# 2023北京海淀高一（下）期末

# 数　　学

2023.07

学校____________　班级____________　姓名____________　成绩____________

| | |
|---|---|
| 考生须知 | 1．本试卷共6页，共三道大题，19道小题。满分100分。考试时间90分钟。<br>2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。<br>3．答案一律书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答。<br>4．考试结束，请将本试卷和答题纸一并交回。 |

## 第一部分（选择题　共40分）

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

1．复数 $\mathrm{i}\cdot(3+\mathrm{i})$ 的虚部是　　　　( )

（A）1　　（B）3　　（C）-1　　（D）-3

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，则下列向量中与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量是　　　　( )

（A）$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$　　（B）$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　（C）$(1,-1)$　　（D）$(1,1)$

3. 若 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$， $\cos\alpha>0$，则 $\sin\alpha=$　　　　( )

（A）$\frac{12}{13}$　　（B）$\frac{5}{13}$　　（C）$-\frac{12}{13}$　　（D）$-\frac{5}{13}$

4．已知 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=2$，则 $\tan\alpha$ 的值为　　　　( )

（A）3　　（B）1　　（C）$-3$　　（D）$-1$

5. 下列函数中，既是偶函数又是周期为 $\pi$ 的函数为　　　　( )

（A） $y=\sin x$　　（B） $y=\cos x$　　（C） $y=\sin 2x$　　（D） $y=\cos 2x$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，向量 $\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则 $|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=$　　　　( )

（A） $\sqrt{2}$　　（B） $\sqrt{3}$　　（C） 2　　（D）3

7. 函数 $f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 的最大值为　　　　( )

（A）1　　（B） $\sqrt{2}$　　（C） $\sqrt{3}$　　（D） 2

8．在△ $ABC$ 中，“ $\sin A=\sin B$ ”是“ $A=B$ ”的　　　　( )

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=1$， $|\overrightarrow{AC}|=2$， $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，则 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最小值为　　　　( )

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

10.海洋中的波动是海水的重要运动形式之一.在外力的作用下，海水质点离开其平衡位置做周期性或准周期性的运动，由于流体的连续性，必然带动其邻近质点，从而导致其运动状态在空间的传播.(节选自《海洋科学导论》冯士筰 李凤岐 李少菁 主编 高等教育出版社)

某校海洋研学小组的同学为了研究海水质点在竖直方向上的运动情况，通过数据采集和分析，同学们发现海水质点在某一时间段相对于海平面的位移 $y$（米）与时间 $t$（秒）的关系近似满足 $y=\sin(\omega t+\varphi), t\in[0,8]$，其中常数 $\omega>0, |\varphi|<\pi$.经测定，在 $t=2$ 秒时该质点第一次到达波峰，在 $t=8$ 秒时该质点第三次到达波峰.在 $t\in[0,8]$ 时，该质点相对于海平面的位移不低于 0.5 米的总时长为（ ）

（A）$\frac{3}{2}$ 秒　　（B）2 秒　　（C）$\frac{5}{2}$ 秒　　（D）3 秒

## 第二部分（非选择题 共 60 分）

**二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。**

11. 在复平面内，复数 $z$ 对应的点的坐标是 $(1,2)$，则 $\frac{z}{\mathrm{i}}=$________.

12. 已知 $A(0,1), B(3,-2)$，且 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$，则 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标为________.

13. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$，$B(\cos(\alpha+\frac{\pi}{3}), \sin(\alpha+\frac{\pi}{3}))$，则△$OAB$ 的面积为__________.

14. 在△$ABC$ 中，$c=8$，$\angle B=30^\circ$，请给出一个 $b$ 的值，使得满足条件的三角形恰有两个，则 $b$ 的一个值是____.

15. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x^2-x}$，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 存在无数个零点；

② $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最大值；

③若 $f(2023.7)=a$，则 $f(-2022.7)=a$；

④区间 $(\frac{1}{2},1)$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间.

其中所有正确结论的序号为________.

**三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。**

16.（本小题 9 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(1,0)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$，点 $P$ 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$.

(Ⅰ)当 $\lambda=1, \mu=-1$ 时，求点 $P$ 的坐标；

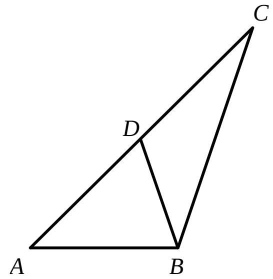
(Ⅱ)若 $AP\perp BC$，求 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值.

17.（本小题 9 分）

如图所示，已知$\triangle ABC$中，$D$为$AC$上一点，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$AB=4$，$BD=\sqrt{10}$，$AD>AB$.

（Ⅰ）求$\sin\angle ADB$；

（Ⅱ）若$\sin\angle BDC=2\sin\angle C$，求$DC$的长.




18.（本小题 11 分）

已知函数$f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\cos x+\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)\sin x$.

（Ⅰ）求$f(\dfrac{\pi}{3})$的值；

（Ⅱ）求$f(x)$的单调递增区间；

（Ⅲ）将函数$f(x)$图象上的所有点向右平移$m(m>0)$个单位长度，得到函数$g(x)$的图象，使得直线$x=\pi$是函数$g(x)$图象的一条对称轴，求$m$的最小值.

19.（本小题 11 分）

设$T>0$，对定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，若存在常数$S$，使得$f(x+T)=f(x)+S$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，则称函数$f(x)$满足性质$P(T)$.

（Ⅰ）判断下列函数是否具有性质$P(2)$？

① $f_1(x)=\sin\pi x$，② $f_2(x)=x^2$，③ $f_3(x)=2x+1$.

（Ⅱ）若函数$f(x)$具有性质$P(T_1),P(T_2)$，其中$T_2>T_1>0$，求证：函数$f(x)$具有性质$P(T_2-T_1)$；

（Ⅲ）设函数$F(x)=f(x)+g(x)$具有性质$P(T)$，其中$f(x)$是奇函数，$\mathrm{g}(x)$是偶函数.若$f(\dfrac{T}{2})=1$，求$f(\dfrac{2023T}{2})$的值.

# 参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）A　（3）D　（4）C　（5）D

（6）C　（7）B　（8）C　（9）A　（10）C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$2-\mathrm{i}$　（12）$(2,-2)$　（13）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（14）$b\in(4,8)$ 均可，如 $b=5$　（15）①②③

三、解答题（本大题共 4 小题，共 40 分）

（16）（本小题 9 分）

解：（Ⅰ）因为点 $A(1,0)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,5)$．

又因为点 $P$ 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(2\lambda+\mu,2\lambda+5\mu)$．

当 $\lambda=1,\mu=-1$ 时，$\overrightarrow{AP}=(1,-3)$，

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(2,-3)$，

所以点 $P$ 的坐标为 $(2,-3)$．

（Ⅱ）由点 $B(3,2)$，$C(2,5)$，可得 $\overrightarrow{BC}=(-1,3)$，

因为 $\overrightarrow{AP}=(2\lambda+\mu,2\lambda+5\mu)$，且 $AP\perp BC$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-(2\lambda+\mu)+3(2\lambda+5\mu)=4\lambda+14\mu=0$，

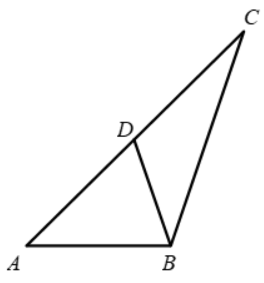
所以 $\dfrac{\lambda}{\mu}=-\dfrac{7}{2}$．

（17）（本小题 9 分）

解：（Ⅰ）在△$ABD$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle A}$，

所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}\sin\angle A$．

又因为 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$AB=4$，$BD=\sqrt{10}$，



所以 $\sin\angle ADB=\frac{4}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅱ）因为 $AD>AB$，所以 $\angle ABD>\angle ADB$，所以 $\angle ADB<90^\circ$，

所以 $\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

法 1：　由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle C}$，又 $\sin\angle BDC=2\sin\angle C$，

所以 $BC=2BD=2\sqrt{10}$，

由余弦定理可得 $BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cos\angle BDC$

化简整理得 $DC^2+2\sqrt{2}DC-30=0$，

解得 $DC=3\sqrt{2}$.

法 2：　因为 $\sin\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 且 $\sin\angle BDC=2\sin\angle C$，

所以 $\sin\angle C=\frac{\sin\angle BDC}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

由题意可得 $\angle C<\angle ADB$，所以 $\cos\angle C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\angle DBC=\sin(\angle ADB-\angle C)$

$$=\sin\angle ADB\cdot\cos\angle C-\cos\angle ADB\cdot\sin\angle C$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{5}.$$

在△$BDC$ 中，由正弦定理可得 $\frac{DC}{\sin\angle DBC}=\frac{BD}{\sin\angle C}$，

所以 $DC=\frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle C}BD=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}\times\sqrt{10}=3\sqrt{2}$.

（18）（共 11 分）

**解：**（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin 0\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）因为 $(x+\frac{\pi}{6})+(\frac{\pi}{3}-x)=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\cos(x+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos x+\sin(\frac{\pi}{3}-x)\sin x$

$$=\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{6})\sin x$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

因为 $y=\sin x$ 的单调区间为$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}],k\in\mathbf{Z}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$， 即 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}],k\in\mathbf{Z}$ .

（III）由题意得 $g(x)=f(x-m)=\sin(2x-2m+\frac{\pi}{6})$，

因为 $x=\pi$ 是函数 $g(x)$ 图象的一条对称轴，

所以 $2\pi-2m+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，

所以 $m=\frac{5\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}$，

又因为 $m>0$，

所以 $m$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

（19）（本小题 11 分）

**解：**（Ⅰ）① $f_1(x)=\sin\pi x$ 具有性质 $P(2)$； ② $f_2(x)=x^2$ 不具有性质 $P(2)$；

③ $f_3(x)=2x+1$ 具有性质 $P(2)$ .

（Ⅱ）因为函数 $f(x)$ 具有性质 $P(T_2)$，则存在常数 $S_2$， 使得

$f(x+T_2)=f(x)+S_2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

因为函数 $f(x)$ 具有性质 $P(T_1)$，则存在常数 $S_1$， 使得

$f(x+T_1)=f(x)+S_1$， 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

故 $f(x-T_1+T_1)=f(x-T_1)+S_1$， 即 $f(x-T_1)=f(x)-S_1$ 也对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立

因此 $f(x+T_2-T_1)=f(x+T_2)-S_1=f(x)+S_2-S_1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

又因为 $T_2>T_1>0$

所以函数 $f(x)$ 具有性质 $P(T_2-T_1)$ .

（III）存在 $S$ 满足 $F(x+T)=F(x)+S$， 即 $f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x)+S$

令 $x=a$， 则 $f(a+T)+g(a+T)=f(a)+g(a)+S$ ①

令 $x+T=-a$， 则 $f(-a)+g(-a)=f(-a-T)+g(-a-T)+S$ ②

因为 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，

所以 $f(-a)=-f(a),g(-a)=g(a)$， $f(-a-T)=-f(a+T),g(-a-T)=g(a+T)$

①+②，整理得 $f(a+T)=f(a)+S$，

令 $a=-\frac{T}{2}$， 则 $f(\frac{T}{2})=f(-\frac{T}{2})+S$， 即 $f(\frac{T}{2})=\frac{S}{2}$，

又因为 $f(\frac{T}{2})=1$，所以 $S=2$，

所以 $f(\frac{2023T}{2})=f(1011T+\frac{T}{2})=f(1010T+\frac{T}{2})+2=\cdots=1011\times 2+f(\frac{T}{2})=2023$.