



房山区 2023-2024 学年度第二学期学业水平调研 (二)

七年级数学

本试卷共 8 页, 满分 100 分, 考试时长 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题 (本题共 20 分, 每小题 2 分)

第 1-10 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个。

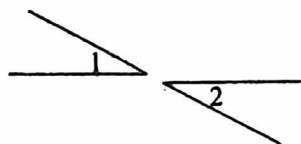
1. 草履虫的身体很小, 呈圆筒形, 全身由一个细胞组成, 体长只有 80 ~ 300 微米。其中 80 微米 = 0.000 08 米, 把 0.000 08 用科学记数法表示为

- (A) 0.8×10^{-4} (B) 0.8×10^{-5} (C) 8×10^{-4} (D) 8×10^{-5}

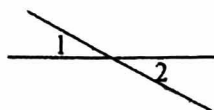
2. 下列运算正确的是

- (A) $a^2 + a^3 = a^5$ (B) $(a^2)^3 = a^5$
 (C) $a^2 \cdot a^3 = a^5$ (D) $6a^6 \div 3a^3 = 2a^2$

3. 下面图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角的为



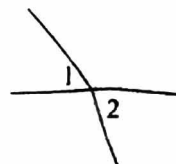
(A)



(B)



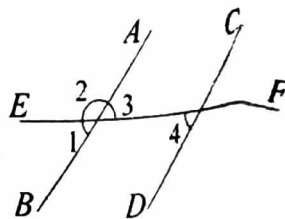
(C)



(D)

4. 如图, 直线 AB , CD 被 EF 所截, 下列条件不能判断 $AB \parallel CD$ 的是

- (A) $\angle 1 = \angle 4$
 (B) $\angle 3 = \angle 4$
 (C) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
 (D) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$



5. 下列等式中, 从左到右的变形是因式分解的是

- (A) $x(x+1) = x^2 + x$ (B) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
 (C) $x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$ (D) $x^2 + 1 = (x+1)^2$



6. 下列调查中, 适合采用全面调查 (普查) 方法的是

- (A) 选出某校短跑最快的学生参加全市比赛
- (B) 调查一批手机电池的使用寿命
- (C) 调查某品牌汽车的抗撞击情况
- (D) 了解某市中学生平均一周的体育锻炼时间

7. 有 6 个小正方体, 它们的大小和颜色都相同, 其中有 5 个小正方体的质量相等, 有 1 个小正方体略重一点, 可以利用天平进行实验操作探究, 如果用最少的操作次数一定能找出这个质量略重的小正方体, 那么最少的操作次数是

- (A) 1 次
- (B) 2 次
- (C) 3 次
- (D) 4 次

8. 将边长为 a 的正方形的右下角剪掉一个边长为 b 的正方形 (如图 1), 将剩下部分按照虚线分割成①和②两部分, 再将①和②两部分拼成一个长方形 (如图 2), 由图 1 到图 2 的操作, 能够验证下列等式中从左到右的变形的是

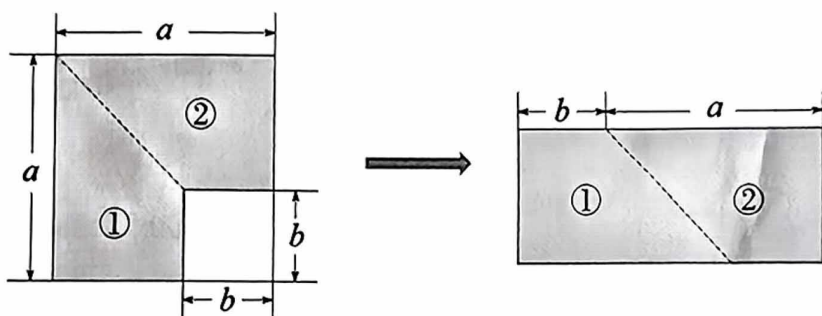


图 1

图 2

- (A) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- (B) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (C) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- (D) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

9. 下列说法中, 正确的是

- (A) 一组数据中最大的数据增大时, 这组数据的平均数也随之增大
- (B) 一组数据中最大的数据增大时, 这组数据的众数也随之增大
- (C) 一组数据中最大的数据增大时, 这组数据的中位数也随之增大
- (D) 一组数据的中位数一定是这组数据中的某一个数据



10. 甲、乙、丙三人做写数字的游戏，三个人写的数字要同时满足以下四个条件：

- ①乙写的数字的一半大于甲写的数字；
- ②丙写的数字不大于甲写的数字；
- ③丙写的数字的3倍大于乙写的数字；
- ④甲、乙、丙三人写的数字均为正整数.

则三人所写数字之和的最小值为

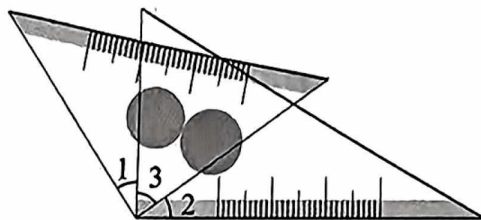
- (A) 4 (B) 7 (C) 9 (D) 13

二、填空题 (本题共 16 分，每小题 2 分)

11. 若 $\angle A = 40^\circ$ ，那么 $\angle A$ 的余角是_____°.

12. 因式分解： $6a^2b - 3ab^2 =$ _____.

13. 如图，将一副三角板的直角顶点重叠在一起， $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ， $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，那么 $\angle 1 = \angle 2$ ，此结论得出的依据是_____.



14. 定义：如图 1，直线 AB ， CD 被 EF 所截，图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 位于截线 EF 同侧，被截线 AB ， CD 的外部，我们把具有图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 位置关系的角称为“同旁外角”. 如图 2，当 $AB \parallel CD$ 时， $\angle 3 = 130^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的“同旁外角”的大小为_____°.

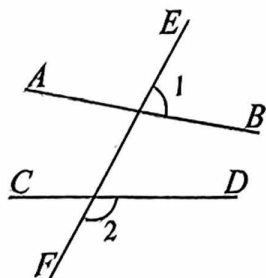


图 1

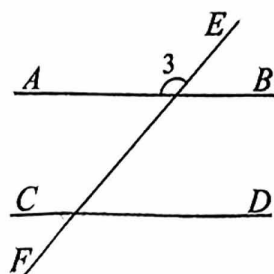


图 2



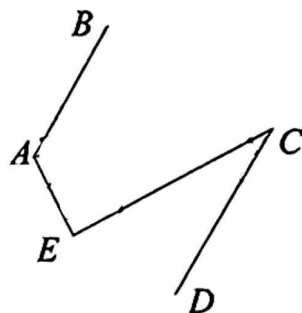
15. 用一组 a, b, c 的值说明命题“如果 $a < b$, 那么 $ac < bc$ ”是假命题, 这组值可以是 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 为传承发展中国优秀语言文化, 厚植青少年家国情怀, 某校开展了“诵读中国”经典诵读大赛. 校学生会随机对该校 20 名同学一周内诵读中华经典的时间进行了调查, 统计如下:

诵读时间 / 分钟	35	40	a	50
人数 / 人	4	6	7	3

若 20 名同学诵读时间的众数为 45, 则 a 为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 中位数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 如图, $AB \parallel CD$, $\angle BAE = 123^\circ$, $\angle DCE = 32^\circ$, 则 $\angle AEC$ 的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



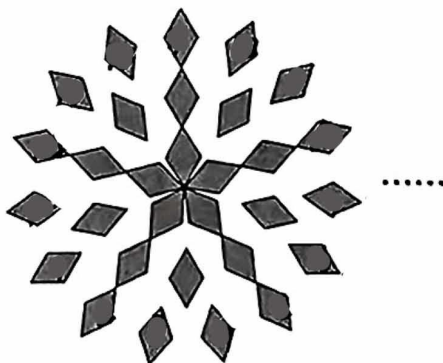
18. 如图所示是一组有规律的图案, 每个图案都由若干个“ \blacklozenge ”组成, 第 1 个图案由 5 个“ \blacklozenge ”组成, 第 2 个图案由 15 个“ \blacklozenge ”组成, 第 3 个图案由 30 个“ \blacklozenge ”组成, 则第 4 个图案由 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个“ \blacklozenge ”组成, 第 n 个图案中“ \blacklozenge ”的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用含 n 的代数式表示).



图案 1



图案 2



图案 3

三、解答题(本题共64分,第19,20题,每题8分;第21,24题,每题6分;第22,25题,每题5分;第23题4分;第26,27题,每题7分;第28题8分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.



19. 计算: (1) $3^{-2} + (-1)^{2024} - (\pi - 3)^0$; (2) $(x-1)^2 + 2(x+1)$.

20. 因式分解: (1) $ax^2 - a$; (2) $3x^2 - 12x + 12$.

21. 解不等式组:
$$\begin{cases} x-4 > -3, \\ \frac{5x+1}{3} - 3 \leq x, \end{cases}$$
 并写出它的所有整数解.

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x+4y=17. \end{cases}$$

23. 已知 $a+b=2$, 求代数式 $a^2 - b^2 + 4b$ 的值.

24. 已知: 如图, 直线 AB, CD 被 EF, MN 所截, MF 平分 $\angle EMN$, $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2 = 96^\circ$, $\angle EFD = 120^\circ$, 求 $\angle MFN$ 的大小.

补充完成下列推理过程:

$\because \angle 1 = 60^\circ, \angle EFD = 120^\circ$ (已知),

$\therefore \angle 1 + \angle EFD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$ (_____),

$\therefore \angle 2 = \angle$ _____ (_____).

$\because \angle 2 = 96^\circ$ (已知),

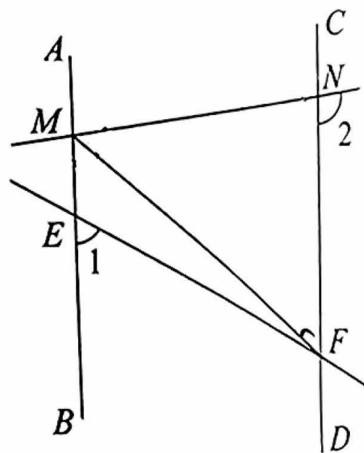
$\therefore \angle$ _____ $= 96^\circ$ (等量代换).

$\because MF$ 平分 $\angle EMN$ (已知),

$\therefore \angle EMF = \frac{1}{2} \angle EMN = 48^\circ$ (角平分线定义).

$\because AB \parallel CD$ (已证),

$\therefore \angle MFN = \angle$ _____ $= 48^\circ$ (_____).



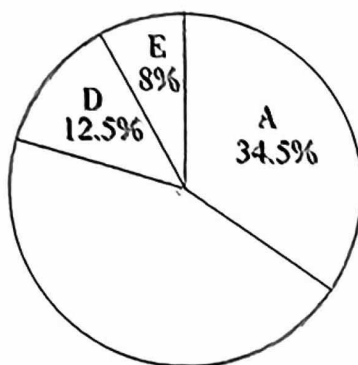


25. 在技术创新和消费升级的双重作用下,新的网购模式悄然而至,直播电商购物、短视频电商、社交电商、社区团购等新模式走进大众视野,与传统购物网站形成互补.为了解某市市民选择直播电商购物的主要原因,统计部门在全市范围内开展随机调查,参与调查人员需从 A、B、C、D、E 五个选项中任选一项(必选且只选一项).

a. 参与调查人员选择直播电商购物的主要原因的统计表如下:

选项	主要原因	人数/人
A	优惠力度大、性价比高	1380
B	节约了货比三家的挑选时间和精力	
C	商品介绍清晰明了、可以实时互动	1000
D	购买界面简洁易懂、下单十分方便	m
E	被带货主播人格魅力吸引	320

b. 参与调查人员选择直播电商购物的主要原因的扇形统计图如下:



- (1) 本次调查中,随机调查了_____名市民;
- (2) 统计表中, m =_____;
- (3) 补全扇形统计图(标注选项“B、C”及相应百分比);
- (4) 如果该市共有市民约 2170 万人,请你估计以“节约了货比三家的挑选时间和精力”为主要原因的消费者有_____万人.



26. 已知：如图 1，点 D, E, F 分别是线段 BC, AB, AC 上的点， $DE \parallel AC$ ， $DF \parallel AB$ 。

(1) 猜想 $\angle EDF$ 与 $\angle BAC$ 的数量关系，并证明。

(2) 用画图工具在备用图中作 $\angle BAC$ 的平分线 AM 交 BC 于点 M ，过点 A 作 $AN \perp AM$ 交 DF 的延长线于点 N 。

① 补全备用图；

② 若 $\angle ANF = 50^\circ$ ，求 $\angle EDF$ 的大小。

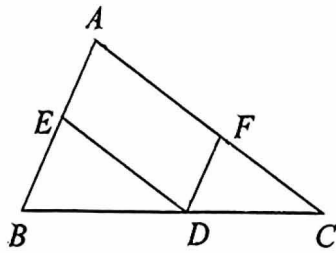
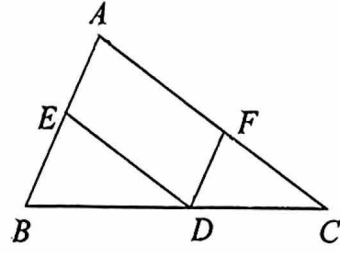
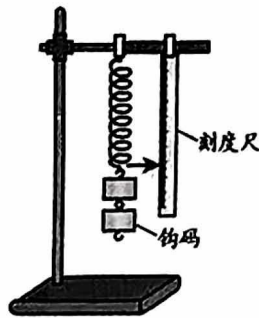


图 1



备用图

27. 某校科学小组用弹簧等器材，进行了测量物体质量的实验探索。



实验一：如图，在弹簧下方悬挂钩码，发现弹簧会伸长，记录实验数据如下表：

钩码质量 (单位：克)	0	200	400	600	800	1000
弹簧长度 (单位：厘米)	10	11	12	13	14	15

例如：当弹簧下方所挂钩码的质量为 200 克时，弹簧长度为 11 厘米。

实验二：在弹簧下方悬挂不同的实验物块，记录实验数据如下表：

次数	A 物块 (单位：个)	B 物块 (单位：个)	弹簧长度 (单位：厘米)
第一次	4	7	12
第二次	8	9	13



(1) 已知每个同类型物块的质量都相同, 求出每个 A 物块和每个 B 物块的质量分别是多少克;

(2) 该弹簧的长度伸长到 15 厘米时就不能继续伸长, 实验将不能继续. 在某次实验中, 弹簧下方悬挂 A 物块和 B 物块共计 30 个时, 符合实验要求, 其中 A 物块不多于 22 个, 那么有多少个 B 物块? (求出所有情况).

8. 在平面内, 对于 $\angle P$ 和 $\angle Q$, 给出如下定义: 若存在一个常数 $t(t > 0)$, 使得 $\angle P + t\angle Q = 180^\circ$, 则称 $\angle Q$ 是 $\angle P$ 的“ t 系数补角”. 例如, $\angle P = 80^\circ$, $\angle Q = 20^\circ$, 有 $\angle P + 5\angle Q = 180^\circ$, 则 $\angle Q$ 是 $\angle P$ 的“5 系数补角”.

(1) 若 $\angle P = 90^\circ$, 在 $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2 = 45^\circ$, $\angle 3 = 30^\circ$ 中, $\angle P$ 的“3 系数补角”是_____;

(2) 在平面内, $AB \parallel CD$, 点 E 为直线 AB 上一点, 点 F 为直线 CD 上一点.

①如图 1, 点 G 为平面内一点, 连接 GE , GF , $\angle DFG = 50^\circ$, 若 $\angle BEG$ 是 $\angle EGF$ 的“6 系数补角”, 求 $\angle BEG$ 的大小.

②如图 2, 连接 EF . 若 H 为平面内一动点(点 H 不在直线 AB , CD , EF 上), $\angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M . 若 $\angle BEH = \alpha$, $\angle DFH = \beta$, $\angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2 系数补角”, 直接写出 $\angle N$ 的大小的所有情况(用含 α 和 β 的代数式表示), 并写出其中一种情况的求解过程.

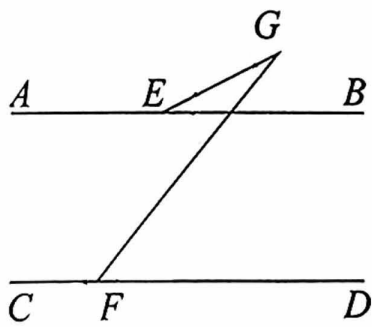


图 1

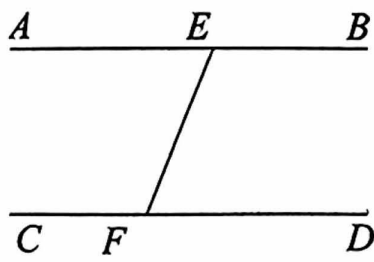
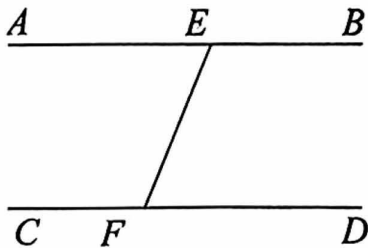


图 2



备用图



$$22. \begin{cases} x+2y=7, & \text{①} \\ 3x+4y=17. & \text{②} \end{cases}$$

解法 1:

解: 由①得 $x=7-2y$ ③ 1 分

把③代入②得 $3(7-2y)+4y=17$

$y=2$ 3 分

把 $y=2$ 代入③得 $x=3$ 4 分

\therefore 原方程组的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 5 分

解法 2:

解: 把① $\times 3$ 得 $3x+6y=21$ ③ 1 分

③-②得 $2y=4$

$y=2$ 3 分

把 $y=2$ 代入①得 $x+4=7$

$x=3$ 4 分

\therefore 原方程组的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 5 分

23. **解法 1:**

解: 原式 $= (a+b)(a-b) + 4b$ 1 分

$\because a+b=2$

\therefore 原式 $= 2(a-b) + 4b$ 2 分

$= 2a - 2b + 4b$

$= 2a + 2b$ 3 分

$= 2(a+b)$

$= 2 \times 2 = 4$ 4 分

解法 2:

解: $\because a+b=2$

$\therefore a=2-b$ 1 分

把 $a=2-b$ 代入 $a^2 - b^2 + 4b$

原式 $= (2-b)^2 - b^2 + 4b$ 2 分

$= 4 - 4b + b^2 - b^2 + 4b$ 3 分

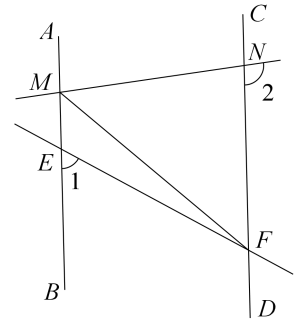
$= 4$ 4 分



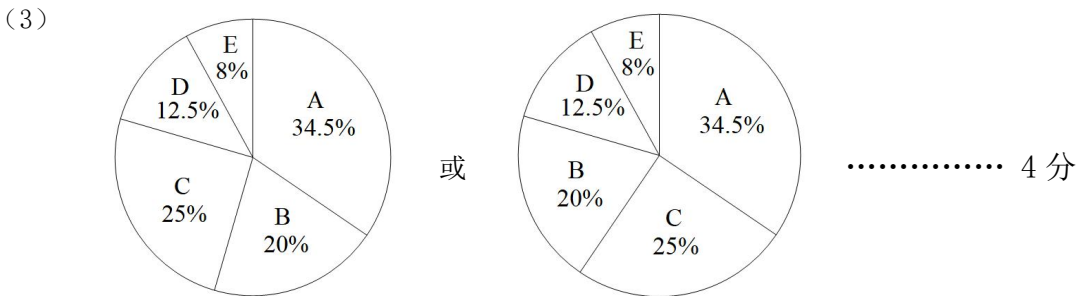
解法 3:

解: 原式 = $a^2 - b^2 + 4b - 4 + 4$
 $= a^2 - (b^2 - 4b + 4) + 4$
 $= a^2 - (b - 2)^2 + 4$ 1 分
 $\because a + b = 2$
 $\therefore b - 2 = -a$ 2 分
 \therefore 原式 = $a^2 - (-a)^2 + 4$ 3 分
 $= a^2 - a^2 + 4$
 $= 4$ 4 分

24. $\because \angle 1 = 60^\circ, \angle EFD = 120^\circ$ (已知),
 $\therefore \angle 1 + \angle EFD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$
 $\therefore AB \parallel CD$ (同旁内角互补, 两直线平行), 1 分
 $\therefore \angle 2 = \angle EMN$ (两直线平行, 同位角相等). 3 分
 $\because \angle 2 = 96^\circ$ (已知),
 $\therefore \angle EMN = 96^\circ$ (等量代换). 4 分
 $\because MF$ 平分 $\angle EMN$ (已知),
 $\therefore \angle EMF = \frac{1}{2} \angle EMN = 48^\circ$ (角平分线定义).
 $\because AB \parallel CD$ (已证),
 $\therefore \angle MFN = \angle EMF = 48^\circ$ (两直线平行, 内错角相等). 6 分



25. (1) 4000 1 分
 (2) 500 2 分



(4) 434 5 分



26. (1) 猜想: $\angle EDF = \angle BAC$ 1分

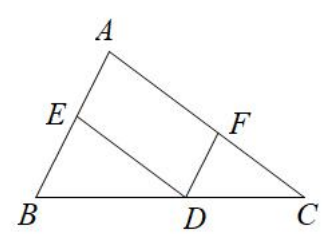
证明: 方法1 $\because DE \parallel AC$ (已知)

$\therefore \angle BAC = \angle BED$ (两直线平行, 同位角相等) 2分

$\because DF \parallel AB$ (已知)

$\therefore \angle EDF = \angle BED$ (两直线平行, 内错角相等)

$\therefore \angle EDF = \angle BAC$ (等量代换) 3分



方法2 $\because DE \parallel AC$ (已知)

$\therefore \angle BAC + \angle AED = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补) 2分

$\because DF \parallel AB$ (已知)

$\therefore \angle EDF + \angle AED = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补)

$\therefore \angle EDF = \angle BAC$ (同角的补角相等) 3分

(2) ①补全备用图 4分

②解: $\because DF \parallel AB$ (已知)

$\therefore \angle BAN + \angle ANF = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补)

$\because \angle ANF = 50^\circ$ (已知)

$\therefore \angle BAN = 180^\circ - \angle ANF = 130^\circ$ 5分

$\because AN \perp AM$ (已知)

$\therefore \angle MAN = 90^\circ$ (垂直定义)

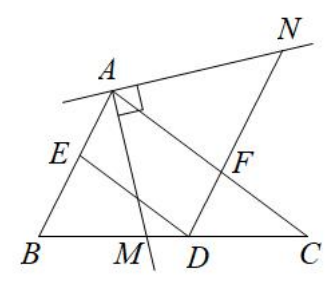
$\therefore \angle BAM = \angle BAN - \angle MAN = 40^\circ$ 6分

$\because AM$ 平分 $\angle BAC$ (已知)

$\therefore \angle BAC = 2\angle BAM = 80^\circ$ (角平分线定义)

又 $\because \angle EDF = \angle BAC$ (已证)

$\therefore \angle EDF = 80^\circ$ (等量代换) 7分



27. (1) 解: 设每个 A 物块的质量是 x 克, 每个 B 物块的质量是 y 克. 1分

根据题意, 得 $\begin{cases} 4x + 7y = 400 \\ 8x + 9y = 600 \end{cases}$ 2分

解得: $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$

答: 每个 A 物块的质量是 30 克, 每个 B 物块的质量是 40 克. 3分



(2) 方法 1: 设有 m 个 B 物块, 则有 $(30-m)$ 个 A 物块4 分

根据题意得 $\begin{cases} 30(30-m) + 40m \leq 1000 \\ 30-m \leq 22 \end{cases}$ 5 分

解得: $8 \leq m \leq 10$ 6 分

$\therefore m$ 为整数

$\therefore m = 8, 9, 10$

答: 有 8 或 9 或 10 个 B 物块7 分

方法 2: 设弹簧下挂 A 物块 m 个, 则挂 B 物块 $(30-m)$ 个4 分

根据题意得 $30m + 40(30-m) \leq 1000$ 5 分

解得: $m \geq 20$

$\therefore m \leq 22$ 且 m 为整数

$\therefore m$ 为 20, 21, 226 分

当 $m = 20$ 时, $30 - m = 10$;

当 $m = 21$ 时, $30 - m = 9$;

当 $m = 22$ 时, $30 - m = 8$,

答: 有 8 或 9 或 10 个 B 物块7 分

28. (1) $\angle 3$ 1 分

(2) ①过点 G 作 $GH \parallel AB$ 2 分

$\therefore \angle BEG = \angle EGH$

$\therefore AB \parallel CD$

$\therefore GH \parallel CD$

$\therefore \angle DFG = \angle FGH$

$\therefore \angle EGF = \angle FGH - \angle EGH = \angle DFG - \angle BEG$

$\therefore \angle DFG = 50^\circ$

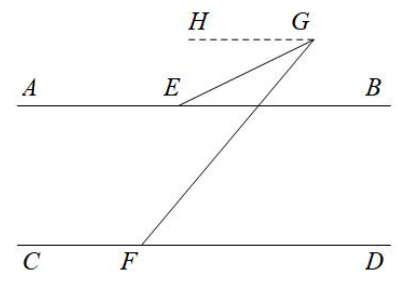
$\therefore \angle EGF = 50^\circ - \angle BEG$

$\therefore \angle BEG$ 是 $\angle EGF$ 的“6 系数补角”

$\therefore \angle EGF + 6\angle BEG = 180^\circ$

$\therefore 50^\circ - \angle BEG + 6\angle BEG = 180^\circ$

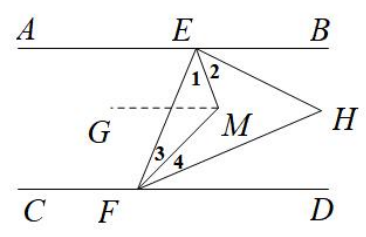
$\therefore \angle BEG = 26^\circ$ 3 分





② $45^\circ - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta$ 或 $45^\circ - \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\alpha$ 或 $45^\circ - \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta$ 或 $\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta - 45^\circ$ 7分

情况 1: 当点 H 在 AB, CD 之间, EF 右侧, 如图



过点 M 作 $MG \parallel AB$

$\therefore AB \parallel CD$

$\therefore \angle BEF + \angle DFE = 180^\circ$

$\therefore \angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$

$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 180^\circ - \angle BEH - \angle DFH = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\therefore \angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle FEH, \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle EFH$

$\therefore MG \parallel AB$

$\therefore \angle BEM = \angle EMG$

又 $\therefore AB \parallel CD$

$\therefore MG \parallel CD$

$\therefore \angle DFM = \angle FMG$

$\therefore \angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$

$$= \angle BEM + \angle DFM$$

$$= \angle 2 + \angle BEH + \angle 4 + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2}\angle FEH + \angle BEH + \frac{1}{2}\angle EFH + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2}(\angle FEH + \angle EFH) + \angle BEH + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) + \alpha + \beta$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$\therefore \angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2系数补角”

$\therefore \angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$

$$\therefore \angle N = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EMF)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EMF$$

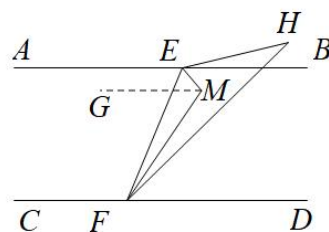
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\left[90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta$$

.....8分



情况 2: 当点 H 在直线 AB 上方, 直线 EF 右侧, 如图



过点 M 作 $MG \parallel AB$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle BEF + \angle DFE = 180^\circ$$

$$\because \angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$$

$$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 180^\circ + \angle BEH - \angle DFH = 180^\circ + \alpha - \beta$$

$\therefore \angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M

$$\therefore \angle FEM = \angle HEM = \frac{1}{2} \angle FEH, \angle EFM = \angle HFM = \frac{1}{2} \angle EFH$$

$$\because MG \parallel AB$$

$$\therefore \angle BEM = \angle EMG$$

又 $\because AB \parallel CD$

$$\therefore MG \parallel CD$$

$$\therefore \angle DFM = \angle FMG$$

$$\therefore \angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$$

$$= \angle BEM + \angle DFM$$

$$= \angle HEM - \angle BEH + \angle HFM + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2} \angle FEH - \angle BEH + \frac{1}{2} \angle EFH + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2} (\angle FEH + \angle EFH) - \angle BEH + \angle DFH$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ + \alpha - \beta) - \alpha + \beta$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$$

$\therefore \angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2系数补角”

$$\therefore \angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$$

$$\therefore \angle N = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EMF)$$

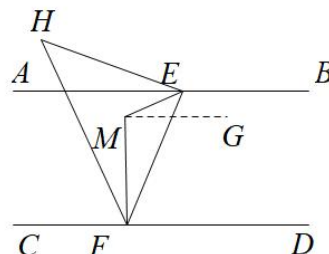
$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EMF$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \left[90^\circ + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \right]$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{4} \beta + \frac{1}{4} \alpha$$

.....8分

情况 3: 当点 H 在直线 AB 上方, 直线 EF 左侧, 如图



过点 M 作 $MG \parallel AB$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle AEF + \angle CFE = 180^\circ$$

$$\because \angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$$

$$\therefore \angle AEH = 180^\circ - \alpha, \angle CFH = 180^\circ - \beta$$



$$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 180^\circ + \angle AEH - \angle CFH = 180^\circ + (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = 180^\circ + \beta - \alpha$$

$\therefore \angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M

$$\therefore \angle FEM = \angle HEM = \frac{1}{2} \angle FEH, \angle EFM = \angle HFM = \frac{1}{2} \angle EFH$$

$\therefore MG \parallel AB$

$$\therefore \angle AEM = \angle EMG$$

又 $\therefore AB \parallel CD$

$$\therefore MG \parallel CD$$

$$\therefore \angle CFM = \angle FMG$$

$$\therefore \angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$$

$$= \angle AEM + \angle CFM$$

$$= \angle HEM - \angle AEH + \angle HFM + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} \angle FEH - \angle AEH + \frac{1}{2} \angle EFH + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (\angle FEH + \angle EFH) - \angle AEH + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ + \beta - \alpha) - (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$\therefore \angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2系数补角”

$$\therefore \angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$$

$$\therefore \angle N = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EMF)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EMF$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \left[90^\circ + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right]$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \beta$$

.....8分

情况 4: 当点 H 在 AB , CD 之间, EF 左侧, 如图

过点 M 作 $MG \parallel AB$

$\therefore AB \parallel CD$

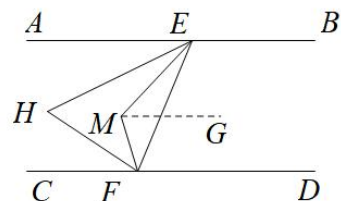
$$\therefore \angle AEF + \angle CFE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$$

$$\therefore \angle AEH = 180^\circ - \alpha, \angle CFH = 180^\circ - \beta$$

$$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 180^\circ - \angle AEH - \angle CFH = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 180^\circ$$

$\therefore \angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M





$$\therefore \angle FEM = \angle HEM = \frac{1}{2} \angle FEH, \angle EFM = \angle HFM = \frac{1}{2} \angle EFH$$

$$\therefore MG \parallel AB$$

$$\therefore \angle AEM = \angle EMG$$

又 $\because AB \parallel CD$

$$\therefore MG \parallel CD$$

$$\therefore \angle CFM = \angle FMG$$

$$\therefore \angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$$

$$= \angle AEM + \angle CFM$$

$$= \angle HEM + \angle AEH + \angle HFM + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} \angle FEH + \angle AEH + \frac{1}{2} \angle EFH + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (\angle FEH + \angle EFH) + \angle AEH + \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha + \beta - 180^\circ) + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta)$$

$$= 270^\circ - \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$\therefore \angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2系数补角”

$$\therefore \angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$$

$$\therefore \angle N = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EMF)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EMF$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \left[270^\circ - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \beta - 45^\circ$$

.....8分

情况 5: 当点 H 在直线 CD 下方, 直线 EF 左侧, 如图

过点 M 作 $MG \parallel AB$

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle AEF + \angle CFE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$$

$$\therefore \angle AEH = 180^\circ - \alpha, \angle CFH = 180^\circ - \beta$$

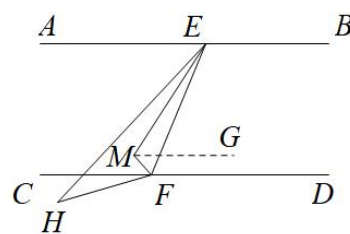
$$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 180^\circ - \angle AEH + \angle CFH = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 180^\circ + \alpha - \beta$$

$\therefore \angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M

$$\therefore \angle FEM = \angle HEM = \frac{1}{2} \angle FEH, \angle EFM = \angle HFM = \frac{1}{2} \angle EFH$$

$$\therefore MG \parallel AB$$

$$\therefore \angle AEM = \angle EMG$$





又∵ $AB \parallel CD$

∴ $MG \parallel CD$

∴ $\angle CFM = \angle FMG$

∴ $\angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$

$$= \angle AEM + \angle CFM$$

$$= \angle HEM + \angle AEH + \angle HFM - \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} \angle FEH + \angle AEH + \frac{1}{2} \angle EFH - \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (\angle FEH + \angle EFH) + \angle AEH - \angle CFH$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ + \alpha - \beta) + (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$$

∵ $\angle N$ 是 $\angle EMF$ 的“2系数补角”

∴ $\angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$

∴ $\angle N = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EMF)$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EMF$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \left[90^\circ + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \right]$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{4} \beta + \frac{1}{4} \alpha$$

.....8分

情况 6: 当点 H 在直线 CD 下方, 直线 EF 右侧, 如图

过点 M 作 $MG \parallel AB$

∵ $AB \parallel CD$

∴ $\angle BEF + \angle DFE = 180^\circ$

∵ $\angle BEH = \alpha, \angle DFH = \beta$

∴ $\angle FEH + \angle EFH = 180^\circ - \angle BEH + \angle DFH = 180^\circ - \alpha + \beta$

∵ $\angle EFH$ 与 $\angle FEH$ 两个角的平分线交于点 M

∴ $\angle FEM = \angle HEM = \frac{1}{2} \angle FEH, \angle EFM = \angle HFM = \frac{1}{2} \angle EFH$

∵ $MG \parallel AB$

∴ $\angle BEM = \angle EMG$

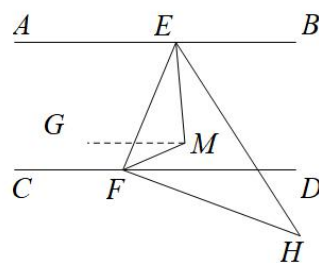
又∵ $AB \parallel CD$

∴ $MG \parallel CD$

∴ $\angle DFM = \angle FMG$

∴ $\angle EMF = \angle EMG + \angle FMG$

$$= \angle BEM + \angle DFM$$





$$\begin{aligned} &= \angle HEM + \angle BEH + \angle HFM - \angle DFH \\ &= \frac{1}{2} \angle FEH + \angle BEH + \frac{1}{2} \angle EFH - \angle DFH \\ &= \frac{1}{2} (\angle FEH + \angle EFH) + \angle BEH - \angle DFH \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha + \beta) + \alpha - \beta \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$\therefore \angle N$ 是 $\angle EMF$ 的 “2 系数补角”

$$\therefore \angle EMF + 2\angle N = 180^\circ$$

$$\therefore \angle N = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle EMF)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle EMF$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \left[90^\circ + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right]$$

$$= 45^\circ - \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \beta$$

.....8 分