2024年北京市初中学业水平考试

数 学 试 卷

姓名________ 准考证号□□□□□□□□ 考场号□□□ 座位号□□

考生须知	1. 本试卷共6页，共两部分，三道大题，28道小题。满分100分。考试时间120分钟。 2. 在试卷和草稿纸上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题、作图题用2B铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5. 考试结束，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

第一部分 选择题

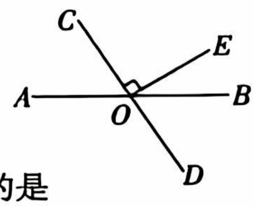
一、选择题(共16分，每题2分)

第1－8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

B 1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是

(A)　　(B)　　(C)　　(D)

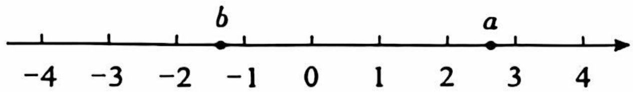
B 2. 如图，直线 AB 和 CD 相交于点 O，$OE \perp OC$. 若 $\angle AOC = 58°$，则 $\angle EOB$ 的大小为



(A) $29°$　　(B) $32°$

(C) $45°$　　(D) $58°$

C 3. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是



(A) $b > -1$　　(B) $|b| > 2$　　(C) $a + b > 0$　　(D) $ab > 0$

C 4. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则实数 c 的值为

(A) -16　　(B) -4　　(C) 4　　(D) 16

A 5. 不透明袋子中仅有红、黄小球各一个，两个小球除颜色外无其他差别. 从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，则两次摸出的都是红球的概率是

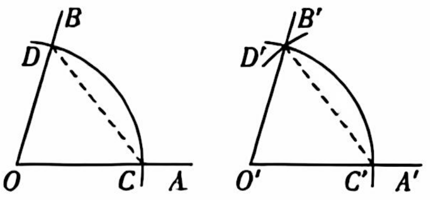
(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{3}{4}$

D 6. 为助力数字经济发展，北京积极推进多个公共算力中心的建设. 北京数字经济算力中心目前已部署上架和调试的设备的算力为 4×10^{17} Flops (Flops是计算机系统算力的一种度量单位)，整体投产后，累计实现的算力将是目前已部署上架和调试的设备的算力的5倍，达到 m Flops，则 m 的值为

(A) 8×10^{16}　　(B) 2×10^{17}　　(C) 5×10^{17}　　(D) 2×10^{18}

A 7. 下面是“作一个角使其等于 $\angle AOB$” 的尺规作图方法.

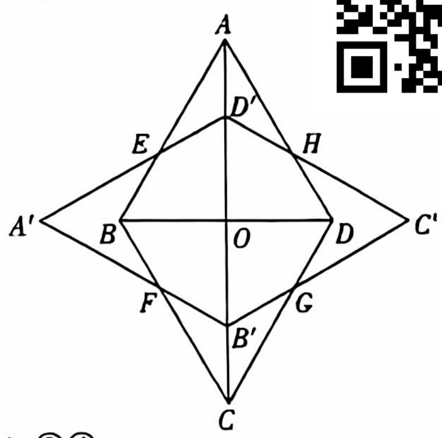
(1) 如图,以点 O 为圆心,任意长为半径画弧,分别交 OA, OB 于点 C, D;
(2) 作射线 $O'A'$,以点 O' 为圆心,OC 长为半径画弧,交 $O'A'$ 于点 C';以点 C' 为圆心,CD 长为半径画弧,两弧交于点 D';
(3) 过点 D' 作射线 $O'B'$,则 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.



上述方法通过判定 $\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$ 得到 $\angle A'O'B' = \angle AOB$,其中判定 $\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$ 的依据是

(A) 三边分别相等的两个三角形全等
(B) 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等
(C) 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等
(D) 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等

B 8. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD = 60°$,O 为对角线的交点. 将菱形 $ABCD$ 绕点 O 逆时针旋转 $90°$ 得到菱形 $A'B'C'D'$,两个菱形的公共点为 E, F, G, H. 对八边形 $BFB'GDHD'E$ 给出下面四个结论:



① 该八边形各边长都相等;
② 该八边形各内角都相等;
③ 点 O 到该八边形各顶点的距离都相等;
④ 点 O 到该八边形各边所在直线的距离都相等.

上述结论中,所有正确结论的序号是

(A) ①③　　(B) ①④　　(C) ②③　　(D) ②④

第二部分　非选择题

二、填空题(共 16 分,每题 2 分)

9. 若 $\sqrt{x-9}$ 在实数范围内有意义,则实数 x 的取值范围是 $x \geq 9$

10. 分解因式:$x^3 - 25x =$ $x(x+5)(x-5)$

11. 方程 $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x} = 0$ 的解为 $x=-1$

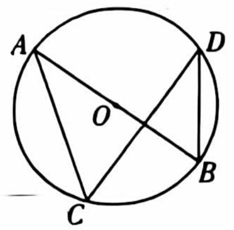
12. 在平面直角坐标系 xOy 中,若函数 $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ 的图象经过点 $(3, y_1)$ 和 $(-3, y_2)$,则 $y_1 + y_2$ 的值是 0 .

13. 某厂加工了 200 个工件,质检员从中随机抽取 10 个工件检测了它们的质量(单位:g),得到的数据如下:

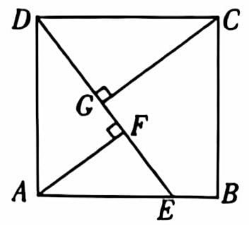
50.03	49.98	50.00	49.99	50.02
49.99	50.01	49.97	50.00	50.02

当一个工件的质量 x(单位:g) 满足 $49.98 \leq x \leq 50.02$ 时,评定该工件为一等品. 根据以上数据,估计这 200 个工件中一等品的个数是 160 .

14、如图，$\odot O$ 的直径 AB 平分弦 CD（不是直径）．若 $\angle D=35°$，则 $\angle C=$ 55 °．



第 14 题图



第 15 题图

15．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 上，$AF\perp DE$ 于点 F，$CG\perp DE$ 于点 G．若 $AD=5$，$CG=4$，则 $\triangle AEF$ 的面积为______．$\frac{27}{8}$

16．联欢会有 A，B，C，D 四个节目需要彩排．所有演员到场后节目彩排开始．一个节目彩排完毕，下一个节目彩排立即开始．每个节目的演员人数和彩排时长（单位：min）如下：

节目	A	B	C	D
演员人数	10	2	10	1
彩排时长	30	10	20	10

已知每位演员只参演一个节目．一位演员的候场时间是指从第一个彩排的节目彩排开始到这位演员参演的节目彩排开始的时间间隔（不考虑换场时间等其他因素）．

若节目按“A-B-C-D”的先后顺序彩排，则节目 D 的演员的候场时间为 60 min；

若使这 23 位演员的候场时间之和最小，则节目应按______的先后顺序彩排．C-A-B-D

三、解答题（共 68 分，第 17 － 19 题每题 5 分，第 20 － 21 题每题 6 分，第 22 － 23 题每题 5 分，第 24 题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27 － 28 题每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17．计算：$(\pi-5)^0+\sqrt{8}-2\sin30°+|-\sqrt{2}|$．　$3\sqrt{2}$

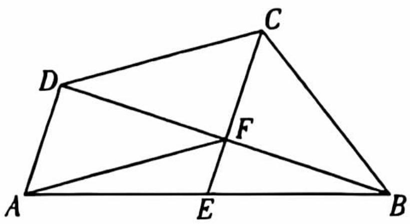
18．解不等式组：$\begin{cases}3(x-1)<4+2x,\\ \dfrac{x-9}{5}<2x.\end{cases}$　$-1<x<7$

19．已知 $a-b-1=0$，求代数式 $\dfrac{3(a-2b)+3b}{a^2-2ab+b^2}$ 的值．　3

20．如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，DB，CE 交于点 F，$DF=FB$，$AF\parallel DC$．

（1）求证：四边形 $AFCD$ 为平行四边形；

（2）若 $\angle EFB=90°$，$\tan\angle FEB=3$，$EF=1$，求 BC 的长．



(1) ∵ E是AB中点，DF=FB，F是BD中点，

∴ EF是△ABD的中位线

∴ EF // AD，∵ C.F.E三点共线

∴ CF // AD，∵ AF // CD

∴ 四边形AFCD为平行四边形

(2) ∵ EF为△ABD中位线，

∴ AD=2EF　∵ EF=1　∴ AD=2.

∵ 四边形AFCD为平行四边形

∴ CF=AD=2.

∵ ∠EFD=90° 且 tan∠EFB=90°

∴ BF=3，在Rt△CFB中，

$BC^2=CF^2+BF^2$　∴ $BC=\sqrt{13}$

21．为防治污染，保护和改善生态环境，自2023年7月1日起，我国全面实施汽车国六排放标准6b阶段（以下简称"标准"）．对某型号汽车，"标准"要求A类物质排放量不超过35 mg/km，A，B两类物质排放量之和不超过50 mg/km．

已知该型号某汽车的A，B两类物质排放量之和原为92 mg/km．经过一次技术改进，该汽车的A类物质排放量降低了50%，B类物质排放量降低了75%，A，B两类物质排放量之和为40 mg/km．判断这次技术改进后该汽车的A类物质排放量是否符合"标准"，并说明理由．

解：设该汽车A类物质排放量为x，B类物质排放量为y

$$\begin{cases} x+y=92 \\ 0.5x+0.25y=40 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=68 \\ y=24 \end{cases}$$

技术改进后A类物质排放量为 $0.5x=0.5\times 68=34<35\,mg/km$

∴符合"标准"

22．在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 与 $y=-kx+3$ 的图象交于点 $(2,1)$．

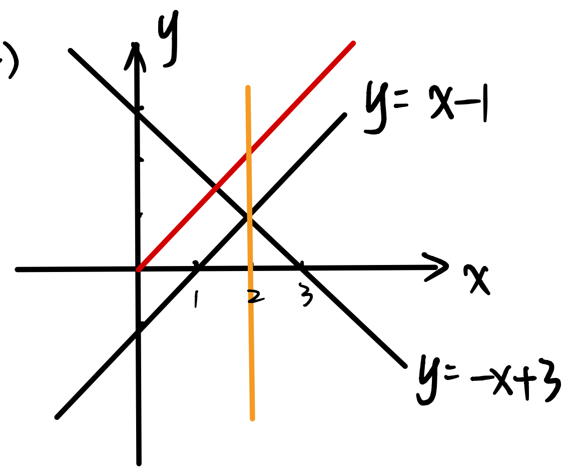
（1）求 k,b 的值；

（2）当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx\ (m\neq 0)$ 的值既大于函数 $y=kx+b$ 的值，也大于函数 $y=-kx+3$ 的值，直接写出 m 的取值范围．

(1) 将点(2,1)分别代入 $y=kx+b$ 与 $y=-kx+3$

$$\begin{cases} 2k+b=1 \\ -2k+3=1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

(2)

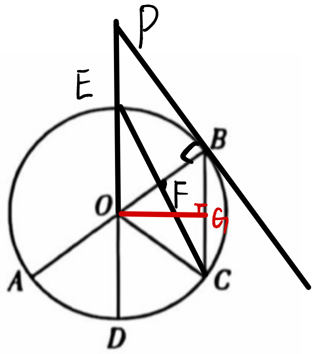


$m\geq 1$

24. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C,D 在 $\odot O$ 上，OD 平分 $\angle AOC$.

(1) 求证：$OD \parallel BC$；

(2) 延长 DO 交 $\odot O$ 于点 E，连接 CE 交 OB 于点 F，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 DE 的延长线于点 P. 若 $\frac{OF}{BF}=\frac{5}{6}$，$PE=1$，求 $\odot O$ 半径的长.



(1) ∵ 同弧所对应的圆周角是圆心角的一半

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$ ∴ $\angle AOC = 2\angle ABC$

∵ OD 平分 $\angle AOC$ ∴ $\angle AOD = \angle ABC$

∴ $OD \parallel BC$

(2) ∵ $OD \parallel BC$ 即 $OE \parallel BC$ ∴ $\angle OEF = \angle FCB$.

∴ 在 $\triangle OFE$ 和 $\triangle BCF$.

$$\begin{cases} \angle EFO = \angle BFC \\ \angle OEF = \angle FCB \\ \angle EOF = \angle FBC \end{cases}$$ ∴ $\triangle OFE \backsim \triangle BFC$

∴ $\frac{OE}{BC} = \frac{OF}{BF} = \frac{5}{6}$ 设 $OE=5x$. 则 $BC=6x$. 作 $OG \perp BC$. 则 $BG=3x$. $OB=5x$

∴ $\cos\angle OBC = \frac{3}{5}$. 设半径为 r.

则在 $\triangle POB$ 中. $\cos\angle POB = \frac{r}{r+1} = \frac{3}{5}$ ∴ $r=1.5$

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 - 2a^2x\ (a \neq 0)$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求抛物线的顶点坐标；$(1,-1)$

(2) 已知 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 是抛物线上的两点．若对于 $x_1 = 3a$，$3 \leqslant x_2 \leqslant 4$，都有 $y_1 < y_2$，求 a 的取值范围．

① $a>0$ 时 $t=a$

$\because x_2<a$ 时，$M'(-a,y_1)$ $\therefore -a>x_2$ 不成立．

$\because x_2>a$ 时．$\therefore x_2>x_1$　$3>3a$　$1>a$

② $a<0$ 时　$M'(-a,y_1)$　$\therefore -a>x_2$　$-a>4$　$-4>a$

$\therefore a<-4$ 或 $0<a<1$.

27. 已知 $\angle MAN = \alpha\ (0° < \alpha < 45°)$，点 B，C 分别在射线 AN，AM 上，将线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 $180° - 2\alpha$ 得到线段 BD，过点 D 作 AN 的垂线交射线 AM 于点 E．

(1) 如图 1，当点 D 在射线 AN 上时，求证：C 是 AE 的中点；

(2) 如图 2，当点 D 在 $\angle MAN$ 内部时，作 $DF \parallel AN$，交射线 AM 于点 F，用等式表示线段 EF 与 AC 的数量关系，并证明．

(1) 连 CD. $AC=CD$. $CD=CE$

(2) 作 $BA=BG$，找 EF 中点 H.

$\triangle ACB \cong \triangle GDB$

$\therefore \angle BGD = \alpha$.

$\triangle FDE$ 为 Rt△，H 为中

$\therefore \angle HFD = \angle HDF = \alpha$

$\therefore \angle GHD = 2\alpha = \angle HGD$

$\therefore HD = HG = AC$　$\therefore AC=2$

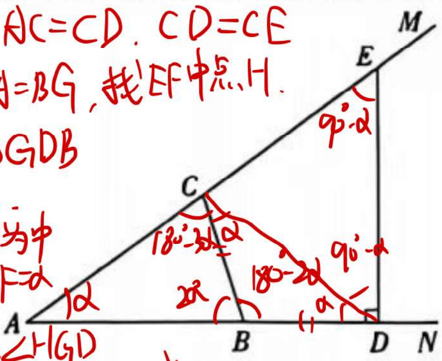


图 1

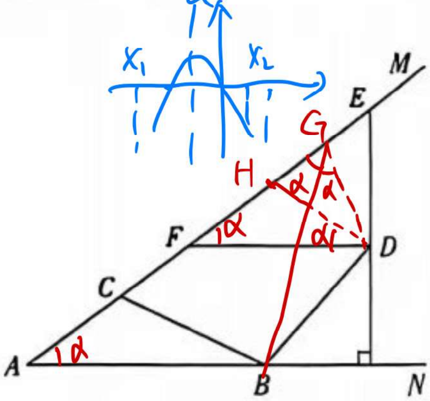
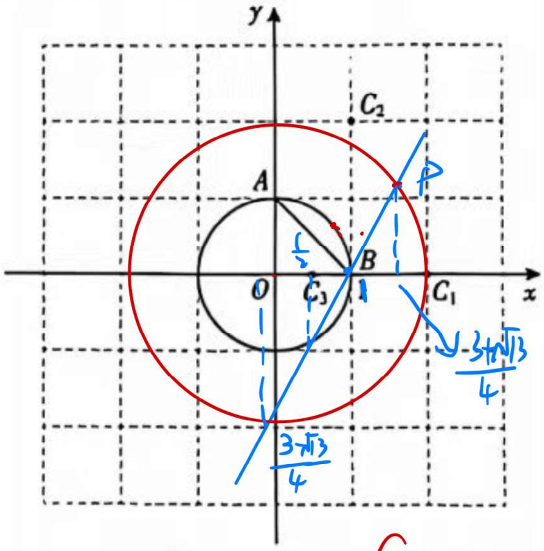


图 2

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1．对于 $\odot O$ 的弦 AB 和不在直线 AB 上的点 C，给出如下定义：若点 C 关于直线 AB 的对称点 C' 在 $\odot O$ 上或其内部，且 $\angle ACB = \alpha$，则称点 C 是弦 AB 的"α 可及点"．

(1) 如图，点 $A(0,1)$，$B(1,0)$．



① 在点 $C_1(2,0)$，$C_2(1,2)$，$C_3(\frac{1}{2},0)$ 中，点 $\underline{C_2}$ 是弦 AB 的"α 可及点"，其中 $\alpha = \underline{45}$ °；

② 若点 D 是弦 AB 的"90° 可及点"，则点 D 的横坐标的最大值为 $\underline{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$；

(2) 已知 P 是直线 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 上一点，且存在 $\odot O$ 的弦 MN，使得点 P 是弦 MN 的"60° 可及点"．记点 P 的横坐标为 t，直接写出 t 的取值范围．$\frac{3-\sqrt{13}}{4} \leq t < \frac{1}{2}$ 或 $1 < t \leq \frac{3+\sqrt{13}}{4}$