2023北京朝阳高一（下）期末

数　　学

2023．7

（考试时间120分钟 满分150分）

本试卷分为选择题（共50分）和非选择题（共100分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题 共50分）

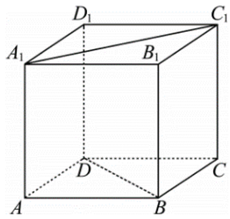
一、选择题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.计算 $(2\mathrm{i})^2=$

A. -1　　B.-2　　C.-4　　D. 4

2.已知 $A(3,2),B(-5,-1)$，若 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，则点 C 的坐标为

A. $(-1,\frac{1}{2})$　　B. $(-1,\frac{3}{2})$　　C. $(1,\frac{1}{2})$　　D. $(1,\frac{3}{2})$



3.在如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1C_1 与 BD 所成角的大小为

A. 120°　　B. 90°　　C. 60°　　D. 45°

4.从装有两个红球和两个白球的口袋内任取两个球，则下列事件是对立事件的是

A.“都是白球”与“至少有一个白球”

B.“恰有一个白球”与“都是红球”

C.“都是白球”与“都是红球”

D.“至少有一个白球”与“都是红球”

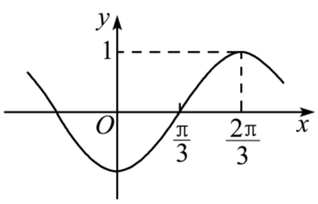
5.已知两条不同直线 a,b 和平面 α，若 $a\perp\alpha$，则“$b\perp\alpha$”是“$a\parallel b$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6.甲、乙两人射击，甲的命中率为 0.6，乙的命中率为 0.5，如果甲、乙两人各射击一次，恰有一人命中的概率为

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6



7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{6})=$

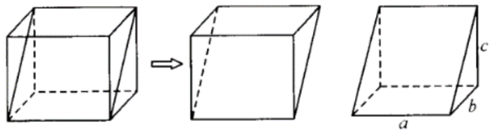
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.已知一组不全相同的数据 $x_1,x_2,x_3\cdots,x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2，在这组数据中加入一个数 $\overline{x}$ 后得到一组新数据，其平均数为 $\overline{x}'$，方差为 s'^2，则

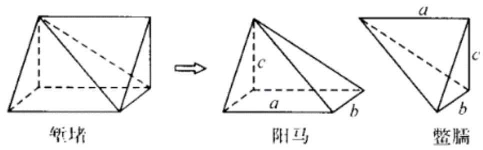
A. $\overline{x}'>\overline{x}$　　B. $s'^2>s^2$　　C. $\overline{x}'<\overline{x}$　　D. $s'^2<s^2$

9. 堑堵、阳马、鳖臑这些名词出自中国古代的数学名著《九章算术•商功》. 如图 1, 把一块长方体分成相同的两块，得到两个直三棱柱（堑堵）. 如图 2, 再沿堑堵的一顶点与相对的棱剖开，得四棱锥和三棱锥各一个, 以矩形为底, 另有一棱与底面垂直的四棱锥，称为阳马. 余下的三棱锥是由四个直角三角形组成的四面体，称为鳖臑. 则图 2 中的阳马与图 1 中的长方体的体积比是

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$



9 题图 1



9 题图 2

10.设 M 为平面四边形 $ABCD$ 所在平面内的一点，$\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{MD}=\boldsymbol{d}$．若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$，则平面四边形 $ABCD$ 一定是（　　）

A.正方形　　B.菱形　　C.矩形　　D.梯形

第二部分（非选择题 共 100 分）

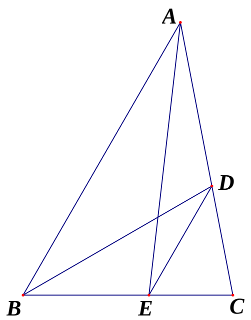
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，复数 $z=1+\mathrm{i}$ 对应的点为 Z，则 $|\overrightarrow{OZ}|=$________.

12.某地区有高中生 3000 人，初中生 6000 人，小学生 6000 人. 教育部门为了了解本地区中小学生的近视率，采用分层抽样的方法，按高中生、初中生、小学生进行分层，如果在各层中按比例分配样本，总样本量为 150，那么在高中生中抽取了________人.

13. 在△ ABC 中，$a=8,b=7,c=3$, 则 $\angle B=$____；$\tan(A+C)=$____.

14.把函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 图象上的所有点向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 的一个对称中心坐标为________.



15.如图，在△ ABC 中，设 $AB=4,BC=a$，$\angle B$ 的平分线和 AC 交于 D 点，点 E 在线段 BC 上，且满足 $BE:EC=3:2$, 设 $\overrightarrow{AE}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}$（$k_1$, $k_2\in\mathbf{R}$），则 $k_1+k_2=$_________；当 $a=$________ 时，$DE\,//\,AB$.

16.如图 1，四棱锥 $P-ABCD$ 是一个水平放置的装有一定量水的密闭容器（容器材料厚度不计），底面 $ABCD$ 为平行四边形，现将容器以棱 AB 为轴向左侧倾斜到图 2 的位置，这时水面恰好经过 $CDEF$，其中 E,F 分别为棱 PA,PB 的中点，在倾斜过程中，给出以下四个结论：

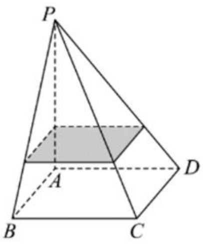
① 没有水的部分始终呈棱锥形

② 有水的部分始终呈棱柱形

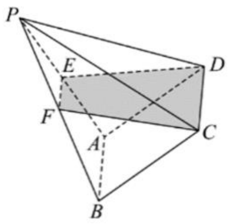
③ 棱 AB 始终与水面所在平面平行

④ 水的体积与四棱锥 $P-ABCD$ 体积之比为5:8

其中所有正确结论的序号为_______.



第 16 题图 1



第 16 题图 2

三、解答题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17.（本小题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2x+2\sqrt{3}\cos^2 x$.

(Ⅰ)求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

(Ⅱ)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

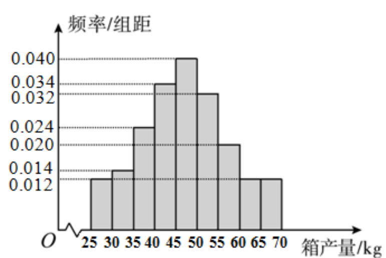
18.（本小题 13 分）

海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图所示．两种养殖方法的箱产量相互独立.

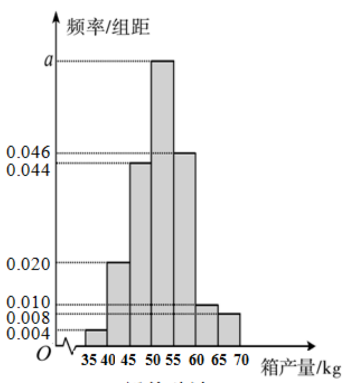
(Ⅰ)求频率分布直方图中 a 的值；

(Ⅱ)用频率估计概率，从运用新、旧网箱养殖方法的水产品中各随机抽取一个网箱，估计两个网箱的箱产量都不低于 55 kg 的概率；

（Ⅲ）假定新、旧网箱养殖方法网箱数不变，为了提高总产量，根据样本中两种养殖法的平均箱产量，该养殖场下一年应采用哪种养殖法更合适？（直接写出结果）



旧养殖法



新养殖法

19.（本小题 14 分）

在△ABC 中，已知 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$.

(Ⅰ)求证：$b=c$；

(Ⅱ)在① $ac=\sqrt{3}$；② $c\sin A=3$；③ $c^2=ab$ 这三个条件中选择一个作为已知，使△ABC 存在且唯一确定，求 b 和△ABC 的面积.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.(本小题 15 分)

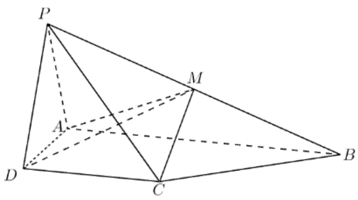
已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB\,/\!/\,CD$，$\angle DAB=90^\circ$，$CD=\dfrac{1}{2}AB$，

平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，M 是 PB 的中点.

(Ⅰ)求证：$CD\perp$ 平面 PAD；

(Ⅱ)求证：$CM\,/\!/$ 平面 PAD；

（Ⅲ）设棱 PC 与平面 ADM 交于点 N，求 $\dfrac{PN}{NC}$ 的值.



21.（本小题 15 分）

设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，已知由自然数组成的集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(a_1<a_2<\cdots<a_n)$，集合 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是 S 的互不相同的非空子集，定义 $n\times m$ 数表：

$$\chi=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}，其中\ x_{ij}=\begin{cases}1, & a_i\in S_j, \\ 0, & a_i\notin S_j,\end{cases}$$

设 $d(a_i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{im}(i=1,2,\cdots,n)$，令 $d(S)$ 是 $d(a_1),d(a_2),\cdots,d(a_n)$ 中的最大值.

（Ⅰ）若 $m=3$，$S=\{1,2,3\}$，且 $\chi=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，求 S_1,S_2,S_3 及 $d(S)$；

（Ⅱ）若 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，集合 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 中的元素个数均相同，若 $d(S)=3$，求 n 的最小值；

（Ⅲ）若 $m=7$，$S=\{1,2,\cdots,7\}$，集合 $S_1,S_2,\cdots,S_7$ 中的元素个数均为 3，且 $S_i\cap S_j\neq\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant 7)$，求证：$d(S)$ 的最小值为 3.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1） C　（2） A　（3） B　（4） D　（5）C

（6） C　（7） B　（8） D　（9） B　（10）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11） $\sqrt{2}$　（12）30　（13） $\frac{\pi}{3},-\sqrt{3}$.

（14） $(0,0)$ (答案不唯一)　（15）1， $\frac{8}{3}$　（16）①③④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}(1+\cos 2x)$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}$， $T=\pi$． ....6 分

（Ⅱ）因为当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时， $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，

所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ 时，即当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，

$f(x)$取到最小值，最小值为 $f(\frac{\pi}{4})=1+\sqrt{3}$；

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，

$f(x)$取到最大值，最大值为 $f(\frac{\pi}{12})=2+\sqrt{3}$. ....13 分

（18）（本小题共 13 分）

解：(I)由 $5\times(0.004+0.008+0.010+0.020+0.044+0.046+a)=1$，

所以 $a=0.068$. ....4 分

（Ⅱ）设事件 A、B 分别表示：从运用新、旧网箱养殖方法的水产品中随机抽取一个网箱，其箱产量不低于 55kg，用频率估计概率，则 $P(A)=(0.020+0.012\times 2)\times 5=0.22$， $P(B)=(0.046+0.010+0.008)\times 5=0.32$.

因为 A、B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.22\times 0.32=0.0704$. .... 10 分

（Ⅲ）新养殖法 .... 13 分

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，根据正弦定理可得 $a=\sqrt{3}b$.

又因为$\angle C=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

将$a=\sqrt{3}b$代入该式，得到$c^2=b^2$，即$c=b$. ....8 分

(II)选① 由$ac=\sqrt{3}$，且$b=c$，

所以$\sqrt{3}b^2=\sqrt{3}$ ，$b=1$, 则$c=1$.

由$\angle C=\frac{\pi}{6}$得$\angle B=\frac{\pi}{6}$, 则$\angle A=\frac{2\pi}{3}$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$. .... 14 分

选②

根据$c=b$ ，所以$\angle C=\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle A=\frac{2\pi}{3}$.

因为$c\sin A=3$，所以$c=2\sqrt{3}$, 即$b=2\sqrt{3}$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. .... 14 分

（20）（本小题共 15 分）

解：（I）因为$\angle DAB=90^\circ$，所以$AB\perp AD$.

又$AB//CD$，所以$CD\perp AD$.

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

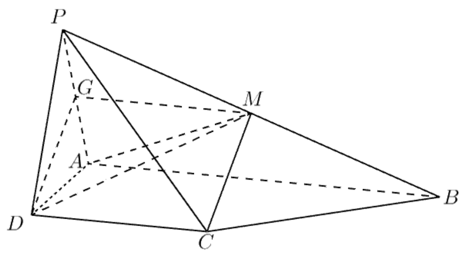
且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$CD\subset$平面$ABCD$,

所以$CD\perp$平面PAD. ....5 分

（II）取PA中点G，连接DG,MG，

因为M，G分别是PB,PA的中点，

所以$MG\ //\ AB, MG=\frac{1}{2}AB$.



又$AB\ //\ CD$，

所以$CD\ //\ MG$.

因为$CD=\frac{1}{2}AB$，

所以$CD=MG$.

所以四边形$CDGM$是平行四边形，

所以$CM\ //\ DG$.

且$DG\subset$平面PAD，$CM\not\subset$平面PAD，

所以$CM\ //$平面PAD. ....11 分

（Ⅲ） 延长 BC 与 AD 交于点 E，连接 PE．

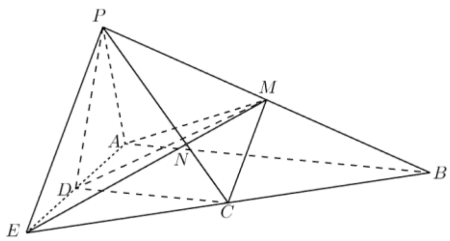
因为 $E\in BC$，$BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $E\in$ 平面 PBC，

因为 $E\in AD$，$AD\subset$ 平面 ADM，

所以 $E\in$ 平面 ADM，

所以平面 $PBC\cap$ 平面 $ADM=ME$.



ME 交 PC 于点 N，

故 N 为 PC 与平面 ADM 的交点.

在△ PBE 中， PC 为 BE 边的中线，

EM 为 PB 边的中线，

所以 $\dfrac{PN}{NC}=2$．　……………………………………………………15 分

（21）（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ） $S_1=\{1,3\},S_2=\{2\},S_3=\{1,2\}$， $d(S)=2$．……………………………4 分

（Ⅱ）设 $a_i\in S$ 使得 $d(a_i)=d(S)=3$，

则 $d(a_i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{im}\leqslant m$，

所以 $m\geqslant 3$．

所以 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 至少有 3 个元素个数相同的非空子集.

当 $n=1$ 时， $S=\{1\}$，其非空子集只有自身，不符题意.

当 $n=2$ 时， $S=\{1,2\}$，其非空子集只有 $\{1\},\{2\},\{1,2\}$，不符题意.

当 $n=3$ 时， $S=\{1,2,3\}$，元素个数为 1 的非空子集有 $\{1\},\{2\},\{3\}$，

元素个数为 2 的非空子集有 $\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$．

当 $\{S_1,S_2,S_3\}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 时， $d(1)=d(2)=d(3)=1$，不符题意.

当 $\{S_1,S_2,S_3\}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ 时， $d(1)=d(2)=d(3)=2$，不符题意.

当 $n=4$ 时， $S=\{1,2,3,4\}$，令 $S_1=\{1,2\},S_2=\{1,3\},S_3=\{1,4\}$，

则 $\chi=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $d(S)=d(1)=3$．

所以 n 的最小值为 4．…………………………………………………………9 分

（Ⅲ）由题可知， $S_j=\{i\mid x_{ij}=1,1\leqslant i\leqslant 7\}$，记 $|S_j|$ 为集合 $S_j\,(j=1,2,\cdots,7)$ 中的元素个数，

则 $|S_j|=x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{7j}=3$ 为数表 χ 第 j 列之和.

因为 $d(i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{i7}\,(i=1,2,\cdots,7)$ 是数表 χ 第 i 行之和，

所以 $d(1)+d(2)+\cdots+d(7)=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_7|=3\times 7=21$．

因为 $d(i) \leqslant d(S)(i=1,2,\cdots,7)$ ，所以 $21=d(1)+d(2)+\cdots+d(7) \leqslant 7d(S)$.

所以 $d(S) \geqslant 3$.

当 $S_1=\{1,2,3\}, S_2=\{1,4,5\}, S_3=\{1,6,7\}, S_4=\{2,4,6\}$ ，

$S_5=\{3,4,7\}, S_6=\{3,5,6\}, S_7=\{2,5,7\}$ 时，

$$\chi=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d(S)=3$. 所以 $d(S)$ 的最小值为 3 . ...15 分