2024 北京东城高一（下）期末

数　　学

本试卷共 9 页，共 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 30 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知复数 $z_1=3-\mathrm{i}$， $z_2=-1+2\mathrm{i}$，则在复平面内表示复数 z_1+z_2 的点位于

A.第一象限　B.第二象限　C.第三象限　D.第四象限

2. $\cos30°\cos15°-\sin30°\sin15°$ 的值为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 1

3. 从装有 2 张红色卡片和 2 张黑色卡片的盒子中任取 2 张卡片，则下列结论正确的是

A.“恰有一张黑色卡片”与“都是黑色卡片”为互斥事件

B.“至少有一张红色卡片”与“至少有一张黑色卡片”为互斥事件

C.“恰有一张红色卡片”与“都是黑色卡片”为对立事件

D.“至多有一张黑色卡片”与“都是红色卡片”为对立事件

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\angle B=$

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，下列结论中正确的是

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　B. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C. $(2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})$　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$

6. 某高校的入学面试为每位面试者准备了 3 道难度相当的题目. 每位面试者最多有三次抽题机会，若某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第 3 次为止. 若李明答对每道题目的概率都是 0.6，则他最终通过面试的概率为

A. 0.24　B. 0.6　C. 0.84　D. 0.936

7. 将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到的图象关于点 $(\varphi,0)$ 对称，

则 $|\varphi|$ 的最小值为

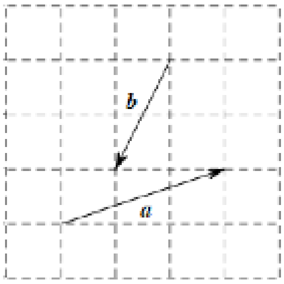
A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

8. 设 α,β 是两个不同平面， l,m 是两条不同直线，且 $m\subset\alpha$， $l\perp\alpha$，则“ $l\perp\beta$ ”是“ $m\,//\,\beta$ ”的

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

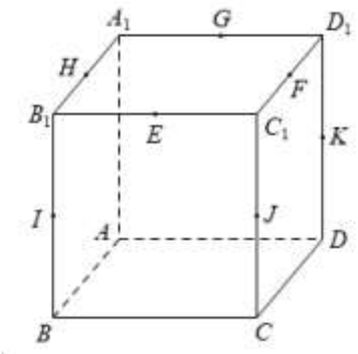
9. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，则 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$



A. $45°$　　　B. $60°$

C. $120°$　　　D. $135°$

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，其中 E,F,G,H,I,J,K 分别为棱 $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1,AA_1,BB_1,CC_1$ 的中点，那么三棱柱 B_1FJ-A_1HI 与三棱柱 B_1EJ-C_1GK 在正方体内部的公共部分的体积为



A. $\frac{1}{6}$　　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

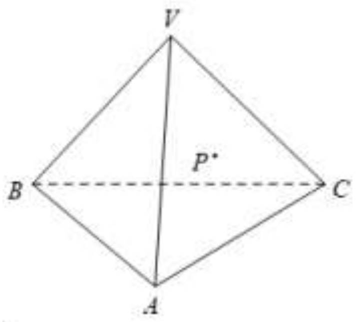
第二部分（非选择题 共 70 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 x 的值为_________.

12. 已知纯虚数 z 满足 $|z-2\mathrm{i}|=1$，则 z 可以是_________.

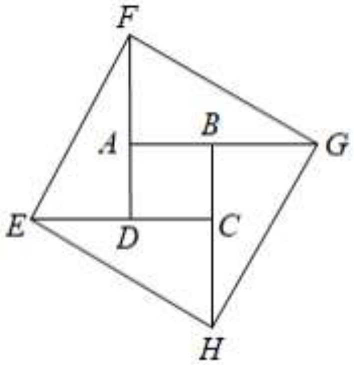
13. 一木块如图所示，所有棱长都等于 $10\mathrm{cm}$，点 P 为三角形 VAC 的中心，过点 P 将木块锯开，截面平行于直线 VB 和 AC，则截面面积为_________ cm^2.



14. 某实验室一天的温度（单位：℃）随时间 t（单位：h）的变化近似满足函数关系：

$f(t)=10-a\cos\frac{\pi}{12}t-b\sin\frac{\pi}{12}t$，$t\in[0,24]$，$a,b$ 为正实数，若 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，则该实验室这一天的最大温差为________℃；若该实验室这一天的最大温差为10℃，则 $a+b$ 的最大值为________.

15. 赵爽为《周髀算经》一书作注时介绍了“勾股圆方图”，即“赵爽弦图”. 下图是某同学绘制的赵爽弦图，其中 $AD=ED=2$，点 P,Q 分别是正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 上的动点，给出下列四个结论：



①$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=4$；

②$|\overrightarrow{EQ}|\le 2\sqrt{10}$；

③设 $\overrightarrow{FB}$ 与 $\overrightarrow{FE}$ 的夹角为 θ，则 $\tan\theta$ 的值为3；

④$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{EQ}$ 的最大值为12.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$， $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

（Ⅰ）求 $\tan(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin 2\alpha$ 的值.

17.（本小题 13 分）

某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法小组和科创小组的情况，数据如下表（单位：人）：

	参加书法小组	未参加书法小组
参加科创小组	8	4
未参加科创小组	3	30

（Ⅰ）从该班随机选 1 名同学，求该同学至少参加上述一个小组的概率；

（Ⅱ）在既参加书法小组又参加科创小组的 8 名同学中，有 5 名男同学 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5， 3 名女同学 B_1,B_2,B_3，现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，求 A_2 被选中且 B_1 未被选中的概率.

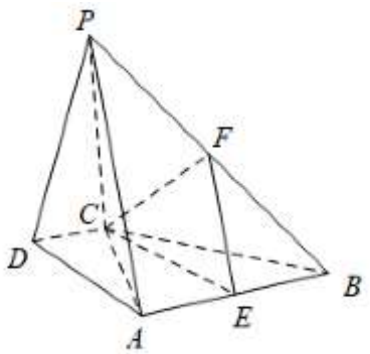
18.（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\,//\,DC$， $DC\perp AC$.

（Ⅰ）求证： $DC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

（Ⅲ）设点 E 为 AB 的中点，过点 C,E 的平面与棱 PB 交于点 F，且 $PA\,//$ 平面 CEF，求 $\dfrac{PF}{PB}$ 的值.



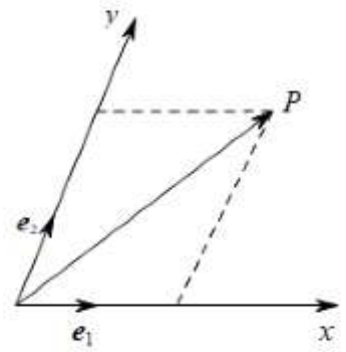
19.（本小题 15 分）

如图，设 Ox,Oy 是平面内相交成 $60°$ 角的两条数轴，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 x 轴、 y 轴正方向同向的单位向量. 若向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则把有序数对 (x,y) 叫做向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系 Oxy 中的坐标. 设 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

（Ⅰ）求 $|\overrightarrow{OP}|$ 的值；

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2$，若 $\overrightarrow{OP}\,//\,\overrightarrow{OQ}$，求实数 m 的值；

（Ⅲ）若 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$，有同学认为“$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$”的充要条件是“$x_1x_2+y_1y_2=0$”. 你认为是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请说明理由.



20.（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x\ (\omega>0)$. 从下列三个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间；

（Ⅱ）若对于任意的 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，都有 $f(x)\le c$，求实数 c 的取值范围.

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-\frac{\pi}{6},2)$；

条件②：$f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$ 上单调递增；

条件③：$x=\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅰ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分析解答，按第一个解答计分.

21.（本小题 15 分）

设 n 为正整数，集合 $A_n=\left\{\alpha \middle| \alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in(0,1),k=1,2,\cdots,n\right\}$．对于集合 A_n 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义 $\alpha*\beta=(x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2,\cdots,x_n\cdot y_n)$，$\alpha\odot\beta=(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|)$，以及 $|\alpha|=x_1+x_2+\cdots+x_n$．

（Ⅰ）若 $n=5$，$\alpha=(1,1,1,0,1)$，$\alpha*\beta=(0,1,1,0,1)$，$|\beta|=4$，求 β；

（Ⅱ）若 $n=9$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\ (k\ge 2)$ 均为 A_n 中的元素，且 $|\alpha_i|=3\ (1\le i\le k)$，$|\alpha_i*\alpha_j|=0\ (1\le i<j\le k)$，求 k 的最大值；

（Ⅲ）若 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\ (k\ge 2)$ 均为 $A_n\ (n\ge 5)$ 中的元素，其中 $|\alpha_0|=0$，$|\alpha_k|=n$，且满足 $|\alpha_i\odot\alpha_{i+1}|=n-2$ $(0\le i\le k-1)$，求 k 的最小值.

东城区 2023—2024 学年度第二学期期末统一检测

高一数学参考答案及评分标准

2024.7

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)A　　(2)B　　(3)A　　(4)B　　(5)C

(6)D　　(7)A　　(8)A　　(9)D　　(10)C

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)2　　(12)i(答案不唯一)

(13)$\frac{200}{9}$　　(14)4　$5\sqrt{2}$

(15)②③

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

故 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{7}$. …………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin 2\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{2}+2\sin\alpha\cos\alpha$,且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,

所以 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin 2\alpha=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}+2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{53}{50}$. …………………………………… 13 分

(17)(共 13 分)

解:(Ⅰ)由调查数据可知,既未参加书法小组又未参加科创小组的有 30 人,

故至少参加上述一个小组的共有 $45-30=15$(人),

所以从该班随机选 1 名同学,该同学至少参加上述一个小组的概率为 $P=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$. …… 6 分

(Ⅱ)从 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人的所有基本事件有(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_3,B_3),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(A_4,B_3),(A_5,B_1),(A_5,B_2),(A_5,B_3),共 15 个,

其中 A_2 被选中且 B_1 未被选中的有(A_2,B_2),(A_2,B_3),共 2 个,

所以 A_2 被选中且 B_1 未被选中的概率为 $P=\frac{2}{15}$. …………………………………… 13 分

(18)(共 15 分)

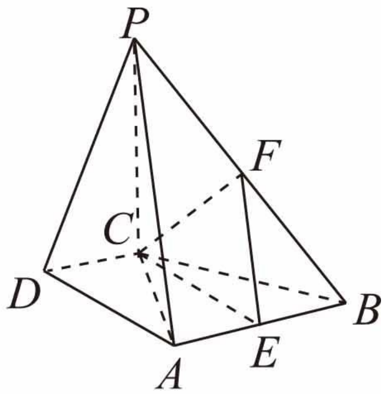
解:(Ⅰ)因为 $PC\perp$平面 $ABCD$,$DC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PC\perp DC$.

又因为 $DC\perp AC$,$PC\cap AC=C$,

所以 $DC\perp$平面 PAC. ………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $AB/\!/DC$,$DC\perp AC$,



所以 $AB\perp AC$.

因为 $PC\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PC\perp AB$.

又因为 $PC\cap AC=C$,

所以 $AB\perp$平面 PAC.

又因为 $AB\subset$平面 PAB,

所以平面 $PAB\perp$平面 PAC. ……………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)因为 $PA/\!/$平面 CEF,平面 $PAB\cap$平面 $CEF=EF$,

所以 $EF/\!/PA$.

在$\triangle PAB$ 中,点 E 为 AB 的中点,

所以点 F 为 PB 的中点.

所以$\dfrac{PF}{PB}=\dfrac{1}{2}$. …………………………………………………………………………… 15 分

(19)(共 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,

所以两边平方得$(\overrightarrow{OP})^2=(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2+9\boldsymbol{e}_2^2+12\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=13+12\times\dfrac{1}{2}=19$,

所以$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{OQ}$,所以存在唯一的实数 λ,使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OQ}$,

即 $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2)$,所以$\begin{cases}\lambda=2,\\3=\lambda m,\end{cases}$

解得 $m=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)不正确.理由如下:

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即$(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)=0$,

则有 $x_1x_2\boldsymbol{e}_1^2+y_1y_2\boldsymbol{e}_2^2+x_1y_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+x_2y_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=x_1x_2+y_1y_2+\dfrac{1}{2}x_1y_2+\dfrac{1}{2}x_2y_1=0$,

所以“$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$”的充要条件是“$x_1x_2+y_1y_2+\dfrac{1}{2}x_1y_2+\dfrac{1}{2}x_2y_1=0$”,

即“$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$”的充要条件是“$x_1x_2+y_1y_2=0$”是不正确的. ……………………… 15 分

(20)(共 14 分)

解:(Ⅰ)选条件②③.

$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$.

由条件②:$f(x)$在区间$[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$上单调递增,有$\frac{\pi}{12}-(-\frac{5\pi}{12})\leqslant\frac{T}{2}$.

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,即$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$,

所以 $0<\omega\leqslant2$. ……………………………………………………………………… (1)

由条件③:$x=\frac{\pi}{12}$是 $f(x)$的一条对称轴,有 $\sin(\frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3})=1$,即$\frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\omega=2+24k,k\in\mathbf{Z}$. ……………………………………………………………… (2)

由(1)(2)可得 $\omega=2$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$的单调递减区间为$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………… 9 分

(Ⅱ)因为 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$,所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3}]$,

所以 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}]$,$f(x)\in[-2,\sqrt{3}]$.

因为对于任意的 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$,都有 $f(x)\leqslant c$,

所以 $c\geqslant\sqrt{3}$,即 c 的取值范围为$[\sqrt{3},+\infty)$. ……………………………………………… 14 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $n=5$,所以 $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$,则 $\alpha*\beta=(y_1,y_2,y_3,0,y_5)$.

由 $\alpha*\beta=(0,1,1,0,1)$得 $y_1=0,y_2=y_3=y_5=1$,

又由$|\beta|=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=4$ 得 $y_4=1$,

所以 $\beta=(0,1,1,1,1)$. ………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{i9})$,$\alpha_j=(t_{j1},t_{j2},\cdots,t_{j9})$,其中 $t_{im},t_{jm}\in\{0,1\}$,$m=1,2,\cdots,9$.

由$|\alpha_i*\alpha_j|=t_{i1}t_{j1}+t_{i2}t_{j2}+\cdots+t_{i9}t_{j9}=0$,

得 $t_{im}t_{jm}=0,m=1,2,\cdots,9$,

即 $t_{im}=t_{jm}=0$ 或者 $t_{im}=1,t_{jm}=0$ 或者 $t_{im}=0,t_{jm}=1$,

即 t_{im},t_{jm}不能同时为 1.

由$|\alpha_i|=t_{i1}+t_{i2}+\cdots+t_{i9}=3$ 知 $t_{im}(m=1,2,\cdots,9)$有且仅有 3 个 1,其余全为 0.

当 $k\geqslant 4$ 时,$t_{im}(i=1,2,\cdots k,m=1,2,\cdots,9)$中 1 的个数为 $3k\geqslant 12$,

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中必存在 α_i,α_j,m 使得 $t_{im}=t_{jm}=1$,这与 t_{im},t_{jm}不能同时为 1 矛盾.

所以 $k\leqslant 3$.

当 $k=3$ 时,令 $\alpha_1=(1,1,1,0,0,0,0,0,0)$,$\alpha_2=(0,0,0,1,1,1,0,0,0)$,

$\alpha_3=(0,0,0,0,0,0,1,1,1)$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足条件.

所以 k 的最大值为 3. …………………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)设 $\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in})$,其中 $t_{im}\in\{0,1\}$,$m=1,2,\cdots,n$,$0\leqslant i\leqslant k$.

由 $|\alpha_0|=0$,$|\alpha_k|=n$ 知 $\alpha_0=(0,0,\cdots,0)$,$\alpha_n=(1,1,\cdots,1)$.

由 $|\alpha_i\odot\alpha_{i+1}|=|t_{i1}-t_{(i+1)1}|+|t_{i2}-t_{(i+1)2}|+\cdots+|t_{in}-t_{(i+1)n}|=n-2$,$|t_{im}-t_{(i+1)m}|=0$ 或 1,$m=1,2,\cdots,n$,

得 $|t_{im}-t_{(i+1)m}|(m=1,2,\cdots,n)$中有 $n-2$ 个 1 和 2 个 0,

即 α_i,α_{i+1} 的 n 个分量中只能有 2 个相同,其余均不相同.

当 $n\geqslant 5$ 时,若 $k=2$,从 α_0 到 α_1 保留 2 个分量不变,α_1 中有 2 个分量为 0,其余均为 1,从 α_1 到 α_2保留 2 个分量不变,必然有 0,不能变成 α_n.

当 $k=3$ 时,取 $\alpha_1=(0,0,1,1,1,\cdots,1)$,$\alpha_2=(0,1,1,0,0,\cdots,0)$,$\alpha_3=(1,1,1,1,1,\cdots,1)$即可满足条件.

综上,k 的最小值为 3. …………………………………………………………………… 15 分