2024 北京大兴高一（下）期末

数　　学

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(-1, 1)$，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（2）已知一组数据 3，4，4，6，6，7，8，8，则这组数据的 80%分位数是

（A）6　　（B）7

（C）7.5　　（D）8

（3）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BC_1 和直线 A_1D 所成的角为

（A）30°　　（B）45°

（C）60°　　（D）90°

（4）某人打靶时连续射击两次，下列事件中与事件“两次都没中靶”互为对立是

（A）至少一次中靶　　（B）至多一次中靶

（C） 两次都中靶　　（D）只有一次中靶

（5）某比例分配的分层随机抽样中，相关统计数据如下表．则此样本的平均数为

（A）20

（B）24

（C）25

（D）30

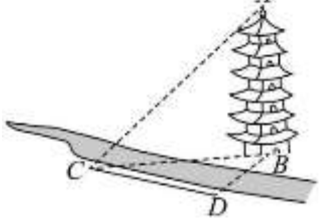
	样本量	平均数
第 1 层	20	30
第 2 层	30	20

（6）已知 α, β 是空间中两个不同的平面，m, n 是空间中两条不同的直线，$m \subset \alpha, n \subset \beta$，则“$m \perp n$”是“$\alpha \perp \beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）如图，在测量河对岸的塔高 AB 时，测量者选取了与塔底 B 在同一水平面内的两个测量基点 C 与 D，并测得 $\angle BDC = 120^\circ$，$\angle BCD = 15^\circ$，$CD = 20$，在点 C 处测得塔顶 A 的仰角为 60°，则塔高 $AB=$



（A）$20\sqrt{2}$　　（B）$20\sqrt{3}$

（C）$30\sqrt{2}$　　　　（D）$30\sqrt{3}$

（8）甲，乙，丙三人独立破译同一份密码．已知甲，乙，丙各自独立破译出密码的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，且他们是否破译出密码互不影响，则至少有 2 人破译出密码的概率是

（A）$\frac{1}{4}$　　　　（B）$\frac{7}{24}$

（C）$\frac{1}{2}$　　　　（D）$\frac{7}{12}$

（9）已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，则下列说法错误的是

（A）$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{10}$

（B）$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $(-\frac{3}{25},\frac{4}{25})$

（C）与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量的坐标为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 或 $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

（D）若向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\lambda=0$

（10）有下列说法：

①用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本，则个体 m 被抽到的概率是 $\frac{1}{10}$；

②数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的方差为 0，则所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都相同；

③ 某运动员连续进行两次飞碟射击练习，事件“两次射击都命中”的概率为 0.25；

④从 3 个红球和 2 个白球中任取两个球，记事件 $A=$“取出的两球均为红球”，事件 $B=$“取出的两个球颜色不同”，则事件 A 与 B 互斥但不对立．

则上述说法中，所有正确说法的个数为

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

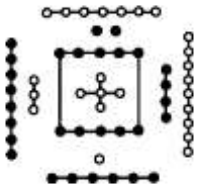
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）复数 $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$______．

（12）从鱼塘捕得同时放养的草鱼 100 尾，从中任选 5 尾，称得每尾的质量（单位：kg）分别是 1.5，1.8，1.2，1.4，1.6，估计捕得的 100 尾鱼的总质量为______kg．

（13）《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图，洛书是中国古代流传下来的两幅神秘图案．河图的排列结构如图所示，



一与六共宗居下，二与七为朋居上，

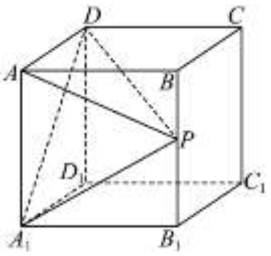
三与八同道居左，四与九为友居右，

五与十相守居中，其中白圈为阳数，黑点为阴数.

若从阳数和阴数中各取一数，则阳数大于阴数的概率为______.

（14）已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，沿 AC 将 $\triangle ABC$ 折起得到二面角 $B'-AC-D$. 当二面角 $B'-AC-D$ 为直二面角时，$B'D$ 的长为______；当三棱锥 $B'-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，二面角 $B'-AC-D$ 的度数为______.

（15）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，Q 为正方形 BB_1C_1C 内一动点（含边界），有下列命题：



①平面 A_1PD 截正方体的截面为等腰梯形；

②若 CQ // 平面 A_1PD，则直线 CQ 不可能垂直于直线 C_1Q；

③若 $D_1Q=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则点 Q 的轨迹长度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$；

④三棱锥 $A-A_1PD$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{43}{16}\pi$.

则上述命题中，所有真命题的序号为______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

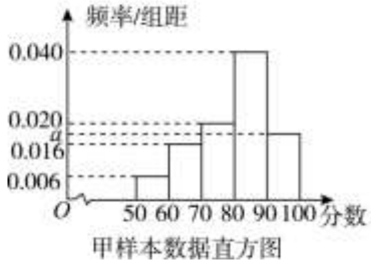
已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

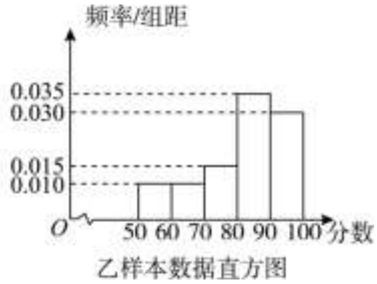
（Ⅱ）求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 夹角 θ 的余弦值.

（17）（本小题 14 分）

某学校为了解本校历史选科，物理选科学生的学业水平模拟测试数学成绩情况，从历史选科的学生中随机抽取 n 人的成绩得到样本甲，从物理选科的学生中随机抽取 60 人的成绩得到样本乙，分别得到如下频率分布直方图：



甲样本数据直方图



乙样本数据直方图

已知样本甲中数据在[80，90) 的有 20 个.

（Ⅰ）求 n 和样本甲的频率分布直方图中 a 的值；

（Ⅱ）试估计该校历史选科的学生本次模拟测试数学成绩的中位数；

（Ⅲ）设该校历史与物理选科的学生本次模拟测试数学成绩的平均值分别为 μ_1，μ_2，方差分别为 s_1^2，s_2^2，试估计 μ_1 与 μ_2，s_1^2 与 s_2^2 的大小（只需写出结论）.

（18）（本小题 14 分）

6 件产品中有 4 件一等品，2 件二等品，从中随机取出两件产品．事件 $A=$“两件产品中有一等品”，事件 $B=$“两件产品中有二等品”．

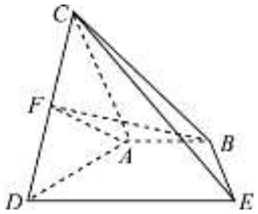
（Ⅰ）用适当的符号写出该随机试验的样本空间；

（Ⅱ）分别求事件 A，B 的概率；

（Ⅲ）判断事件 A，B 是否相互独立，并说明理由.

（19）（本小题 14 分）

如图，已知 $AB\perp$ 平面 ACD，$DE\perp$ 平面 ACD，$\triangle ACD$ 为等边三角形，$AD=DE=2AB$，F 为 CD 的中点．求证：



（Ⅰ）$AF\parallel$ 平面 BCE；

（Ⅱ）平面 $BCE\perp$ 平面 CDE.

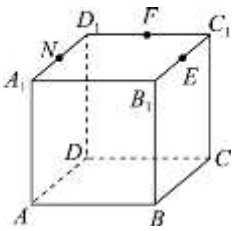
（20）（本小题 15 分）

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N，E，F 分别是 A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点.

（Ⅰ）求证：E，F，B，D 四点共面；

（Ⅱ）设平面 BNF 与平面 $ABCD$ 交于直线 l，求证：$NF\parallel l$；

（Ⅲ）求直线 A_1D_1 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值.



（21）（本小题 15 分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{3}$.

（i）再从条件①，条件②，条件③中选择一个条件作为已知，使其能够确定唯一的三角形，并求△ABC 的面积.

条件①：$a=\sqrt{6}$；条件②：$a=2c$；条件③：$\sin C=\dfrac{1}{3}$.

（ii）求△ABC 周长的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	D	A	B	D	C	B	B	C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-1-\mathrm{i}$

（12）150

（13）$\dfrac{2}{5}$

（14）$\sqrt{6}$（3 分），60° 或 120°（2 分）（只写对一个得 1 分）

（15）①③（只写对一个得 3 分，有错误序号不得分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{e}_1=(1，0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0，1)$，

以 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=(3，-2)$，　　………1 分

$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=(4，1)$　　………2 分

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times4+(-2)\times1$

$=10$，　　………4 分

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7，-1)$，　　………5 分

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7^2+(-1)^2}$

$=5\sqrt{2}$．　　………7 分

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{a}=(3，-2)$，$\boldsymbol{b}=(4，1)$

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1，-3)$，　　………1 分

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{10}$，　　………2 分

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(7，-1)\cdot(-1，-3)$

$=7\times(-1)+(-1)\times(-3)$，

$=-4$，　　………4 分

所以 $\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}$

$=\dfrac{-4}{5\sqrt{2}\times\sqrt{10}}$

$=-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$．　　………6 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）甲样本中数据在$[80, 90)$的频率为$0.040\times10=0.4$，

由$\dfrac{20}{n}=0.4$，解得$n=50$；　　………2 分

由甲样本频率分布直方图可知，$(0.006+0.016+0.020+0.040+a)\times10=1$，

解得$a=0.018$；　　………4 分

（Ⅱ）甲样本频率分布直方图中前 3 组的频率之和为

$(0.006+0.016+0.020)\times10=0.42<0.5$，　　………1 分

前 4 组的频率之和为$0.42+0.040\times10=0.82>0.5$，　　………2 分

所以甲样本数据的中位数在第 4 组，设中位数为x，　　………3 分

由$\left(x-80\right)\times0.04+0.42=0.5$，　　………5 分

解得$x=82$，所以甲样本数据的中位数为 82.　　………6 分

（Ⅲ）$\mu_1<\mu_2$，$s_1^2<s_2^2$.　　………4 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）将 4 件一等品编号为 1，2，3，4，记作m，2 件二等品编号为 5，6，记作n. 随机试验的结果可用(m, n)表示，则该随机试验的样本空间用集合表示为

Ω={（1，2），（1，3），（1，4），（1，5），（1，6），（2，3），（2，4），（2，5），（2，6），（3，4），（3，5），（3，6），（4，5），（4，6），（5，6）}.

样本空间Ω中共包含 15 个样本点.　　………3 分

（Ⅱ）$\overline{A}$={（5，6）}，事件$\overline{A}$共包含 1 个样本点，

B={（1，5），（1，6），（2，5），（2，6），（3，5），（3，6），（4，5），（4，6），（5，6）}，共包含 9 个样本点，　　………2 分

由于该随机试验的每一个结果等可能发生，　　………3 分

所以$P(\overline{A})=\dfrac{1}{15}$，

$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{14}{15}$，　　………5 分

$P(B)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.　　………7 分

（Ⅲ）因为$AB=${（1，5），（1，6），（2，5），（2，6），（3，5），（3，6），（4，5），（4，6）}，事件AB共包含 8 个样本点，

所以$P(AB)=\dfrac{8}{15}$，　　………2 分

而$P(A)P(B)=\dfrac{14}{15}\times\dfrac{3}{5}\neq P(AB)$，　　………3 分

所以事件A，B不相互独立.　　………4 分

（19）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）取 CE 的中点 G，连接 FG，BG，

因为 F 为 CD 的中点，所以 FG // DE，$FG=\frac{1}{2}DE$， ………1 分

因为 $AB\perp$ 平面 ACD， $DE\perp$ 平面 ACD，

所以 AB // DE， ………2 分

所以 FG // AB， ………3 分

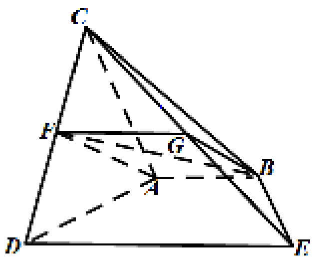
因为 $DE=2AB$， 所以 $FG=AB$，

所以四边形 $ABGF$ 为平行四边形， ………4 分

所以 AF // BG， ………5 分

因为 $AF\not\subset$ 平面 BCE， $BG\subset$ 平面 BCE，………6 分

所以 AF // 平面 BCE. ………7 分



（Ⅱ）因为 $\triangle ACD$ 为等边三角形，F 为 CD 的中点，

所以 $AF\perp CD$， ………2 分

因为 $DE\perp$ 平面 ACD， $AF\subset$ 平面 ACD，

所以 $DE\perp AF$， ………4 分

因为 $CD\cap DE=D$，

所以 $AF\perp$ 平面 CDE， ………5 分

因为 AF // BG，

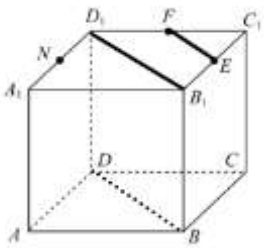
所以 $BG\perp$ 平面 CDE， ………6 分

因为 $BG\subset$ 平面 BCE，

所以平面 $BCE\perp$ 平面 CDE． ………7 分

（20）（共 15 分）

证明：（Ⅰ）连 B_1D_1，BD，



因为 E，F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点，

所以 EF 为 $\triangle B_1D_1C_1$ 的中位线，

所以 $EF \parallel B_1D_1$，　　　　·········1 分

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $DD_1 \underline{\underline{\parallel}} AA_1$，　$AA_1 \underline{\underline{\parallel}} BB_1$，

所以 $DD_1 \underline{\underline{\parallel}} BB_1$，

所以四边形 BDD_1B_1 为平行四边形，

所以 $B_1D_1 \parallel BD$，　　　　·········2 分

所以 $EF \parallel BD$，

所以 E，F，B，D 四点共面.　　　　·········4 分

（Ⅱ）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

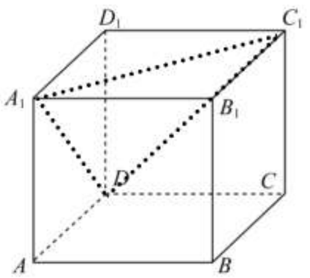
所以平面 $A_1B_1C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$，

因为平面 $BNF \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = NF$，

平面 $BNF \cap$ 平面 $ABCD = l$，　　　　·········3 分

所以 $NF \parallel l$.　　　　·········4 分

（Ⅲ）设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 a，



因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $A_1D_1 \perp$ 平面 C_1D_1D，

所以 A_1D_1 为三棱锥 $A_1-C_1D_1D$ 的高，　·········1 分

所以 $V_{D_1-A_1C_1D} = V_{A_1-C_1D_1D}$

$$= \frac{1}{3}S_{C_1D_1D} \times A_1D_1$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a$$

$$= \frac{1}{6}a^3,$$　　　　·········3 分

设 D_1 到平面 A_1C_1D 的距离为 h，

因为 $\triangle A_1C_1D$ 是等边三角形，且边长为 $\sqrt{2}a$，

所以 $S_{\triangle A_1C_1D}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

所以 $V_{D_1-A_1C_1D}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1C_1D}\times h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times h$

$=\frac{1}{6}a^3$， ·········5 分

所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所以 $\sin\theta=\frac{h}{A_1D_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$． ·········7 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，

由正弦定理得， $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$， ·········1 分

因为 $A\in(0，\pi)$，

所以 $\sin A\neq 0$， ·········2 分

所以 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$， ·········3 分

因为 $B\in(0，\pi)$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$． ·········4 分

（Ⅱ）（i）选条件②：

因为 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，$a=2c$，

由余弦定理， $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ·········1 分

所以 $4c^2+c^2-2\times 2c^2\times\frac{1}{2}=3$，

解得 $c^2=1$，

所以 $c=1$．

且 $\triangle ABC$ 唯一确定， ·········3 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ·········5 分

选条件③：

因为$B=\frac{\pi}{3}$，$\sin C=\frac{1}{3}$,

所以$\sin B>\sin C$，

所以$B>C$，

所以C为锐角，

所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，　　　　　………1 分

所以$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$,

且$\triangle ABC$唯一确定，　　　　　………2 分

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{1}{3}}$，

所以$c=\frac{2}{3}$，　　　　　………3 分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{3}}{18}$．　　　　　………5 分

（ii） 因为$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以$a^2+c^2-2ac\times\frac{1}{2}=3$，

所以$a^2+c^2-ac=3$，　　　　　………2 分

所以$(a+c)^2=3ac+3$，

因为$a>0$，$c>0$ ，

所以$ac\le(\frac{a+c}{2})^2$，

当且仅当$a=c$时，等号成立.

所以$(a+c)^2\le 3\times(\frac{a+c}{2})^2+3$，

所以$a+c\le 2\sqrt{3}$，　　　　　………4 分

当且仅当$a=c=\sqrt{3}$时，$a+c=2\sqrt{3}$，

因为$a+c>\sqrt{3}$，

所以$\sqrt{3}<a+c\le 2\sqrt{3}$，　　　　　………5 分

所以 $2\sqrt{3} < a+b+c \le 3\sqrt{3}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c \in (2\sqrt{3}，3\sqrt{3}]$．　………6 分

其他解法： 由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2$，$A+C = \dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $a+c = 2\sin A + 2\sin C$　………1 分

$= 2(\sin A + \sin C)$

$= 2[\sin A + \sin(\dfrac{2\pi}{3} - A)]$

$= 2(\sin A + \sin\dfrac{2\pi}{3}\cos A - \cos\dfrac{2\pi}{3}\sin A)$

$= 2(\dfrac{3}{2}\sin A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)$

$= 3\sin A + \sqrt{3}\cos A$

$= 2\sqrt{3}\sin(A + \dfrac{\pi}{6})$，　………3 分

因为 $0 < A < \dfrac{2\pi}{3}$ ，

即 $\dfrac{\pi}{6} < A + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $\dfrac{1}{2} < \sin(A + \dfrac{\pi}{6}) \le 1$，　………4 分

当 $A + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$，即 $A = \dfrac{\pi}{3}$ 时，$\sin(A + \dfrac{\pi}{6})$ 取得最大值 1，

所以 $\sqrt{3} < a+c \le 2\sqrt{3}$，　………5 分

所以 $2\sqrt{3} < a+b+c \le 3\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(2\sqrt{3}，3\sqrt{3}]$．　………6 分