2023 北京丰台高一（下）期末

数　学

2023.07

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,k)$．若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则实数 $k=$

（A）1　　（B）-1　　（C）4　　（D）-4

（2）设 i 是虚数单位，则 $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$1-\mathrm{i}$　　（C）$-1+\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

（3）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 x 轴的非负半轴为始边，终边关于原点 O 对称. 若角 α 的终边与单位圆 $\odot O$ 交于点 $P(\dfrac{2}{3},-\dfrac{\sqrt{5}}{3})$，则 $\cos\beta=$

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$-\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　（D）$-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

（4）已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　（B）$-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　（C）$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　　（D）$-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

（5）《数书九章》是中国南宋时期杰出数学家秦九韶的著作，在该书的第五卷 “三斜求积”中，提出了由三角形的三边直接求三角形面积的方法：“以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上，以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实. 一为从隅，开平方得积. ”把以上这段文字写成公式，就是 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$（其中 S 为三角形面积，a 为小斜，b 为中斜，c 为大斜）.在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$c=3$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（6）已知 m，n 是两条不重合直线，α，β 是两个不重合平面，则下列说法正确的是

（A）若 $m\parallel n$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel\alpha$

（B）若 $\alpha\perp\beta$，$m\parallel\alpha$，则 $m\perp\beta$

（C）若 $\alpha\perp\beta$，$n\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $m\perp\beta$

（D）若 $\alpha\perp\beta$，$m\not\subset\alpha$，$m\perp\beta$，则 $m\parallel\alpha$

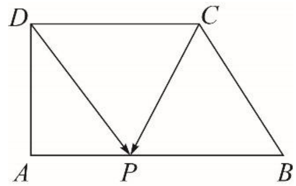
（7）将函数 $y=\cos 2x$ 图象上的点 $P(\dfrac{\pi}{6},m)$ 向右平移 $s(s>0)$ 个单位长度得到点 P'. 若 P'位于函数

$y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象上，则

（A）$m=\frac{1}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$　　（B）$m=\frac{1}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

（C）$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$　　（D）$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

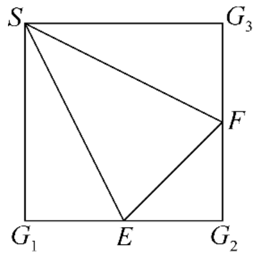
（8）如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB\,/\!/\,CD,\ AB=3,\ CD=2,\ AD=\sqrt{3},$ $\angle BAD=90^\circ$. 若 P 为线段 AB 上一动点，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 的最大值为



（A）2　　（B）3

（C）6　　（D）7

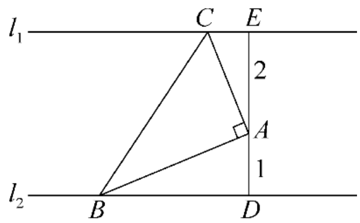
（9）如图，在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中， E,F 分别为边 G_1G_2， G_2G_3 的中点. 现沿线段 SE， SF
及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1,G_2,G_3 三点重合，重合后的点记为 G. 在该四面体 $G-SEF$ 中，作 $GO\perp$ 平面 SEF，垂足为 O，则 O 是△ SEF 的



（A）垂心　　（B）内心

（C）外心　　（D）重心

（10）如图，已知直线 $l_1\,/\!/\,l_2$， A 为 l_1,l_2 之间一定点，并且点 A 到 l_1 的距离为 2，到 l_2 的距离为 1. B 为直线 l_2 上一动点，作 $AC\perp AB$，且使 AC 与直线 l_1 交于点 C，则△ ABC 面积的最小值为



（A）1　　（B）$\frac{3}{2}$

（C）2　　（D）4

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知某圆柱的底面半径长为1，母线长为2，则该圆柱的侧面积为__.

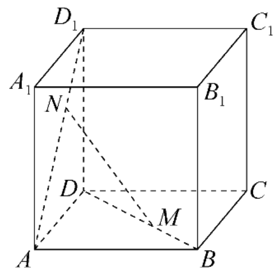
（12）某运动员射击一次，命中10 环的概率为0.2，命中9 环的概率为0.4，则他射击一次命中的环数不超过8 的概率为____.

（13）在复平面内， O 是原点，向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $z_1=2-\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $z_2=a-2\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$. 若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，则 $a=$__.

（14）若函数 $f(x)=\sin x+\cos(x+\varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，则常数 φ 的一个取值为____.

（15）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M， N 分别为线段 BD,AD_1 上的

动点，给出下列四个结论：



①当 M 为线段 BD 的中点时，M，N 两点之间距离的最小值为 $\sqrt{2}$；

②当 N 为线段 AD_1 的中点时，三棱锥 $N-MB_1D_1$ 的体积为定值；

③存在点 M，N，使得 $MN\perp$ 平面 AB_1C；

④当 M 为靠近点 B 的三等分点时，平面 D_1AM 截该正方体所得截面的周长为 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

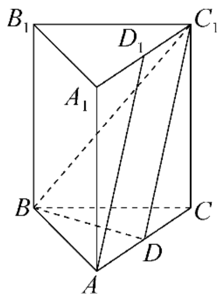
在△ ABC 中，$\sqrt{3}b\cos A-a\sin B=0$.

（Ⅰ）求 $\angle A$；

（Ⅱ）若 $c=2$，且△ ABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 a 的值.

（17）（本小题 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,D_1 分别为棱 AC,A_1C_1 的中点.



（Ⅰ）求证：AD_1 // 平面 BDC_1；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，

求证：平面 $BDC_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.

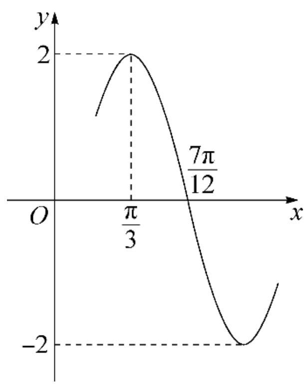
条件①：$BD\perp AD_1$；

条件②：$BA=BC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.



（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)+2\cos 2x$，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值以及取得最大值时 x 的值.

（19）（本小题 14 分）

在新高考背景下，北京高中学生需从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物这 6 个科目中选择 3 个科目学习并参加相应的等级性考试. 为提前了解学生的选科意愿，某校在期中考试之后，组织该校高一学生进行了模拟选科. 为了解物理和其他科目组合的人数分布情况，某教师整理了该校高一（1）班和高一（2）班的相关数据，如下表：

科目 人数 班级	物理+化学	物理+生物	物理+思想政治	物理+历史	物理+地理
高一(1)班	10	6	2	1	7
高一(2)班	15	9	3	1	6

其中高一（1）班共有 40 名学生，高一（2）班共有 38 名学生.假设所有学生的选择互不影响.

（Ⅰ）从该校高一（1）班和高一（2）班所有学生中随机选取 1 人，求此人在模拟选科中选择了“物理+化学”的概率；

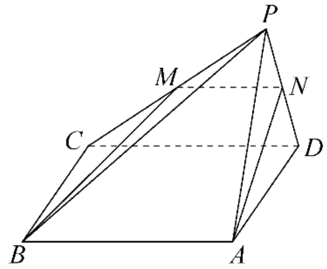
（Ⅱ）从表中选择“物理+思想政治”的学生中随机选取 2 人参加座谈会，求这 2 人均来自高一（2）班的概率；

（Ⅲ）该校在本学期期末考试之后组织高一学生进行了第二次选科，现从高一（1）班和高一（2）班各随机选取 1 人进行访谈，发现他们在第二次选科中都选择了“物理+历史”. 根据这一结果，能否认为在第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生了变化？说明理由.

（20）（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，M 为棱 PC 的中点，平面 ABM

与棱 PD 交于点 N .



（Ⅰ）求证：N 为棱 PD 的中点；

（Ⅱ）若平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $AB=4, AD=2$，

$\triangle PAD$ 为等边三角形，求四棱锥 $P-ABMN$ 的体积.

（21）（本小题 13 分）

设非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_k=(x_k,\ y_k)$， $\boldsymbol{\beta}_k=(y_k,\ -x_k)$ $(k\in \mathbf{N}^*)$，并定义 $\begin{cases} x_{k+2}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k, \\ y_{k+2}=\boldsymbol{\beta}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k. \end{cases}$

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,\ -2)$，求 $|\boldsymbol{\alpha}_1|,|\boldsymbol{\alpha}_2|,|\boldsymbol{\alpha}_3|$；

（Ⅱ）写出 $|\boldsymbol{\alpha}_k|,|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}|,|\boldsymbol{\alpha}_{k+2}|$ $(k\in \mathbf{N}^*)$ 之间的等量关系，并证明；

（Ⅲ）若 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2|=1$，求证：集合 $\{\boldsymbol{\alpha}_k | k\in \mathbf{N}^*\}$ 是有限集.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2022～2023 学年度第二学期期末练习

高一数学参考答案

2023. 07

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	B	A	B	D	A	C	A	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11． 4π　　12． 0.4　　13． -1

14． π（答案不唯一）　　15． ②③

（注：15 题给出的结论中，有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.）

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}b\cos A-a\sin B=0$，

所以由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\cos A-\sin A\sin B=0$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，

所以 $\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$，即 $\tan A=\sqrt{3}$.

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.　　……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

因为 $c=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，

所以由 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 得 $\dfrac{1}{2}b\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$，

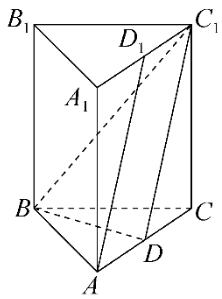
解得 $b=6$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $a^2=6^2+2^2-2\times6\times2\cos\dfrac{\pi}{3}$，

解得 $a^2=28$，

所以 $a=2\sqrt{7}$.　　……………14 分

17.（本小题 14 分）



解：（Ⅰ）因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以四边形 ACC_1A_1 是平行四边形.

因为 D，D_1 分别为棱 AC，A_1C_1 的中点，

所以 $AD=C_1D_1$，且 $AD\ /\!/\ C_1D_1$，所以四边形 ADC_1D_1 是平行四边形，

于是 $AD_1\ /\!/\ C_1D$.

又 $AD_1 \not\subset$ 平面 BDC_1， $C_1D \subset$ 平面 BDC_1，

所以 $AD_1 /\!/$ 平面 BDC_1. ················7 分

（Ⅱ）选①：

由（Ⅰ）知， $AD_1 /\!/ C_1D$，且 $BD \perp AD_1$，所以 $BD \perp C_1D$.

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $C_1C \perp$ 平面 ABC.

又 $BD \subset$ 平面 ABC，所以 $BD \perp C_1C$.

因为 $C_1D \cap C_1C = C_1$，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1.

因为 $BD \subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $BDC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1. ················14 分

选②：

因为 $BA = BC$，且 D 为棱 AC 的中点，

所以 $BD \perp AC$.

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $C_1C \perp$ 平面 ABC.

又 $BD \subset$ 平面 ABC，所以 $BD \perp C_1C$.

因为 $AC \cap C_1C = C$，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1.

因为 $BD \subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $BDC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1. ················14 分

18.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由图可得 $A=2$，且 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $T=\pi$，即 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

又 $f(\dfrac{\pi}{3})=2$，所以 $2\sin(2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=2$，

即 $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$.

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，

故 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$. ················8 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=f(x)+2\cos 2x$，

所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$,

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时， $g(x)$ 有最大值为 2. ……………15 分

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）依题意得高一（1）班和高一（2）班学生共有 $40+38=78$ 人，即该随机试验的样本空间有 78 个样本点.

设事件 $A=$“此人在模拟选科中选择了‘物理+化学’”,

则事件 A 包含 $10+15=25$ 个样本点，

所以 $P(A)=\dfrac{25}{78}$. ……………3 分

（Ⅱ）依题意得高一（1）班选择“物理+思想政治”的学生有 2 人，分别记为 A_1， A_2；

高一（2）班选择“物理+思想政治”的学生有 3 人，分别记为 B_1， B_2， B_3 .

该随机试验的样本空间可以表示为：

$\Omega=\{A_1A_2$， A_1B_1， A_1B_2， A_1B_3， A_2B_1， A_2B_2， A_2B_3， B_1B_2， B_1B_3， $B_2B_3\}$，

即 $n(\Omega)=10$.

设事件 $B=$“这 2 人均来自高一（2）班”，则 $B=\{B_1B_2$， B_1B_3， $B_2B_3\}$，

所以 $n(B)=3$，故 $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{10}$. ……………9 分

（Ⅲ）设事件 $C=$“从高一（1）随机选取 1 人，此人在第二次选科中选择了‘物理+历史’”,

事件 $D=$“从高一（2）班随机选取 1 人，此人在第二次选科中选择了‘物理+历史’”,

事件 $E=$“这两人在第二次选科中都选择了‘物理+历史’” .

假设第二次选科中选择“物理+历史”的人数没有发生变化，

则由模拟选科数据可知， $P(C)=\dfrac{1}{40}$， $P(D)=\dfrac{1}{38}$.

所以 $P(E)=P(CD)=P(C)P(D)=\dfrac{1}{40}\times\dfrac{1}{38}=\dfrac{1}{1520}$.

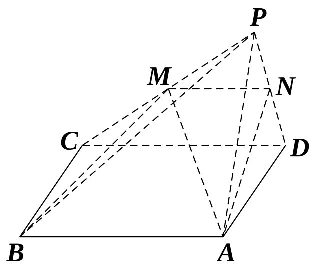
答案示例 1：可以认为第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生变化. 理由如下：

$P(E)$ 比较小，概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生，就有理由认为第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生了变化.

答案示例 2：无法确定第二次选科中选择“物理+历史”的人数是否发生变化. 理由如下：

事件 E 是随机事件，$P(E)$ 虽然比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生，所以无法确定第二次选科中选择“物理+历史”的人数是否有变化. ……………14 分

20．（本小题 15 分）



解：（Ⅰ）因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\ /\!/\ CD$.

又 $AB\not\subset$ 平面 PCD， $CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB\ /\!/$ 平面 PCD .

因为 $AB\subset$ 平面 $ABMN$， 平面 $ABMN\bigcap$ 平面 $PCD=MN$，

所以 $AB\ /\!/\ MN$， 即 $MN\ /\!/\ CD$.

又 M 为棱 PC 的中点，所以 N 为棱 PD 的中点. ……………7 分

（Ⅱ）因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp AD$.

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\bigcap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $AB\perp AN$， $AB\perp PD$.

因为△ PAD 为等边三角形， N 为棱 PD 的中点，所以 $PD\perp AN$.

因为 $AB\bigcap AN=A$，所以 $PD\perp$ 平面 $ABMN$，

即点 P 到平面 $ABMN$ 的距离为 PN .

因为 $AD=2$，所以 $PN=1$.

连接 AM， 则四边形 $ABMN$ 的面积 $S=S_{\Delta AMB}+S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}(AB+MN)\times AN=3\sqrt{3}$，

所以四棱锥 $P-ABMN$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$. ……………15 分

21．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-2)$，所以 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|\boldsymbol{\alpha}_2|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

依题意得 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,-3)$，所以 $x_3=\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=3\times 1+(-2)\times 2=-1$, $y_3=\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=(-2)\times 1+(-3)\times 2=-8$，

即 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-8)$，所以 $|\boldsymbol{\alpha}_3|=\sqrt{(-1)^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$. ……………5 分

（Ⅱ）$|\boldsymbol{\alpha}_k|,|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}|,|\boldsymbol{\alpha}_{k+2}|$ 的等量关系是 $|\boldsymbol{\alpha}_{k+2}|=|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}||\boldsymbol{\alpha}_k|\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

证明如下：

依题意得 $|\boldsymbol{\alpha}_k|=\sqrt{x_k^2+y_k^2}$ ，$|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}|=\sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2}$，

所以 $|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}||\boldsymbol{\alpha}_k|=\sqrt{x_k^2+y_k^2}\sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2}=\sqrt{x_k^2x_{k+1}^2+x_k^2y_{k+1}^2+x_{k+1}^2y_k^2+y_k^2y_{k+1}^2}$.

因为 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}=(y_{k+1},-x_{k+1})$，所以 $\begin{cases}x_{k+2}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k=x_{k+1}x_k+y_{k+1}y_k,\\ y_{k+2}=\boldsymbol{\beta}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k=x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k,\end{cases}$

即 $\boldsymbol{\alpha}_{k+2}=(x_kx_{k+1}+y_ky_{k+1},x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)$，

所以 $|\boldsymbol{\alpha}_{k+2}|=\sqrt{(x_kx_{k+1}+y_ky_{k+1})^2+(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)^2}=\sqrt{x_k^2x_{k+1}^2+x_k^2y_{k+1}^2+x_{k+1}^2y_k^2+y_k^2y_{k+1}^2}$，

故 $|\boldsymbol{\alpha}_{k+2}|=|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}||\boldsymbol{\alpha}_k|$. ……………9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）及 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2|=1$ 得 $|\boldsymbol{\alpha}_3|=1$. 依此类推得 $|\boldsymbol{\alpha}_k|=1\ (k\in\mathbf{N}^*)$，可设 $\boldsymbol{\alpha}_k=(\cos\theta_k,\sin\theta_k)$，

则 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=(\cos\theta_{k+1},\sin\theta_{k+1})$，$\boldsymbol{\beta}_{k+1}=(\sin\theta_{k+1},-\cos\theta_{k+1})$.

依题意得，

$x_{k+2}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k=\cos\theta_{k+1}\cos\theta_k+\sin\theta_{k+1}\sin\theta_k=\cos(\theta_{k+1}-\theta_k)$，

$y_{k+2}=\boldsymbol{\beta}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_k=\sin\theta_{k+1}\cos\theta_k-\cos\theta_{k+1}\sin\theta_k=\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_{k+2}=(\cos(\theta_{k+1}-\theta_k),\sin(\theta_{k+1}-\theta_k))$.

同理得 $\boldsymbol{\alpha}_{k+3}=(\cos[(\theta_{k+1}-\theta_k)-\theta_{k+1}],\sin[(\theta_{k+1}-\theta_k)-\theta_{k+1}])=(\cos(-\theta_k),\sin(-\theta_k))$，

$\boldsymbol{\alpha}_{k+4}=(\cos[(-\theta_k)-(\theta_{k+1}-\theta_k)],\sin[(-\theta_k)-(\theta_{k+1}-\theta_k)])=(\cos(-\theta_{k+1}),\sin(-\theta_{k+1}))$，

$\boldsymbol{\alpha}_{k+5}=(\cos[(-\theta_{k+1})-(-\theta_k)],\sin[(-\theta_{k+1})-(-\theta_k)])=(\cos(\theta_k-\theta_{k+1}),\sin(\theta_k-\theta_{k+1}))$，

$\boldsymbol{\alpha}_{k+6}=(\cos[(\theta_k-\theta_{k+1})-(-\theta_{k+1})],\sin[(\theta_k-\theta_{k+1})-(-\theta_{k+1})]=(\cos\theta_k,\sin\theta_k)$.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_{k+6}=\boldsymbol{\alpha}_k\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

综上，集合 $\{\boldsymbol{\alpha}_k|k\in\mathbf{N}^*\}$ 是有限集. ……………13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）