2024 北京西城高一（下）期末

数　　学

本试卷共 9 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

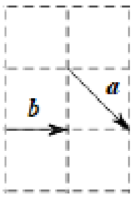
2. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,4)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$

A. -2　B. 2　C. -8　D. 8

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=3$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin A=$

A. $\dfrac{1}{5}$　B. $\dfrac{2}{5}$　C. $\dfrac{3}{5}$　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若网格中每个小正方形的边长均为 1，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$



A. -2　B. 0　C. 1　D. 2

5. 已知 α,β 是不重合的平面，m,n 是不重合的直线，下列命题中不正确的是

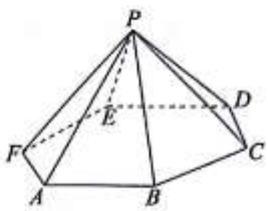
A. 若 $m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$　B. 若 $m/\!/n$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$　D. 若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$A(1,1)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围是

A. $[1,\sqrt{2}]$　B. $[0,2]$　C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　D. $[\sqrt{2},2]$

7. 如图，已知正六棱锥 $P-ABCDEF$ 的侧棱长为 6，底面边长为 3，Q 是底面上一个动点，$PQ\le 4\sqrt{2}$，则点 Q 所形成区域的面积为



A. 4π　B. 5π　C. 6π　D. 7π

8. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\cos 2x$， $f(x)$ 的图象以每秒 $\frac{\pi}{12}$ 个单位的速度向左平移， $g(x)$ 的图象以每秒 $\frac{\pi}{24}$ 个单位的速度向右平移，若平移后的两个函数图象重合，则需要的时间至少为

A. 1 秒　B. 2 秒　C. 3 秒　D. 4 秒

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ $(\omega>0)$，“存在 $m,n\in[0,\frac{\pi}{2}]$，函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=m$ 对称，又关于点 $(n,0)$ 对称”是“ $\omega\geq 2$ ”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

10. 方波是一种非正弦曲线的波形，广泛应用于数字电路、定时器、、逻辑控制、开关电源等领域. 理想方波的解析式为 $y=a+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$，而在实际应用中多采用近似方波发射信号. 如 $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x$ 就是一种近似情况，则

A.函数 $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数

B.函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$

C.函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

D.函数 $f(x)$ 的最大值不大于 2

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 若复数 $z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$_________.

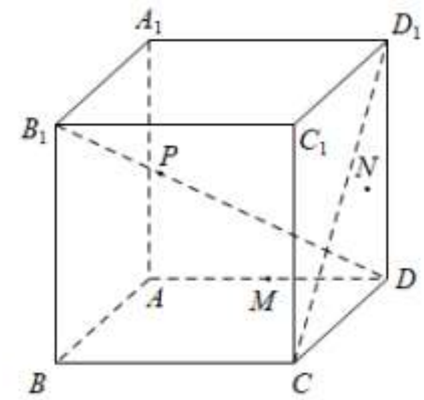
12. 已知函数 $f(x)=\cos 2x$. 若非零实数 a,b，使得 $f(x+a)=bf(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，则满足条件的一组值可以是 $a=$_________， $b=$_________..（只需写出一组）

13. 有一个木制工艺品，其形状是一个圆柱被挖去一个与其共底面的圆锥. 已知圆柱的底面半径为 3，高为 5，圆锥的高为 4，则这个木制工艺品的体积为_________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60°$， $AC=6$， $AB=4$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$_________，

$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=$_________.

15. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为 AD 的中点，点 N 是侧面 DCC_1D_1 上（包括边界）的动点，点 P 是线段 B_1D 上的动点，给出下列四个结论：



①任意点 P，都有 $CD_1 \perp MP$；

②存在点 P，使得 $B_1D \perp$ 平面 MPC；

③存在无数组点 N 和点 P，使得 C_1P // MN；

④点 P 到直线 CD_1 的距离最小值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

在平面直角坐标系中，角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $(3,4)$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 及 $\tan 2\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 $\cos 2\alpha + \sin(\alpha + \dfrac{\pi}{2})$ 的值.

17.（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是三个内角 A,B,C 的对边，$b\sin A - a\cos\dfrac{B}{2} = 0$.

（Ⅰ）求 $\angle B$ 的大小；

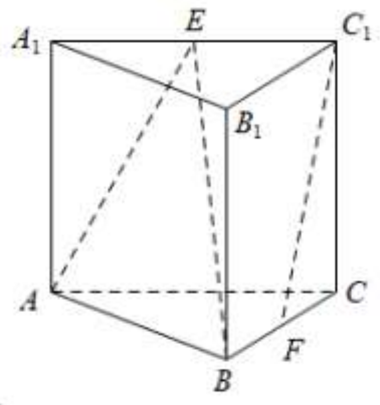
（Ⅱ）若 $c=1$，且 AB 边上的高是 BC 边上的高的 2 倍，求 b 及 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 E,F 分别为 A_1C_1, BC 的中点.

（Ⅰ）求证：FC_1 // 平面 ABE；

（Ⅱ）已知 $C_1C \perp BC$， $AB=\sqrt{3}$， $BC=1$， $A_1A=2$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得三棱柱唯一确定，并求解下列问题：



条件①：$AC_1 = A_1C$；

条件②：$C_1C \perp AC$；

条件③：$AC = 2$.

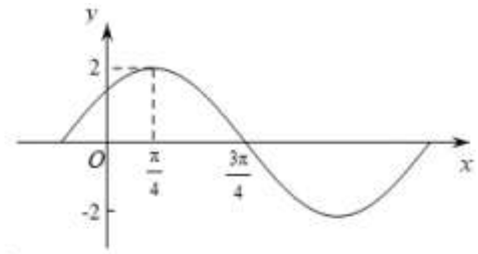
（ⅰ）求证：$AB \perp FC_1$；

（ⅱ）求三棱锥 $B_1 - AFC_1$ 的体积.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ $(\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示.



（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若函数 $g(x) = f(x)\sin x$，

（ⅰ）求函数 $g(x)$ 的单调递增区间；

（ⅱ）求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,10]$ 内的所有零点的和.

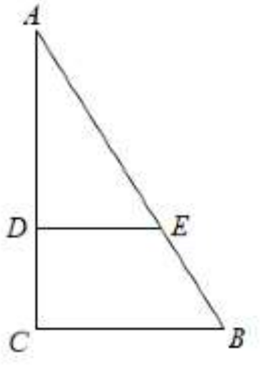
20.（本小题 15 分）

如图（1），在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=6$，D,E 分别是 AC,AB 上的点，且 $DE\,//\,BC$，$DE=2$，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1C\perp CD$，如图（2）.

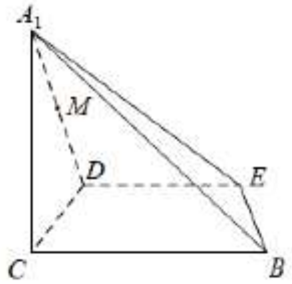
（Ⅰ）求证：$A_1C\perp$ 平面 $BCDE$；

（Ⅱ）求点 C 到平面 A_1DE 的距离；

（Ⅲ）点 M 为线段 A_1D 的中点，线段 BC 上是否存在点 P，使得 $MP\,//$ 平面 A_1BE？若存在，求出 $\dfrac{CP}{CB}$ 的值；若不存在，说明理由.



（1）



（2）

21.（本小题 15 分）

若存在实数 k 和周期函数 $h(x)$，使得 $f(x)=kx+h(x)$，则称 $f(x)$ 是好函数.

（Ⅰ）判断 $u(x)=\sin x$，$v(x)=x+x^2$ 是否是好函数，证明你的结论；

（Ⅱ）对任意实数 x，函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $g(f(x))=x$，$f(g(x))=x$. 若 $f(x)$ 是好函数，

（ⅰ）当 $f(x)=2x$ 时，求 $g(x)$；

（ⅱ）求证：$f(x)$ 不是周期函数；

（ⅲ）求证：$g(x)$ 是好函数.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

（1）D	（2）C	（3）B	（4）C	（5）A
（6）A	（7）B	（8）B	（9）B	（10）D

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）$\sqrt{2}$　　（12）$a=\pi$， $b=1$(答案不唯一)

（13）33π， 54π　　（14）12， $4\sqrt{7}$　　（15）①③④

注：第 12 题填对一空得 3 分，两空都填对得 5 分；第 13 题、第 14 题第一空 2 分，第二空 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，选对 2 个得 4 分，选对 1 个得 3 分，不选或错选得 0 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

（16）（Ⅰ）因为角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $(3,4)$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$， $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$. ……………………………4 分

所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{24}{7}$. ……………………………8 分

（Ⅱ） $\cos 2\alpha+\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})$

$=2\cos^2\alpha-1+\cos\alpha$ ……………………………12 分

$=\dfrac{8}{25}$. ……………………………13 分

（17）（Ⅰ）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$， ……………………………1 分

得 $\sin B\cdot\sin A-\sin A\cdot\cos\dfrac{B}{2}=0$. ……………………………3 分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A\neq 0$.

所以 $\sin B=\cos\dfrac{B}{2}$. ……………………………4 分

所以 $2\sin\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$. ……………………………5 分

因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $\dfrac{B}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$.

所以 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………6 分

所以 $\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………7 分

（Ⅱ）因为 AB 边上的高是 BC 边上的高的 2 倍， $c=1$，

所以 $a=2c=2$. ……………………………9 分

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=3$， ……………………………10 分

所以 $b=\sqrt{3}$. ……………………………11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………13 分

（18）（Ⅰ）设 M 为 AB 的中点，连接 ME，MF，

因为 M 为 AB 的中点，F 为 BC 的中点，

所以 $MF\,//\,AC$， $MF=\frac{1}{2}AC$. …………………… 1 分

因为 $AC\,//\,A_1C_1$， $AC=A_1C_1$， E 为 A_1C_1 的中点，

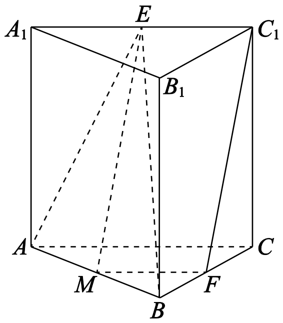
所以 $MF\,//\,EC_1$， $MF=EC_1$. …………………… 2 分

所以 $EMFC_1$ 为平行四边形，

所以 $FC_1\,//\,ME$. …………………… 3 分

又因为 $ME\subset$ 平面 ABE， $FC_1\not\subset$ 平面 ABE，

所以 $FC_1\,//$ 面 ABE. …………………… 5 分



（Ⅱ）选择②③

（ⅰ）由 $AB=\sqrt{3}$， $BC=1$， $AC=2$，得 $AC^2=AB^2+BC^2$，则 $AB\perp BC$.

……………………………6 分

因为 $C_1C\perp BC$， $C_1C\perp AC$， $AC\cap BC=C$，

所以 $C_1C\perp$ 平面 ABC. ……………………………7 分

所以 $C_1C\perp AB$. ……………………………8 分

又因为 $AB\perp BC$， $C_1C\cap BC=C$，

所以 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1. ……………………………9 分

又因为 $FC_1\subset$ 平面 B_1BCC_1，

所以 $AB\perp FC_1$. ……………………………10 分

（ⅱ）三棱锥 B_1-AFC_1 的体积就是三棱锥 $A-B_1FC_1$ 的体积.

因为 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1， ………………12 分

所以三棱锥 $A-B_1FC_1$ 的体积是

$V=\frac{1}{3}\times AB\times S_{\Delta B_1C_1F}=\frac{1}{3}\times AB\times\frac{1}{2}\times B_1C_1\times A_1A=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 14 分

选择 ①③

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 A_1ACC_1 是平行四边形， $AC_1=A_1C$

所以 $AA_1\perp AC$.

以下同选择②③.

（19）（Ⅰ）由图象可知 $\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

所以 $T=2\pi$. ………………… 1 分

因为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$， $\omega>0$，

所以 $\omega=1$. ………………… 3 分

所以 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$.

因为 $f(\frac{\pi}{4})=2$，

所以 $2\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=2$.

所以 $\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=1$.

因为 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. ………………… 5 分

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

（Ⅱ） $g(x)=f(x)\cdot\sin x$

$=2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cdot\sin x$

$=2(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)\cdot\sin x$ ………………… 6 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin^2 x+2\sin x\cos x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos 2x+\sin 2x)$ ………………… 7 分

$=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………… 8 分

（ⅰ）因为 $y=\sin x$ 单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$， $k\in\mathbf{Z}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$. ………………… 10 分

即 $k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8}$.

所以 $g(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{8}, k\pi+\frac{3\pi}{8}]$， $k\in\mathbf{Z}$. ……………… 11 分

（ii）令 $g(x)=f(x)\ \sin x=0$，

则 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 或 $\sin x=0$， ……………… 12 分

所以 $x+\frac{\pi}{4}=k\pi$ 或 $x=k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$. ……………… 13 分

因为 $x\in[0,10]$，

所以 $x=0$， $\frac{3\pi}{4}$， π， $\frac{7\pi}{4}$， 2π， $\frac{11}{4}\pi$， 3π . ……………… 14 分

则 $0+\frac{3\pi}{4}+\pi+\frac{7\pi}{4}+2\pi+\frac{11}{4}\pi+3\pi=\frac{45}{4}\pi$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,10]$ 内所有的零点的和等于 $\frac{45}{4}\pi$. ……………… 15 分

（20）（Ⅰ）在图（1）中 $DE /\!/ BC$， $\angle C=90^\circ$，

所以 $AD\perp DE$， $CD\perp DE$.

将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 位置，

所以 $A_1D\perp DE$， $CD\perp DE$， ……………… 2 分

因为 $A_1D\cap CD=D$，

所以 $DE\perp$ 平面 A_1CD . ……………… 3 分

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1CD，

所以 $DE\perp A_1C$. ……………… 4 分

又因为 $A_1C\perp CD$， $DE\cap CD=D$，

所以 $A_1C\perp$ 平面 $BCDE$. ……………… 5 分

（Ⅱ）作 $CH\perp A_1D$ 于点 H .

因为 $DE\perp$ 平面 A_1CD， $CH\subset$ 平面 A_1CD，

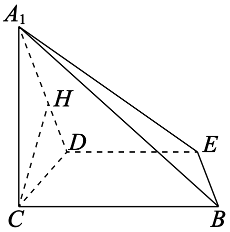
所以 $DE\perp CH$.

因为 $A_1D\cap DE=D$，

所以 $CH\perp$ 平面 A_1DE .

所以点 C 到平面 A_1DE 的距离为 CH 的长. ……………………………… 7 分

在图（1）中， $DE /\!/ BC$， $DE=2$， $BC=3$， $AC=6$，



所以 $\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

所以 $AD=4$， $CD=AC-AD=2$.

在 $\triangle A_1CD$ 中， $A_1C\perp CD$， $A_1D=AD=4$，

所以 $A_1C=\sqrt{A_1D^2-CD^2}=2\sqrt{3}$， $\sin\angle CA_1D=\dfrac{1}{2}$.

所以 $CH=A_1C\cdot\sin\angle CA_1D=\sqrt{3}$.

所以 C 到平面 A_1DE 的距离为 $\sqrt{3}$. ....10 分

（III）存在. ....11 分

作 $MN/\!/A_1E$ 交 DE 于 N，过 N 作 $NP/\!/BE$ 交 CB 于 P，连 MP.

因为 $MN\cap NP=N$， $A_1E\subset$ 平面A_1BE， $BE\subset$ 平面A_1BE，

所以平面 $MNP/\!/$ 平面A_1BE. ....12 分

因为 $MP\subset$ 平面MNP，

所以 $MP/\!/$ 平面A_1BE. ....13 分

所以线段 BC 上存在点 P，使 $MP/\!/$ 平面A_1BE.

因为 M 为线段 A_1D 中点， $MN/\!/A_1E$，

所以 $DN=NE=\dfrac{1}{2}DE=1$.

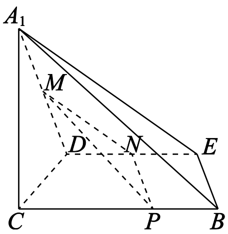
因为 $DE/\!/BC$， ....14 分

所以四边形 $NEBP$ 是平行四边形.

所以 $PB=NE=1$.

所以 $CP=CB-PB=2$.

所以 $\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{2}{3}$. ....15 分



（21）（Ⅰ）因为 $u(x)=0x+\sin x$，其中 $\sin x$ 为周期函数，所以 $u(x)$ 为好函数.

....................................2 分

若 $v(x)$ 为好函数，则存在实数 k 和周期函数 $h(x)$，使得 $v(x)=kx+h(x)$，

所以 $h(x)=x^2+(1-k)x$ 为周期函数.

当且仅当 $x=\dfrac{k-1}{2}$ 时， $h(x)$ 取最小值，这与 $h(x)$ 是周期函数矛盾.

所以 $v(x)$ 不为好函数. ....5 分

（II） （ i ） $g(x)=\dfrac{1}{2}x$. ....7 分

（ii）若 $f(x)$ 是周期函数，设 $T(T>0)$ 是 $f(x)$ 的一个周期，则

$x=g(f(x))=g(f(x+T))=x+T$，这与 $T>0$ 矛盾.

所以 $f(x)$ 不是周期函数. ………………………… 9 分

（iii）因为 $f(x)$ 是好函数，所以存在实数 k 和周期函数 $h(x)$，使得 $f(x)=kx+h(x)$，

由（ii）知 $k\neq 0$，否则 $f(x)$ 是周期函数，矛盾. ………………………… 10 分

令 $r(x)=g(x)-\dfrac{1}{k}x$. ………………………… 12 分

以下证 $r(x)$ 是以 kT 为周期的周期函数，T 是 $h(x)$ 的周期.

$$r(x+kT)=r(x)\Leftrightarrow g(x+kT)-\frac{1}{k}(x+kT)=g(x)-\frac{x}{k}\Leftrightarrow g(x+kT)=g(x)+T$$

假设存在 $x_1\neq x_2$，使得 $y_0=f(x_1)=f(x_2)$，

则 $g(y_0)=g(f(x_1))=x_1$，$g(y_0)=g(f(x_2))=x_2$，矛盾.

所以 $g(x+kT)=g(x)+T\Leftrightarrow f(g(x+kT))=f(g(x)+T)$

$\Leftrightarrow x+kT=k(g(x)+T)+h(g(x)+T)\Leftrightarrow x=kg(x)+h(g(x))=f(g(x))$

所以 $r(x+kT)=r(x)$.

所以 $g(x)=\dfrac{1}{k}x+r(x)$ 是好函数. ………………………… 15 分