2023 北京西城高一（下）期末

数　学

2023.7

本试卷共 6 页，共 150 分，考试时长 120 分钟，考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，则在复平面内 $\overline{z}$ 对应的点在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．下列函数中，最小正周期为 π 且是偶函数的是（　）

A．$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B．$y=\tan x$　　C．$y=\cos 2x$　　D．$y=\sin 2x$

3．在 $\triangle ABC$ 中，$2a=b$，$C=60°$，$c=\sqrt{3}$，则 $a=$（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

4．某城市一年中 12 个月的月平均气温 y（单位℃）与月份 $x\left(x=1,2,3,\cdots,12\right)$ 的关系可近似地用三角函数 $y=a+A\sin\left[\dfrac{\pi}{6}\left(x-3\right)\right]\left(A>0\right)$ 来表示，已知月平均气温最高值为 28℃，最低值为 18℃，则 $A=$（　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

5．复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，且 z^2 为纯虚数，则 α 可能的取值为（　）

A．0　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

6．已知直线 m，直线 n 和平面 α，则下列四个命题中正确的是（　）

A．若 $m\,/\!/\,\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\,/\!/\,n$　　B．若 $m\,/\!/\,\alpha$，$n\,/\!/\,\alpha$，则 $m\,/\!/\,n$

C．若 $m\perp\alpha$，$n\,/\!/\,\alpha$，则 $m\perp n$　　D．若 $m\perp n$，$n\,/\!/\,\alpha$，则 $m\perp\alpha$

7．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$P\left(1,-2\right)$，$Q\left(3,4\right)$，则 $\cos\angle POQ=$（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

8．已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4，P 为 $\triangle ABC$ 边上的动点，且满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\le 12$，则点 P 轨迹的长度是（　）

A．7　　B．9　　C．10　　D．11

9．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$，则“$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上既不是增函数也不是减函数”是

“$\omega>1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知点 A，点 B，点 P 都在单位圆上，且 $\left|AB\right|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　）

A．$\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　　B．$\left[-1,3\right]$　　C．$\left[-2,3\right]$　　D．$\left[-1,2\right]$

第二部分（选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．已知复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为 $\left(3,-4\right)$，则 $\left|\frac{5}{z}\right|$ 为______．

12．设向量 $\vec{a}=\left(1,2\right)$，$\vec{b}=\left(4,x\right)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$______．

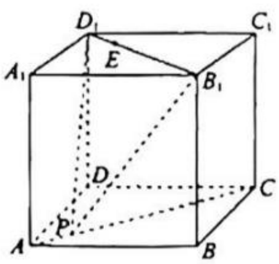
13．已知圆柱的底面半径为 3，体积为 $\frac{32\pi}{3}$ 的球与该圆柱的上、下底面相切，则球的半径为______，圆柱的体积为______．

14．写出一个同时满足下列两个条件的函数 $f\left(x\right)=$______．

①$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x\right)$；

②$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x\right)\le f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立．

15．如图，在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 AC 上的动点（包含端点），点 E 在线段 B_1D_1 上，且 $D_1E=\frac{1}{4}B_1D_1$，给出下列四个结论：



①存在点 P，使得平面 PB_1D_1 // 平面 C_1BD；

②存在点 P，使得 $\triangle PB_1D_1$ 是等腰直角三角形；

③若 $PE\le5$，则点 P 轨迹的长度为 $2\sqrt{7}$；

④当 $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{3}$ 时，则平面 PB_1D_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形的面积为 18．

其中所有正确结论的序号是______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16.（本小题 13 分）

已知$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

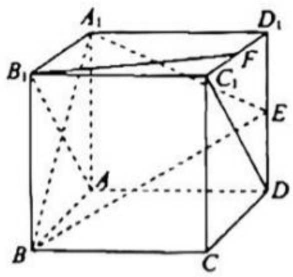
（Ⅱ）求$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$的值.

17.（本小题 13 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 DD_1，C_1D_1 的中点.

（Ⅰ）证明：$A_1B\perp$ 平面 ADC_1B_1；

（Ⅱ）证明：B_1F // 平面 A_1BE .



18.（本小题 14 分）

已知在$\triangle ABC$ 中，$a\cos B+b\cos A=2c\cos A$.

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）若 $c=4$，在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$ 存在且唯一，求$\triangle ABC$ 的周长.

①$\triangle ABC$ 的面积为$5\sqrt{3}$；②$a=\sqrt{13}$；③AB 边上的高线 CD 长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$的单调递增区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$在区间$[0,m]$上有且只有两个零点，求 m 的取值范围.

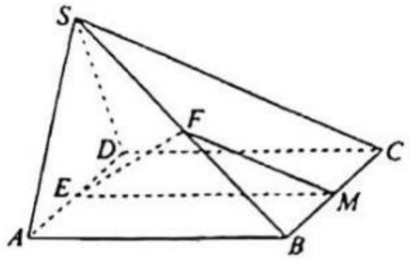
20.（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$SA=SD=AD=2$，四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 AD 的中点，F 为 SB 上一点，M 为 BC 上一点，且平面 EFM // 平面 SCD.

（Ⅰ）求证：$CD\perp SA$；

（Ⅱ）求证：M 为线段 BC 中点，并直接写出 M 到平面 SCD 的距离；

（Ⅲ）在棱 SC 上是否存在点 N，使得平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$？若存在，求 $\dfrac{CN}{CS}$；若不存在，说明理由．



21．（本小题 15 分）

对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 和正实数 T，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f\left(x+T\right)-f\left(x\right)=T$，则 $f\left(x\right)$ 为 T-阶梯函数．

（Ⅰ）分别判断下列函数是否为 1-阶梯函数（直接写出结论）：

① $f\left(x\right)=x^2$；② $f\left(x\right)=x+1$．

（Ⅱ）若 $f\left(x\right)=x+\sin x$ 为 T-阶梯函数，求 T 的所有可能取值；

（Ⅲ）已知 $f\left(x\right)$ 为 T-阶梯函数，满足：$f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{T}{2},T\right]$ 上单调递减，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f\left(T-x\right)-f\left(x\right)=T-2x$．若函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-ax-b$ 有无穷多个零点，记其中正的零点从小到大依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots$

直接给出一个符合题意的 a 的值，并证明：存在 $b\in\mathbf{R}$，使得 $F\left(x\right)$ 在 $\left[0,2023T\right]$ 上有 4046 个零点，且 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_{4046}-x_{4045}$．

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

1．D 2．C 3．B 4．A 5．B 6．C 7．D 8．B 9．B 10．A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．1 12．-2 13．2，36π 14．$|\sin 2x|$（答案不唯一） 15．①③④

注：第 13 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分．

16．（本小题 13 分）

解：（I）因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，

所以$\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}$，$\cos\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$．

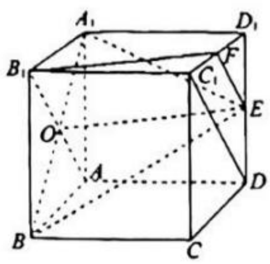
又因为$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$．

所以$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$．

（II）$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$．

17．（本小题 13 分）

（I）证明：$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，所以$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1．



因为$A_1B\subset$平面ABB_1A_1，所以$B_1C_1\perp A_1B$．

因为A_1ABB_1为正方形，所以$A_1B\perp AB_1$，

又因为$B_1C_1\cap AB_1=B_1$，所以$A_1B\perp$平面ADC_1B_1．

（II）设$AB_1\cap A_1B=O$，连接OE．

因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，所以$B_1A\,/\!/\,C_1D$，且$B_1A=C_1D$，

所以$B_1O\,/\!/\,C_1D$，且$B_1O=\dfrac{1}{2}C_1D$．

因为 E，F 分别 DD_1，C_1D_1 的中点，所以 $EF \parallel C_1D$，且 $EF=\frac{1}{2}C_1D$.

所以 $EF \parallel B_1O$，且 $EF=B_1O$.

所以四边形 B_1OEF 为平行四边形．所以 $B_1F \parallel OE$.

又因为 $B_1F \not\subset$ 平面 A_1BE，$OE \subset$ 平面 A_1BE，

所以 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE.

18．（本小题 14 分）

解：（I）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$.

所以 $\sin\left(A+B\right)=2\sin C\cos A$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin\left(A+B\right)=\sin C$，所以 $\sin C=2\sin C\cos A$.

因为 $C\in\left(0,\pi\right)$，$\sin C\neq 0$，所以 $2\cos A=1$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$.

又因为 $A\in\left(0,\pi\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（II）选择①

因为 $S_{\triangle ABC}=5\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}bc\sin A=5\sqrt{3}$，

即 $\frac{1}{2}\times b\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$，所以 $b=5$.

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2=25+16-2\times 5\times 4\times\frac{1}{2}$，

所以 $a=\sqrt{21}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $9+\sqrt{21}$.

选择③

因为 AB 边上的高线 CD 长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $b\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $b=1$.

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2=1+16-2\times 1\times 4\times\frac{1}{2}$

所以 $a=\sqrt{13}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $5+\sqrt{13}$.

19．（本小题 15 分）

解：（I）$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+2\cos^2\frac{\pi}{6}-1=1$.

（II）$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2 x-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos 2x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$，

得$-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

所以 $f\left(x\right)$的单调递增区间是$\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

（III）因为$x\in\left[0,m\right]$，所以$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},2m+\dfrac{\pi}{6}\right]$.

依题意$2\pi<2m+\dfrac{\pi}{6}<3\pi$，解得$\dfrac{11\pi}{12}<m<\dfrac{17\pi}{12}$.

所以 m 的取值范围为$\left[\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

20.（本小题 15 分）

解:（I）因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以$CD\perp AD$.

因为平面$SAD\perp$平面 $ABCD$，平面$SAD\cap$平面$ABCD=AD$， $CD\subset$平面 $ABCD$，

所以$CD\perp$平面 SAD，

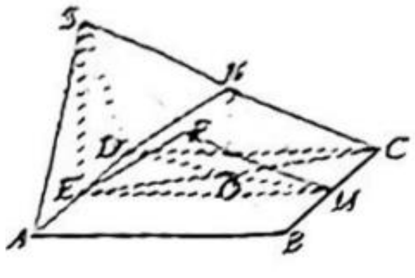
又$SA\subset$平面 SAD，所以$CD\perp SA$.

（II）因为平面EFM // 平面 SCD，平面EFM $\cap$平面$ABCD=EM$，

平面$SCD\cap$平面$ABCD=CD$，所以CD // EM，

又因为 E 为 AD 的中点，所以 M 为线段 BC 中点.

M 到平面 SCD 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



（III）存在，N 为 SC 中点，连接 EC，DM 交于点 O，连接 SE.

因为ED // CM，并且$ED=CM$，所以四边形 $EMCD$ 为平行四边形，所以$EO=CO$.

又因为 N 为 SC 中点，所以NO // SE .

因为平面$SAD\perp$平面 $ABCD$，平面$SAD\cap$平面$ABCD=AD$，

又$SE\subset$平面 SAD，由已知$SE\perp AD$，

所以$SE\perp$平面 $ABCD$，所以$NO\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $NO \subset$ 平面 DMN，所以平面 $DMN \perp$ 平面 $ABCD$.

所以存在点 N，使得平面 $DMN \perp$ 平面 $ABCD$，$\dfrac{CN}{CS}=\dfrac{1}{2}$.

21.（本小题 15 分）

解：（I）①否；②是.

（II）因为 $f(x)$ 为 T-阶梯函数，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有：

$$f(x+T)-f(x)=\left[x+T+\sin(x+T)\right]-(x+\sin x)=\sin(x+T)-\sin x+T.$$

所以，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$\sin(x+T)=\sin x$，

因为 $y=\sin x$ 是最小正周期为 2π 的周期函数，

又因为 $T>0$，所以 $T=2k\pi$，$k\in\mathbf{N}^*$.

（III）$a=1$.

函数 $F(x)=f(x)-x-b$，则有：

$$F(x+T)=f(x+T)-(x+T)-b=f(x)+T-(x+T)-b=f(x)-x-b=F(x),$$

$$F(T-x)=f(T-x)-(T-x)-b=f(x)+T-2x-(T-x)-b=f(x)-x-b=F(x).$$

取 $b=f\left(\dfrac{3T}{4}\right)-\dfrac{3T}{4}$，则有：

$$F\left(\frac{3T}{4}\right)=f\left(\frac{3T}{4}\right)-\frac{3T}{4}-b=0,\quad F\left(\frac{T}{4}\right)=F\left(T-\frac{T}{4}\right)=F\left(\frac{3T}{4}\right)=0,$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{T}{2},T\right]$ 上单调递减，因此 $F(x)=f(x)-x-b$ 在 $\left[\dfrac{T}{2},T\right]$ 上单调递减，

结合 $F(T-x)=F(x)$，则有：

$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{T}{2}\right]$ 上有唯一零点 $\dfrac{T}{4}$，在 $\left[\dfrac{T}{2},T\right]$ 上有唯一零点 $\dfrac{3T}{4}$.

又由于 $F(x+T)=F(x)$，则对任意 $k\in\mathbf{Z}$，有：

$$F\left(\frac{T}{4}+kT\right)=F\left(\frac{T}{4}\right)=0,\quad F\left(\frac{3T}{4}+kT\right)=F\left(\frac{3T}{4}\right)=0,$$

因此，对任意 $m\in\mathbf{Z}$，$F(x)$ 在 $\left[mT,(m+1)T\right]$ 上有且仅有两个零点：$mT+\dfrac{T}{4}$，$mT+\dfrac{3T}{4}$.

综上所述，存在 $b=f\left(\dfrac{3T}{4}\right)-\dfrac{3T}{4}$，使得 $F(x)$ 在 $\left[0,2023T\right]$ 上有 4046 个零点：

$$x_1=\frac{T}{4},\quad x_2=\frac{3T}{4},\quad x_3=\frac{5T}{4},\quad x_4=\frac{7T}{4},\quad \cdots,\quad x_{4045}=\frac{8089T}{4},\quad x_{4046}=\frac{8091T}{4},$$

其中，$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_{4046} - x_{4045} = \dfrac{T}{2}$.