东城区 2022—2023 学年度第二学期期末统一检测

高 一 数 学

2023.7

本试卷共4页，满分100分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共30分)

一、选择题共10小题，每小题3分，共30分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知向量 $a=(m,1)$, $b=(-1,2)$. 若 $a//b$, 则 $m=$

(A)2　　(B)1　　(C)-1　　(D)$-\frac{1}{2}$

(2)若复数 z 满足 $i\cdot z=1-2i$, 则 $z=$

(A)$-2+i$　　(B)$-2-i$　　(C)$1+2i$　　(D)$-1+2i$

(3)某中学为了解在校高中学生的身高情况，在高中三个年级各随机抽取了10%的学生，并分别计算了三个年级抽取学生的平均身高，数据如下表：

年级	高一	高二	高三
抽样人数	36	34	30
平均身高	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$

则该校高中学生的平均身高可估计为

(A)$3.6\bar{x}+3.4\bar{y}+3.0\bar{z}$　　(B)$\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{2}$

(C)$0.36\bar{x}+0.34\bar{y}+0.30\bar{z}$　　(D)$\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}$

(4)已知圆锥的轴截面是一个边长为2的等边三角形，则该圆锥的体积为

(A)$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　(B)π　　(C)$\sqrt{2}\pi$　　(D)2π

(5)设 a,b 为实数，若 $\frac{a+i}{b-2i}=1+i$, 则

(A)$a=1,b=-1$　　(B)$a=5,b=3$

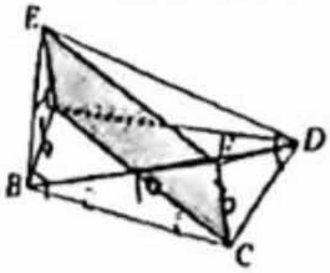
(C)$a=1,b=2$　　(D)$a=1,b=3$

(6)将函数 $y=\cos x-\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，所得图象的函数解析式为

(A)$y=-\sqrt{2}\sin x$　　(B)$y=\sqrt{2}\cos x$

(C)$y=-\sin x-\cos x$　　(D)$y=\cos x+\sin x$

(7)已知长方形墙 $ACFE$ 把地面上 B,D 两点隔开,该墙与地面垂直,长 10 米,高 3 米,已测得 $AB=6$ 米,$BC=8$ 米.现欲通过计算,能唯一求得 B,D 两点之间的距离,需要进一步测量的几何量可以为



(A)点 D 到 AC 的距离

(B)CD 长度和 DF 长度

(C)$\angle ACB$ 和 $\angle ADC$

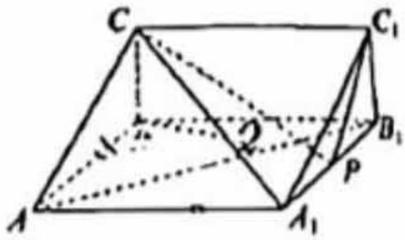
(D)CD 长度和 $\angle ACD$

(8)设 a,b 为非零向量,$|a|=|b|$,则"a,b 夹角为钝角"是"$|a+b|<\sqrt{2}|a|$"的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(9)如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp BC$,$AA_1=AB$,P 为棱 A_1B_1 的中点,Q 为线段 A_1C 上的动点.以下结论中正确的是



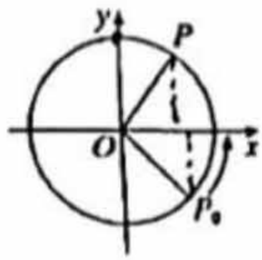
(A)存在点 Q,使 $BQ//AC$

(B)不存在点 Q,使 $BQ\perp B_1C_1$

(C)对任意点 Q,都有 $BQ\perp AB_1$

(D)存在点 Q,使 $BQ//$平面 PCC_1

(10)如图,质点 P 在以坐标原点 O 为圆心,半径为 1 的圆上逆时针作匀速圆周运动,P 的角速度大小为 2 rad/s,起点 P_0 为射线 $y=-x(x\geqslant 0)$ 与 $\odot O$ 的交点.则当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时,动点 P 的纵坐标 y 关于 t(单位:s)的函数的单调递增区间是



(A)$[0,\frac{\pi}{2}]$　　(B)$[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}]$

(C)$[\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8}]$　　(D)$[\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{4}]$

第二部分(非选择题　共 70 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分。

(11)已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,$\tan\beta=\frac{1}{3}$,则 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值为________

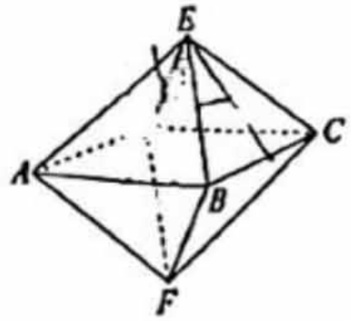
(12)在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中,E 为 AB 中点,则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=$________

(13)下表是某市 6 月 1 日至 14 日的空气质量指数统计表.由表判断,从 6 月______日开始,连续三天的空气质量指数方差最大.

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空气质量指数	60	79	90	50	38	26	32	49	48	62	52	38	30	37

(14)已知 z 为复数,且 $|z-2i|=1$,写出满足上述条件的一个复数 $z=$________;$|z|$ 的最大值为________.

(15)金刚石也被称作钻石，是天然存在的最硬的物质，可以用来切割玻璃，也用作钻探机的钻头．金刚石经常呈现如图所示的"正八面体"外形．正八面体由八个全等的等边三角形围成，体现了数学的对称美．下面给出四个结论：



①AE//平面 CDF；

②平面 $ABE\perp$平面 BCF；

③过点 E 存在唯一一条直线与正八面体的各个面所成角均相等；

④以正八面体每个面的中心为顶点的正方体的棱长是该正八面体棱长的$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 10 分)

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边为 a,b,c. $C=\frac{2}{3}\pi$，$a=\frac{5}{7}c$.

(Ⅰ)求 $\sin A$；

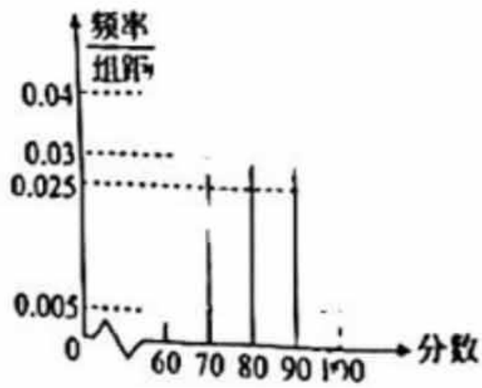
(Ⅱ)若 $c=7$，求$\triangle ABC$的面积.

(17)(本小题 10 分)

某市举办"强国有我，爱我中华"科技知识竞赛，赛后将参赛的 2000 名学生成绩分成 4 组：①$60\leqslant x<70$，②$70\leqslant x<80$，③$80\leqslant x<90$，④$90\leqslant x\leqslant 100$，并进行统计分析，公布了如图所示的频率分布直方图.

(Ⅰ)估计这 2000 名学生科技知识竞赛成绩的平均数(同一组中的数据用该组区间的中点值作为代表)；

(Ⅱ)某同学获知自己的成绩进入本次竞赛成绩前 20%，估计该同学的成绩不低于多少分？



(18)(本小题 10 分)

已知函数 $f(x)=a\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x(a\in\mathbf{R},\omega>0)$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

(Ⅱ)从下列三个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定，并求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值.

条件①：$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}+1$；

条件②：$-\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的一个零点；

条件③：$f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第(Ⅱ)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

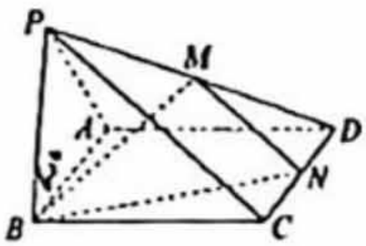
(19)(本小题 10 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形，侧面 PAB 是正三角形，M 是 PD 上一动点，N 是 CD 中点.

(Ⅰ)当 M 是 PD 中点时，求证：PC∥平面 BMN；

(Ⅱ)若 $\angle ABC=60^\circ$，求证：$PC\perp AB$；

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下，是否存在点 M，使得 $PC\perp BM$？若存在，求 $\frac{PM}{MD}$ 的值；若不存在，请说明理由.



(20)(本小题 10 分)

对于三维向量 $a_k=(x_k,y_k,z_k)(x_k,y_k,z_k\in\mathbf{N},k=0,1,2,\cdots)$，定义"$F$ 变换"：$a_{k+1}=F(a_k)$，其中，$x_{k+1}=|x_k-y_k|,y_{k+1}=|y_k-z_k|,z_{k+1}=|z_k-x_k|$. 记 $\langle a_k\rangle=x_ky_kz_k$，$\|a_k\|=x_k+y_k+z_k$.

(Ⅰ)若 $a_0=(3,1,2)$，求 $\langle a_1\rangle$ 及 $\|a_1\|$；

(Ⅱ)证明：对于任意 a_0，经过若干次 F 变换后，必存在 $K\in\mathbf{N}^*$，使 $\langle a_K\rangle=0$；

(Ⅲ)已知 $a_1=(p,2,q)(q\geq p)$，$\|a_1\|=2024$，将 a_1 再经过 m 次 F 变换后，$\|a_m\|$ 最小，求 m 的最小值.

东城区 2022—2023 学年度第二学期期末统一检测

高一数学参考答案及评分标准

2023.7

一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

(1)D　(2)B　(3)C　(4)A　(5)B

(6)C　(7)D　(8)A　(9)C　(10)B

二、填空题(共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

(11)1　(12)-1

(13)3　(14)i;3

(15)①④

三、解答题(共 5 小题,每小题 10 分,共 50 分)

(16)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)因为 $C=\frac{2}{3}\pi$,$a=\frac{5}{7}c$,

在$\triangle ABC$中,由正弦定理得,$\sin A=\frac{5}{7}\sin C=\frac{5}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$. …………………… 3 分

(Ⅱ)因为 $c=7$,$a=\frac{5}{7}c$,所以 $a=5$.

在$\triangle ABC$中,$C=\frac{2}{3}\pi$,$a=5$,$c=7$,

根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得,$49=25+b^2-2\times 5b\times(-\frac{1}{2})$.

整理得,$b^2+5b-24=0$.

解得 $b=3$ 或 $b=-8$(舍).

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$. ………………………………… 10 分

(17)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)因为$\overline{x}=65\times 0.05+75\times 0.3+85\times 0.4+95\times 0.25=83.5$,

所以这 2000 名学生竞赛成绩的平均数可以估计为 83.5. ………………………… 5 分

(Ⅱ)因为[90,100]这组数据占总数的 25%,该同学的成绩进入本次竞赛成绩前 20%,

所以 $100-10\times\frac{20\%}{25\%}=92$.

所以可以估计该同学的成绩不低于 92 分. ………………………………………… 10 分

(18)(本小题 10 分)

解：(Ⅰ)因为 $f(x)=a\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x(a\in\mathbf{R},\omega>0)$，

所以 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f(x)$为偶函数，

所以 $\forall x\in\mathbf{R},f(-x)=f(x)$.

即 $\forall x\in\mathbf{R},a\sin(-2\omega x)+2\cos^2(-\omega x)=a\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x$.

即 $\forall x\in\mathbf{R},a\sin 2\omega x=0$.

所以 $a=0$. ………………………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)$f(x)=a\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x$

$=a\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+1$

$=\sqrt{a^2+1}\sin(2\omega x+\varphi)+1$，其中 $\tan\varphi=\frac{1}{a}$. ……………………………………… 5 分

选择条件①③：

因为函数 $f(x)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$. 所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.

因为 $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}+1$，即 $a\sin(2\times\frac{\pi}{4})+2\cos^2\frac{\pi}{4}=a+1=\sqrt{3}+1$，所以 $a=\sqrt{3}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$. ……………………………………………………………… 7 分

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $0\leqslant 2x\leqslant\pi$.

所以$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值 3；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值 0. ………………………………… 10 分

选择条件②③：

因为函数 $f(x)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$. 所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.

因为 $-\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的一个零点，

即 $a\sin(-2\times\frac{\pi}{6})+2\cos^2(-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{2}=0$，所以 $a=\sqrt{3}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$. …………………………………………………………… 7 分

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $0\leqslant 2x\leqslant\pi$.

所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 3；

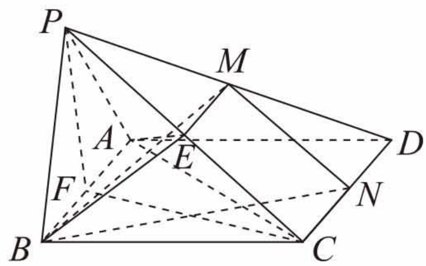
当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 0. ………………………………… 10 分

(19)（本小题 10 分）

解：(Ⅰ)因为点 M 是 PD 中点，点 N 是 CD 中点，所以 $MN/\!/PC$.

因为 $PC\not\subset$ 平面 BMN，$MN\subset$ 平面 BMN，

所以 $PC/\!/$ 平面 BMN. ……………………………… 3 分



(Ⅱ)如图，取 AB 中点 F，连接 AC，PF，CF.

因为侧面 PAB 是正三角形，所以 $PF\perp AB$.

因为底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

所以 $CF\perp AB$.

因为 $PF\perp AB$，$CF\perp AB$，$PF\cap CF=F$，PF，$CF\subset$ 平面 PFC，

所以 $AB\perp$ 平面 PFC.

因为 $PC\subset$ 平面 PFC，所以 $PC\perp AB$. ………………………………………………… 7 分

(Ⅲ)如图，取 PC 中点 E，连接 BE，AE.

因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形，侧面 PAB 是正三角形，

所以 $PB=AB=BC$.

所以 $BE\perp PC$.

又因为 $PC\perp AB$，$AB\cap BE=B$，

所以 $PC\perp$ 平面 ABE.

过 E 作 $EM/\!/CD$ 交 PD 于点 M.

因为 $EM/\!/CD/\!/AB$，

所以点 $M\in$ 平面 ABE.

所以 $PC\perp$ 平面 BEM.

因为 E 为 PC 的中点，$EM/\!/CD$，

所以 $PM=MD$.

所以$\dfrac{PM}{MD}=1$. …………………………………………………………………… 10 分

(20)(本小题 10 分)

解：(Ⅰ)$\boldsymbol{a}_1=(2,1,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)$，故$\langle \boldsymbol{a}_2\rangle=0$，$\|\boldsymbol{a}_2\|=2$. …………………………………… 2 分

(Ⅱ)设 $M_k=\max\{x_k,y_k,z_k\}(k=0,1,2\cdots)$，

假设对 $\forall k\in\mathbf{N}$，$\langle \boldsymbol{a}_{k+1}\rangle\neq 0$，则 x_{k+1},y_{k+1},z_{k+1} 均不为 0.

所以 $M_{k+1}>M_{k+2}$.

即 $M_1>M_2>M_3>\cdots$.

因为 $M_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$，

所以 $M_1\geqslant M_2+1\geqslant M_3+2\geqslant\cdots\geqslant M_{2+M_1}+1+M_1$.

所以 $M_{2+M_1}\leqslant -1$.

与 $M_{2+M_1}>0$ 矛盾，故假设不正确.

综上，对于任意 $\boldsymbol{a}_0$，经过若干次 F 变换后，必存在 $K\in\mathbf{N}^*$，使$\langle \boldsymbol{a}_K\rangle=0$. …………… 6 分

(Ⅲ)设 $\boldsymbol{a}_0=(x_0,y_0,z_0)$，因为 $\boldsymbol{a}_1=(p,2,q)(q\geqslant p)$，所以有 $x_0\leqslant y_0\leqslant z_0$ 或 $x_0\geqslant y_0\geqslant z_0$.

当 $x_0\geqslant y_0\geqslant z_0$ 时，可得$\begin{cases}p=x_0-y_0,\\2=y_0-z_0,\\-q=z_0-x_0.\end{cases}$ 三式相加得 $q-p=2$.

又 $\|\boldsymbol{a}_1\|=2024$，可得 $p=1010$，$q=1012$.

当 $x_0\leqslant y_0\leqslant z_0$ 时，也可得 $p=1010$，$q=1012$，于是 $\boldsymbol{a}_1=(1010,2,1012)$.

设 $\boldsymbol{a}_k$ 的三个分量为 $2,m,m+2(m\in\mathbf{N}^*)$这三个数，

当 $m>2$ 时，$\boldsymbol{a}_{k+1}$的三个分量为 $m-2,2,m$ 这三个数，

所以 $\|\boldsymbol{a}_{k+1}\|=\|\boldsymbol{a}_k\|-4$.

当 $m=2$ 时，$\boldsymbol{a}_k$ 的三个分量为 $2,2,4$，则 $\boldsymbol{a}_{k+1}$的三个分量为 $0,2,2$，$\boldsymbol{a}_{k+2}$的三个分量为 $2,0,2$，

所以 $\|\boldsymbol{a}_{k+1}\|=\|\boldsymbol{a}_{k+2}\|=\cdots=4$.

所以，由 $\|\boldsymbol{a}_1\|=2024$，可得 $\|\boldsymbol{a}_{505}\|=8$，$\|\boldsymbol{a}_{506}\|=4$.

因为 $\boldsymbol{a}_1=(1010,2,1012)$，所以任意 $\boldsymbol{a}_k$ 的三个分量始终为偶数，且都有一个分量等于 2.

所以 $\boldsymbol{a}_{505}$的三个分量只能是 $2,2,4$ 三个数，$\boldsymbol{a}_{506}$的三个分量只能是 $0,2,2$ 三个数.

所以当 $m<505$ 时，$\|\boldsymbol{a}_{m+1}\|\geqslant 8$；当 $m\geqslant 505$ 时，$\|\boldsymbol{a}_{m+1}\|=4$.

所以 m 的最小值为 505. …………………………………………………………………… 10 分