ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

四边形 CBB_1C_1 为正方形

所以 $CB_1\perp BC_1$ ....6 分

$AB\perp$ 平面 CBB_1C_1

$CB_1\subset$ 平面 CBB_1C_1

所以 $AB\perp CB_1$ ....8 分

$AB\cap BC_1=B$ ....9 分

$CB_1\perp$平面 ABC_1D_1; ....10 分

（III）$\frac{2}{3}$ ....13 分

19. 参考答案及评分标准：

解（Ⅰ）由 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ 得：

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

所以$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ---3 分

因为 $f(B)=f(C)$，所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$ -------------4 分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，$C+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，---5 分

又∵ $b\neq c$，∴ $B\neq C$，所以 $B+\frac{\pi}{6}+C+\frac{\pi}{6}=\pi$，解得：$B+C=\frac{2\pi}{3}$. ---------7 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.--8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，又因为 $a=5$，$b+c=7$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，-----10 分

所以 $25=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=49-3bc$，解得：$bc=8$，-------------13 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. -------------------15 分

20. 参考答案及评分标准

解：(I) 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AB//CD$ ....1 分

又 $AB\not\subset$ 平面$CDEF$, $CD\subset$ 平面$CDEF$，

所以 $AB//$平面$CDEF$. ....2 分

又平面 $ABFE\cap$ 平面 $CDEF=EF$，$AB\subset$ 平面$ABFE$，....................3 分

所以 $AB//EF$ . ...4 分

（II） $ED=EA$.

取 AD 的中点 N ，连接 MN，NE

因为 N 是 AD 中点， M 是 HB 中点，

所以 $MN//AB$.

又底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD\perp NM$ . ...5 分

因为 $ED=EA$，所以 $AD\perp NE$

又 $NM\cap NE=N$ ，

所以 $AD\perp$ 平面NME . ...6 分

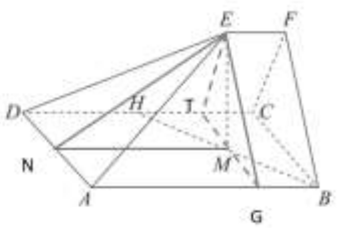
又因为 $ME\subset$ 平面NME ,所以 $AD\perp ME$.

又 $EM\perp BH$ 且 BH与AD是相交线，

所以 $ME\perp$ 平面$ABCD$ ....7 分

ME⊂平面 AME

所以 平面 AME⊥平面 ABCD;..8 分



（III） 过 M 点作 TG//BC,

因为 $AB=4, H为DC中点， M为BH中点，$

所以 $BG=HT=TC=1=EF, DT=AG=3.$

又 $AD=4$，

由（II）可知， $ME\perp$ 平面$ABCD$，

四棱锥 E-ADTG 体积 $V_{E-ADTG}=\frac{1}{3}Sh$ ....9 分

$=\frac{1}{3}\times 4\times 3\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ ....10 分

因为 EF//GB,EF//TC 且 EF=GB=TC，

所以四边形 EFTC 为平行四边形， ....11 分

四边形 EFGB 也是平行四边形 .

所以 ET//FC.

ET⊄ 平面 BCF FC⊂ 平面 BCF

所以 ET//平面 BCF

同理 EG//平面 BCF

ET,EG⊂ 平面 ENG

ET∩EG=E

所以平面 ETG//平面 BCF

所以五面体 GBCTEF 为三棱柱 ....12 分

在三棱柱 BCF-TGE 中，BG⊥TG

$ME\perp$平面$ABCD$

GB⊂ 平面 ABCD

BG⊥ME

ME∩TG=M

BG⊥平面 ETG ....13 分

$V_{棱柱ETG-BCF}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times1=4\sqrt{3}$ ....14 分

所以五面体 ABCDEF 的体积为 $12\sqrt{3}$ ....15 分

21. 参考答案及评分标准

（1）根据向量集的定义，即可写出Y_1.在Y_1中，检验任意$\overrightarrow{a_1}\in Y$，存在$\overrightarrow{a_2}\in Y$，使得$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，即可得出答案；

（2）在Y中取$\overrightarrow{a_1}=(x,2)$，可得$\overrightarrow{a_2}=(-1,b)$或$\overrightarrow{a_2}=(b,-1)$，根据数量积的坐标公式结合条件即得；

（3）取$\vec{p}=(x_1,x_1)\in Y$，设$\vec{q}=(s,t)\in Y$，根据条件可得s、t 中一个必为-1，另一个数是 1，从而$1\in X$，然后利用反证法，即得.

【详解】（1）由已知可得，$Y_1=\{\vec{a}\mid\vec{a}=(s,t),s\in\{-1,1,2\},t\in\{-1,1,2\}\}$

$=\{(-1,-1),(-1,1),(-1,2),(1,-1),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,1),(2,2)\}$.------------------------------2 分

因为$(-1,-1)\cdot(-1,1)=0$，$(-1,-1)\cdot(1,-1)=0$，$(-1,2)\cdot(2,1)=0$，$(1,1)\cdot(1,-1)=0$，$(1,2)\cdot(2,-1)=0$，$(2,2)\cdot(-1,1)=0$，

即对任意$\overrightarrow{a_1}\in Y_1$，存在$\overrightarrow{a_2}\in Y_1$，使得$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，

所以，X_1具有性质P.--4 分

（2）因为$\{-1,1,2,x\}$具有性质P，

取$\overrightarrow{a_1}=(x,2)$，由$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，则$Y$中的$\overrightarrow{a_2}=(-1,b)$或$\overrightarrow{a_2}=(b,-1)$.

当$\overrightarrow{a_2}=(-1,b)$时，由$(x,2)\cdot(-1,b)=0$可得，$x=2b$.-----------------------------5 分

因为$b\in\{-1,1,2,x\}$，所以$b=1$或$b=2$，所以$x=2$或$x=4$.

又$x>2$，则$x=4$；--7 分

当$\overrightarrow{a_2}=(b,-1)$时，有$(x,2)\cdot(b,-1)=0$可得，$xb=2$.

因为$x>2$，所以不存在，舍去.

综上所述，$x=4$.---9 分

（3）因为数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，

取 $\vec{p}=(x_1,x_1)\in Y$，设 $\vec{q}=(s,t)\in Y$，

由 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ 得 $x_1(s+t)=0$，则 $s+t=0$，

则 s 和 t 中有一个数是 -1，

则 s 和 t 中有一个数是 1，即 $1\in X$，---11 分

假设 $x_k=1(1<k<n)$，则 $0<x_1<1<x_n$，

再取 $\vec{e}=(x_1,x_n)\in Y$，$\vec{f}=(s,t)\in Y$，则 $sx_1+tx_n=0$，

所以 s 和 t 异号，且其中一个值为 -1，

若 $s=-1$，则 $x_1=tx_n>t\geq x_1$，矛盾；

若 $t=-1$，则 $x_n=sx_1<s\leq x_n$，矛盾；

则假设 $x_k=1(1<k<n)$ 不成立，

可得当 $x_n>1$ 时，$x_1=1$.---15 分