2024北京海淀高一（下）期末

数　学

2024.07

学校＿＿＿＿＿　班级＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿

考 生 须 知	1．本试卷共6页，共3道大题，19道小题。满分100分。考试时间90分钟。 2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。 3．答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答。 4．考试结束，请将本试卷交回。

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=2$，则 z 的虚部为

（A）-2　　（B）2

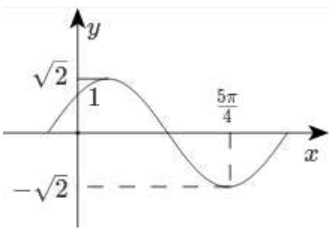
（C）$-\mathrm{i}$　　（D）i

（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1), \boldsymbol{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，则 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

（A）0　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（3）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则其解析式为



（A）$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

（B）$f(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$

（C）$f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

（D）$f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

（4）若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=$

（A）$-\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{1}{7}$

（C）$\frac{3}{4}$　　（D）7

（5）在 ΔABC 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$. 若 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda=$

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{4}$

（C）3　　（D）4

（6）已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$，则下列直线中，是函数 $f(x)$ 对称轴的为

（A）$x=0$　　（B）$x=\frac{\pi}{6}$

（C）$x=\frac{\pi}{4}$　　（D）$x=\frac{\pi}{2}$

（7）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1,\sqrt{3})$，点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 若 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{5}$，则 $\theta=$

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$

（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

（8）在 ΔABC 中，已知 $a=2, A=\frac{\pi}{3}$，则下列说法正确的是

（A）当 $b=1$ 时，ΔABC 是锐角三角形　　（B）当 $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，ΔABC 是直角三角形

（C）当 $b=\frac{7}{3}$ 时，ΔABC 是钝角三角形　　（D）当 $b=\frac{5}{3}$ 时，ΔABC 是等腰三角形

（9）已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“对于任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，都有 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$ 成立”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）定义域为 $[a,b]$ 的函数 $y=f(x)$ 的图象的两个端点分别为 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$. 点 $M(x,y)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，其中 $x=\lambda a+(1-\lambda)b(0\le\lambda\le 1)$，点 N 满足向量 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，点 O 为坐标原点. 若不等式 $|\overrightarrow{MN}|\leqslant k$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为 k 函数. 已知函数 $f(x)=-x^2+2x$ 在 $[0,1]$ 上为 k 函数，则实数 k 的取值范围是

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$[\frac{1}{4},+\infty)$

（C）$(\frac{1}{2},+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

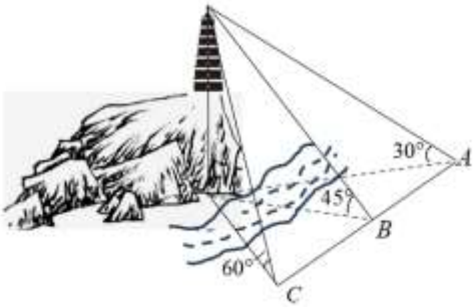
二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

(11）已知复数 z 满足 $z+1-\mathrm{i}=0$，则 $z=$_______，$\bar{z}=$_______.

(12）在 ΔABC 中，$\angle C=\dfrac{\pi}{3},CA=CB=2$，点 P 满足 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=$_______.

(13）在 ΔABC 中，若 $a\sin B=kb$，则 k 的一个取值为_______; 当 $A=\dfrac{\pi}{2}$ 时，则 $k=$ _______.

(14）一名学生想测算某风景区山顶古塔的塔尖距离地面的高度，由于山崖下河流的阻碍，他只能在河岸边制定如下测算方案：他在河岸边设置了共线的三个观测点 A,B,C（如图），相邻两观测点之间的距离为200m，并用测角仪器测得各观测点与塔尖的仰角分别为30°，45°，60°. 根据以上数据，该学生得到塔尖距离地面的高度为_______m.



(15）已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$，$g(x)=|\cos x|$，给出下列四个结论：

① 对任意的 $\varphi\in\mathbf{R}$，函数 $y=f(x)+g(x)$ 是周期函数；

② 存在 $\varphi_0\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)+g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减；

③ 存在 $\varphi_0\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)g(x)$ 的图象既是轴对称图形，又是中心对称图形；

④ 对任意的 $\varphi\in\mathbf{R}$，记函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 的最大值为 $M(\varphi)$，则 $M(\varphi)>\dfrac{1}{2}$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)（本小题 9 分）

已知函数 $f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})+\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$.

(Ⅰ) 求 $f(0)$ 的值和 $f(x)$ 的零点；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(17)（本小题 9 分）

已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=1$，$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{4}$.

(Ⅰ) 求 $|\vec{a}-2\vec{b}|$；

(Ⅱ) 若 $\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OA}$，求 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$ 的最小值.

（18）（本小题 11 分）

在 ΔABC 中， $\cos 2A+\cos A=0$.

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）若 $a=7$ ，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 ΔABC 存在且唯一确定，求 ΔABC 最长边上的高线的长.

条件①： $\sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ ；

条件②： ΔABC 的面积为 $10\sqrt{3}$ ；

条件③： $b=10$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题 11 分）

已知 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ，给定 $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ ，定义变换 φ_k ：选取 $i\in\{0,1,\ldots n-1\}$ ，再选取一个实数 x ，对 $\boldsymbol{a}$ 的坐标进行如下改变：

若此时 $i+k\le n$ ，则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k}$ 同时加上 x ，其余坐标不变；

若此时 $i+k>n$ ，则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 及 $a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-n}$ 同时加上 x ，其余坐标不变.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 经过有限次变换 φ_k （每次变换所取的 i,x 的值可能不同）后，最终得到的向量 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 满足 $t_1=t_2=\cdots=t_n$ ，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 k 阶可等向量.

例如，向量 $(1,3,2)$ 经过两次变换 φ_2 可得：

$(1,3,2)\xrightarrow{i=2,\ x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,\ x=-1}(2,2,2)$ ，所以 $(1,3,2)$ 是 2 阶可等向量.

（Ⅰ）判断 $(1,2,3)$ 是否是 2 阶可等向量？说明理由；

（Ⅱ）若取 $1,2,3,4$ 的一个排序得到的向量 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是 2 阶可等向量，求 a_1+a_3 ；

（Ⅲ）若任取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排序得到的 n 维向量均为 k 阶可等向量， 则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 k 阶强可等向量. 求证：向量 $(1,2,3,4,5,6,7)$ 是 5 阶强可等向量.

参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	D	D	B	C	A	B	C	B

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$-1+\mathrm{i}$　　$-1-\mathrm{i}$　　（12）0

（13）$\frac{1}{2}$（答案不唯一）　1　　（14）$100\sqrt{6}$

（15）①②③

两空题，第一空 2 分，第二空 2 分，

15 题对一个给 1 分，对两个给 2 分，都对给 4 分，有错的则给 0 分

三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

（16）（共 9 分）

解：（Ⅰ）$f(0)=\sin(-\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$　　……1 分

$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})+\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x$　　……5 分

$=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}$　　……6 分

$=\sin(x+\frac{\pi}{6})$

令 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，所以 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)$ 的零点为 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$，　$k\in\mathbf{Z}$　　……7 分

（Ⅱ）因为　$y=\sin x$　的单调递增区间为$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in\mathbf{Z}$

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$.　　……8 分

所以 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{\pi}{3}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}),k\in\mathbf{Z}$　　……9 分

（17）（共 9 分）

解：（Ⅰ）因为$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}$ ……1 分

$=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}$ ……2 分

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=1$ ……4 分

所以 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{2-4+4}=\sqrt{2}$ ……5 分

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})\cdot(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ ……7 分

$=(t^2-t)\overrightarrow{OA}^2-(t-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=2(t^2-t)-(t-1)$

$=2t^2-3t+1$ ……8 分

$=2(t-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}\geq-\frac{1}{8}$

所以当$t=\frac{3}{4}$时， $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$的最小值为$-\frac{1}{8}$ ……9 分

（18）（共 11 分）

解：（Ⅰ）因为$\cos 2A+\cos A=0$

所以$2\cos^2 A+\cos A-1=0$ ……2 分

所以$(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$，

所以$\cos A=\frac{1}{2}$，$\cos A=-1$， ……3 分

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\cos A=-1$舍

所以$\cos A=\frac{1}{2}, A=\frac{\pi}{3}$ ……4 分

（Ⅱ）选择①

因为$A=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$ ……6 分

代入 $\frac{c}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$， 得$c=5$ ……7 分

法一：

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……9 分

代入得 $49=25+b^2-2\cdot5b\cdot\frac{1}{2}$

所以$(b-8)(b+5)=0$

所以$b=8$ 或 $b=-5$（舍），所以AC边最长， ……10 分

AC边上的高线$h=c\cdot\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ……11 分

法二：

因为$c=5$， $a=7$，所以$C<A$， ……9 分

所以$C<\frac{\pi}{3}$，所以$B>\frac{\pi}{3}$，所以b为最长边 ……10 分

AC边上的高线$h=c\cdot\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ……11 分

选择②

因为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$ ……6 分

所以$bc=40$ ……7 分

因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……9 分

所以 $49=b^2+c^2-bc=b^2+c^2-40$

所以$\begin{cases}b=8\\c=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=5\\c=8\end{cases}$

所以最长边上的高线$h=5\cdot\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ ……11 分

（19）解：（Ⅰ）$(1,2,3)$是2阶可等向量.

例如经过两次变换φ_2可得：$(1,2,3)\xrightarrow{i=3,\ x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,\ x=-1}(2,2,2)$

……2 分

（Ⅱ）设(a_1,a_2,a_3,a_4)进行一次变换φ_2后得(a_1',a_2',a_3',a_4')，

当$i=0$时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1+x,a_2+x,a_3,a_4)$

当$i=1$时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1,a_2+x,a_3+x,a_4)$

当$i=2$时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1,a_2,a_3+x,a_4+x)$

当$i=3$时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1+x,a_2,a_3,a_4+x)$

综上，我们得到

$(a_1'+a_3')-(a_2'+a_4')=(a_1+a_3+x)-(a_2+a_4+x)=(a_1+a_3)-(a_2+a_4)$.

因为(a_1,a_2,a_3,a_4)是2阶可等向量，即$t_1=t_2=t_3=t_4$

所以$(a_1+a_3)-(a_2+a_4)=(t_1+t_3)-(t_2+t_4)=0$.

所以$a_1+a_3=a_2+a_4=\dfrac{a_1+a_3+a_2+a_4}{2}=\dfrac{1+2+3+4}{2}=5$ ……6 分

（Ⅲ）任取$(1,2,\cdots,7)$的一个排序，记为$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_7)$.

注意到，

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是k阶可等向量，

等价于$(a_1+y,a_2+y,\cdots,a_n+y)$是$k$阶可等向量.

变换φ_5即对连续五个维度的坐标（首尾也看成连续）同时加上x，

相当于对剩余两个连续维度的坐标同时加上$-x$.

对b_2,b_3；b_4,b_5；b_6,b_7依次加上$-x$，相当于对b_1单独加上x；

对b_3,b_4；b_5,b_6；b_7,b_1依次加上$-x$，相当于对b_2单独加上x；

……

基于上述分析，相当于可以对$b_1,b_2,\cdots,b_7$分别单独加上$-b_1,-b_2,\cdots,-b_7$.

所以$\boldsymbol{b}$为5阶可等向量，$(1,2,\cdots,7)$为5阶强可等向量. ……11 分