2024年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共4页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的交点个数为

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1\,000$　　C．$f(10)<1\,000$　　D．$f(20)<10\,000$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $(\bar{x},s^2)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$）

A．$P(X>2)>0.2$　　B．$P(X>2)<0.5$

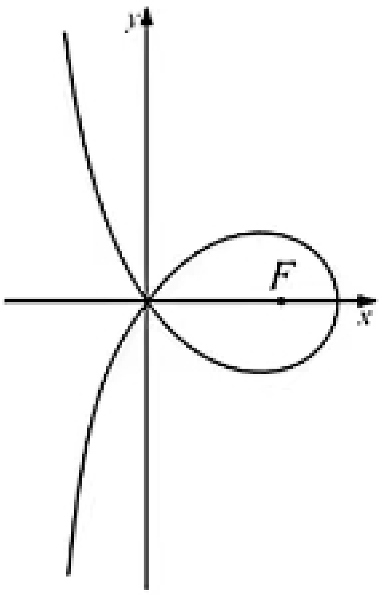
C．$P(Y>2)>0.5$　　D．$P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

A．$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B．当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C．当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　　D．当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型  可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分．已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则



A．$a=-2$

B．点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C．C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D．当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\frac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$、$B$两点，若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为________.

13．若曲线在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$________.

14．甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，假的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8．两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

（1）求B;

（2）若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求c.

16．（15 分）

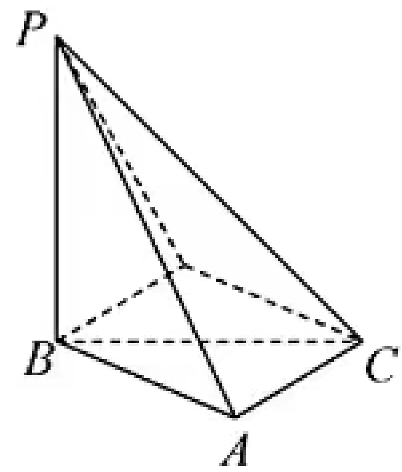
已知$A(0,3)$和$P(3,\dfrac{3}{2})$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求C的离心率；

（2）若过P的直线l交C于另一点B，且$\triangle ABP$的面积为 9，求l的方程.

17．（15 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$．



（1）若 $AD\perp PB$，证明：AD // 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.

18．（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$．

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围．

19．（17 分）

设 m 为正整数，数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 a_j $(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i,j)—可分数列．

（1）写出所有的 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列 a_1，a_2，…，a_6 是 (i,j)—可分数列；

（2）当 $m\geqslant 3$ 时，证明：数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 $(2,13)$—可分数列；

（3）从 1，2，…，$4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$，记数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i,j)—可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$．

2024 全国高考新高考 I 卷

一.填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合$A=\{x|-5<x^3<5\}, B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A\cap B=$

$A.\{-1,0\}$　　$B.\{2,3\}$　　$C.\{-3,-1,0\}$　　$D.\{-1,0,2\}$

【答案】A

【解析】由$A=\{x|-5<x^3<5\}$得$x\in\left(-\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5}\right)$所以$A\cap B=\{-1,0\}$选 A

2. 若$\frac{z}{z-1}=i+1$，则$z=$（　　）

$A.-1-i$　　$B.-1+i$　　$C.1-i$　　$D.1+i$

【答案】C

【解析】$\frac{z}{z-1}=\frac{z-1+1}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}=i+1$，$\frac{1}{z-1}=i$，$z=1-i$选 C

3. 已知向量$\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(2,x)$若$\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$，则$x=$（　　）

$A.-2$　　$B.-1$　　$C.1$　　$D.2$

【答案】D

【解析】$\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$，选 D

4. 已知$cos(\alpha+\beta)=m, tan\,\alpha\,tan\,\beta=2$，则$cos(\alpha-\beta)=$（　　）

$A.-3m$　　$B.-\frac{m}{3}$　　$C.\frac{m}{3}$　　$D.3m$

【答案】A

【解析】$tan\,\alpha\,tan\,\beta=2\Rightarrow sin\,\alpha\,sin\,\beta=2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta$，$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta=-cos\,\alpha\,cos\,\beta=m\Rightarrow cos\,\alpha\,cos\,\beta=-m$

$cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sin\,\alpha\,sin\,\beta=3\,cos\,\alpha\,cos\,\beta=-3m$，选 A

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

$A.2\sqrt{3}\pi$　　$B.3\sqrt{3}\pi$　　$C.6\sqrt{3}\pi$　　$D.9\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】设圆柱和圆锥的底面半径为r高为$h=\sqrt{3}$ $\pi rl=2\pi rh\Rightarrow l=2h=2\sqrt{3}\Rightarrow r=\sqrt{l^2-h^2}=3$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=3\sqrt{3}\pi$$

选 B

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0\\ e^x+ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$在$R$上单调递增，则 a 的取值范围是

$A(-\infty,0]$　　$B[-1,0]$　　$C[-1,1]$　　$D.[0,+\infty)$

【答案】B

【解析】

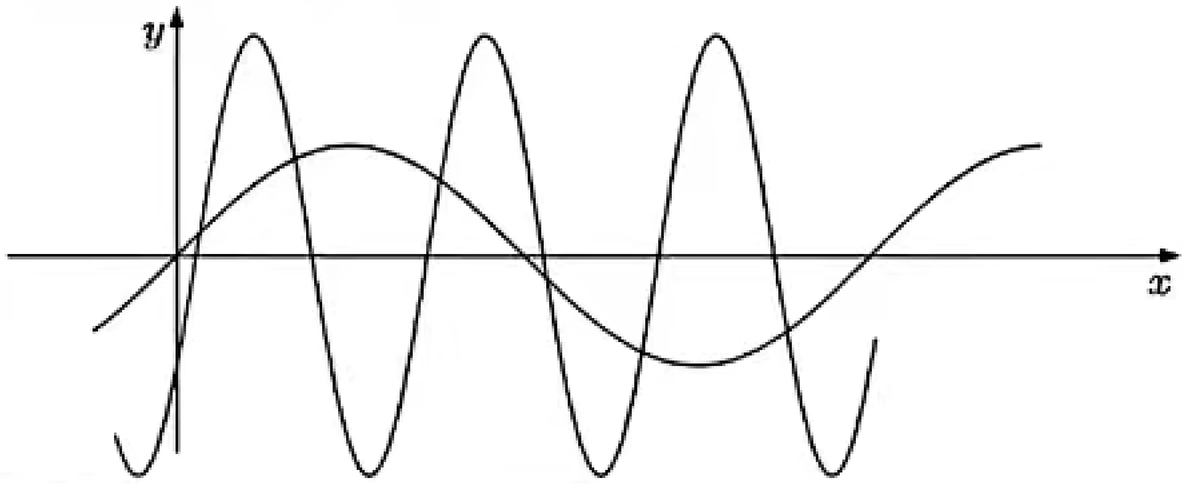
$f(x)$在R上单调递增，当$x\geq 0$单调递增，当$x<0$时$-x^2-2ax-a$单调递增即可，所以

$\begin{cases}-a\geq 0\\-a\leq 1\end{cases}\Rightarrow a\in[-1,0]$

7. 当$x\in[0,2\pi]$时，曲线$y=\sin x$与$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的交点个数为

$A.3$　　　$B.4$　　　$C.6$　　　$D.8$

【答案】C
【解析】由图像可知有 6 个交点



8. 已知函数的定义域为R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$且$x<3$时$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是
$A.f(10)>100$　　$B.f(20)>1000$　　$C.f(10)<1000$　　$D.f(20)<10000$

【答案】B
【解析】由题意知$x>3$时$f(x)$可以趋近于正无穷，所以排除 CD 两项$f(1)=1,f(2)=2,f(x)>f(x-1)+f(x-2)\Rightarrow f(3)>3,f(4)>5,f(5)>8,f(6)>13$
$f(7)>21,f(8)>34,f(9)>55,f(10)>89$所以不一定满足$f(10)>100$，所以选 B

二.多选题（每题 6 分，共 18 分）

9. 为了解推动出口后的亩收入(单位:万元)情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值$\bar{X}=2.1$，样本方差$S^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入X服从正态分布$N(1.8,0.1^2)$，假设失去出口后的亩收入Y服从正态分布$N(\bar{X},S^2)$，则(　　).(若随机变量Z服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$)
A. $P(X>2)>0.2$
B. $P(X>2)<0.5$
C. $P(Y>2)>0.5$
D. $P(Y>2)<0.8$
【答案】BC
【解析】
由图易知，$P(X>1.9)\approx 0.1587$，A 错 B 对：
$P(Y>2)\approx 0.8413$，C 对 D 错。

10. 设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）
A. $x=3$是$f(x)$的极小值点
B. 当$0<x<1$时，$f(x)<f(x^2)$
C. 当$1<x<2$时，$-4<f(2x-1)<0$
D. 当$-1<x<10$时，$f(2-x)>f(x)$

【答案】AC
【解析】
$f'(x)=3(x-1)(x-3)$，$f(x)$在$(1,3)$递减，$(3,+\infty)$递增，则 A 对
$0<x<1$时，$x>x^2$，则$f(x)>f(x^2)$，B 错

$1 < 2x-1 < 3$时，$f(3) < f(2x-1) < f(1)$，则$-4 < f(2x-1) < 0$，则 C 对
$f(2-x) > f(x)$可化为$(1-x)^2(-2-x) > (x-1)^2(x-4)$，可知$x=1$时不成立，则 D 错

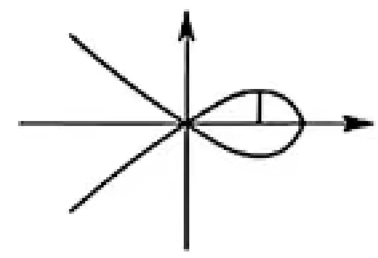
11. 造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分，已知 C 过坐标原点 0，且 C 上的点满足横坐标大于-2，到点$F(2,0)$的距离与到定直线$x=a(a<0)$的距离之积为4，则(　　)

A. $a=-2$

B. 点$(2\sqrt{2},0)$在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点(x_0,y_0)在 C 上时，$y_0 \le \frac{4}{x_0+2}$



【答案】ABD

【解析】

由题意设 C 上一点$P(x,y)$，则满足$|x-a|\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$

将$(0,0)$代入得，$|a|=2$，即$a=-2$，A 对，

且方程化为$(x+2)^2[(x-2)^2+y^2]=16 \Rightarrow (x^2-4)^2+y^2(x+2)^2=16$

将$(2\sqrt{2},0)$代入满足方程，则 B 对

$y^2=\frac{x^2(8-x^2)}{(x+2)^2}$，对其整体求导得：$(y^2)'=-\frac{32}{(x+2)^2}-2(x+2)+8$

当$x=2$时，$y=\pm1$，但是$(y^2)'|_{x=2}<0$，则在该点处函数保持单减趋势，则 C 错，

D 可化简为$(x_0+2)\cdot\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}=4 \ge y_0\cdot(x_0+2)$

即$(x_0-2)^2 \ge 0$，显然成立，D 对

三.填空题（每题 5 分，共 15 分）

12. 设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$后平行于$y$轴的直线交$C$于$A,B$两点，若$|F_1A|=13,|AB|=10$，则$C$的离心率为 ________

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】$|F_1A|-\frac{|AB|}{2}=2a=8 \Rightarrow a=4$，同时$\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{4}=5 \Rightarrow b^2=20,c^2=36$，从而$e=\frac{3}{2}$

13. 若曲线$y=e^x+x$在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$ ________

【答案】$\ln 2$

【解析】设与$y=\ln(x+1)+a$的切点横坐标为x_0，则$k=f'(0)=2=\frac{1}{x_0+1} \Rightarrow x_0=-\frac{1}{2}$，同时$y=e^x+x$在点$(0,1)$处的切线为$y=2x+1$．$y=\ln(x+1)+a$的切线为

$$y=2x+1+a-\ln 2$$

则$1+a-\ln 2=1 \Rightarrow a=\ln 2$

14. 甲乙两人各有四张卡片．每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字1,3,5,7，飞的卡片上分别标有数字2,4,6,8。两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分。然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在比后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分小于 2 的概率为 ________

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】不妨设甲的顺序是1,3,5,7，考虑甲得分为0,1的情况

（1）0分情况：只有1种，$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\end{pmatrix}$

（2）1分情况：

① 甲出 3 的时候得分，此时只有1种$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\4&2&6&8\end{pmatrix}$

② 甲出 5 的时候得分，此时乙对应有两种情况
乙出4的时候有 1 种情况，乙出2的时候有2种情况，所以共3种；
③ 甲出7的时候得分，此时乙对应有 3 种情况
乙出6的时候有 1 种情况，
乙出4的时候有 2 种情况，
乙出2的时候有 4 种情况．　从而共 7 种情况．
所以甲的总得分小于 2 的概率为

$$\frac{1+1+3+7}{A_4^4}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

四.解答题（第 15 题 13 分，第 16、17 题各 15 分，第 18、19 题各 17 分）

15. 记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$
（1）求B；
（2）若ΔABC的面积$3+\sqrt{3}$，求c

【答案】（1）$\frac{\pi}{4}$；　（2）$2\sqrt{2}$

【解析】1）$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab=2ab\cos C\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$

（2）由（1）知$A=\frac{5}{12}\pi$，则

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}c,b=\frac{\sqrt{6}}{2}c$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}c^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{3}$$

所以$c=2\sqrt{2}$

16. 已知$A(0,3)$和$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点

（1）求C的离心率；
（2）若过P的直线l交C于另一点B，且ΔABP的面积为 9，求l的方程．

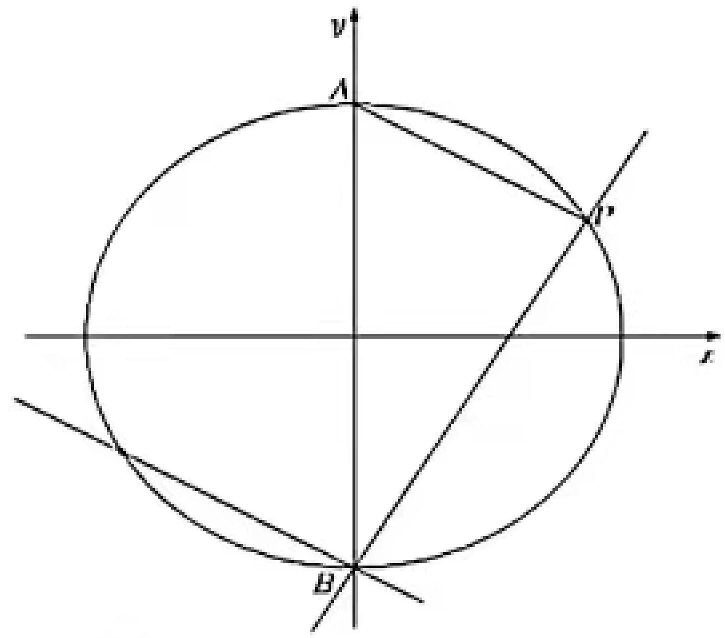
【答案】（1）$\frac{1}{2}$　　（2）$l:y=\frac{1}{2}x$或者$y=\frac{3}{2}x-3$

【解析】
（1）由题条件知

$$\begin{cases} b=3 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow a^2=12, b^2=9$$

所以离心率为$\frac{1}{2}$

（2）



$$|PA|=\frac{3\sqrt{5}}{2}，PA: y=-\frac{1}{2}x+3, x+2y-6=0$$

则设B在的直线$l': x+y+C=0$，则

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{|6+C|}{\sqrt{5}}=9\Rightarrow C=6（-18舍）$$

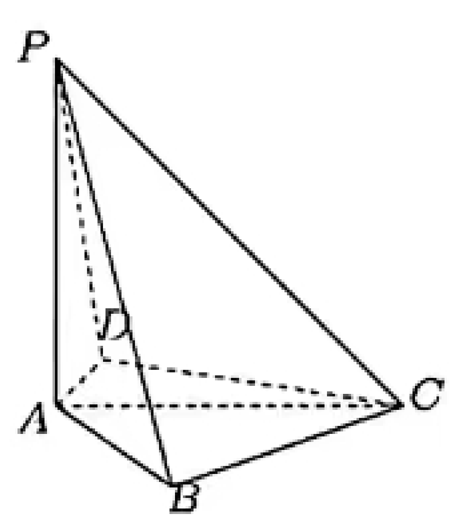
所以$l': x+2y+6=0$，联立椭圆解得$B(0,-3)$或者$B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$，从而解得

$$l: y=\frac{1}{2}x或者y=\frac{3}{2}x-3$$

17．如图：四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1, AB=\sqrt{3}$

（1）若$AD\perp PB$，证明：$AD//$平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD

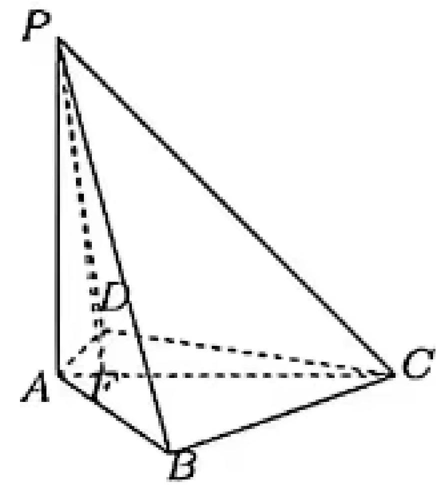


【答案】（1）略；（2）

【解析】

（1）证明：易知$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，因为$PA\perp AD, PB\perp AD\Rightarrow AD\perp PAB$，所以$AD\perp AB$，从而$AD//BC$，所以$AD//$平面$PBC$

（2）射影面积法



如图，作D在面PAC上的投影F，不妨设$AD=m$，则

$$\frac{CF}{\sqrt{4-m^2}}=\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Rightarrow CF=\frac{4-m^2}{2}$$

则$A-CP-D$的夹角的余弦值

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4-m^2}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4-m^2}\cdot\sqrt{4+m^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\Rightarrow m=\sqrt{3}$$

18. 已知函数$f(x)=ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若$b=0$，且$f'(x)\geq 0$，求a的最小值；

（2）证明：曲线$f(x)$为中心对称函数；

（3）若$f(x)>-2$，当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围。

【答案】（1）$a=-2$　（3）$b\geq-\frac{2}{3}$

【解析】

（1）$f(x)=ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$，$b=0$

$f(x)=ln\frac{x}{2-x}+ax$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+a\geq 0\Rightarrow a\geq-\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}$

$$-\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}=\frac{-2}{x(2-x)}\Rightarrow\left(-\frac{2}{x(2-x)}\right)_{max}=-2$$

故a的最小值为-2

（2）$f(x)+f(2-x)=ln\frac{x}{2-x}+ln\frac{2-x}{x}+ax+a(2-x)+b(x-1)^3+b(1-x)^3=2a$

故曲线$f(x)$关于$(1,a)$对称

（3）因为$f(1)=a\leq-2$，否则解集中含有$x=1$；又由（1）知$a\geq-2$，否则$f'(1)<0$，从而$a=-2$，$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$

$$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}-2+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[3b+\frac{2}{x(2-x)}\right]$$

设$g(x)=3b+\frac{2}{x(2-x)}$，$g(1)=3b+2$

正向：$b\geq-\frac{2}{3}$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)>f(1)=-2$

反向：$b < -\frac{2}{3}$时，由导数的保号性知存在$(1,\delta), f'(x) < 0$，此时$f(x) < -2$

所以$b \geq -\frac{2}{3}$

19. 设m为正整数，数列$a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$是公差不为0的等差数列，若从中删去两项$a_i$和$a_j(i < j)$后剩余的$4m$项可被平均分为$m$组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列
$a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$是$(i,j)$—可分数列.
(1) 写出所有的$(i < j)$，$1 \leq i < j \leq 6$，使数列$a_1, a_2, \ldots, a_6$是$(i < j)$—可分数列；
(2) 当$m \geq 3$时，证明:数列$a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$是$(2,13)$—可分数列；
(3) 从$1,2,\ldots,4m+2$中一次任取两个数i和$j(i < j)$记数列$a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$是$(i < j)$—可分数列的概率为$P_m$，证明：
$P_m > \frac{1}{8}$.

【答案】（1）$(1,2),(5,6),(1,6)$；（2）证明见解析；（3）证明见解析
【解析】
（1）略
（2）该数列前 14 项中，a_1, a_4, a_7, a_{10}，a_3, a_6, a_9, a_{12}，a_5, a_8, a_{11}, a_{14}分别为等差数列，
则在去掉a_2, a_{13}后，该数列剩余的$4m + 2 - 14 = 4m - 12$项可被4整除，则后面连续4项均可构成等差数列，例如：$a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}$;..;$a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}$分别为等差数列，证毕.
（3）由（1）得：在a_{4m+2}整体数列中可取的项的下标应满足相邻关系或相隔$4k(k \geq 1)$项，则满足题意的(i,j)为：

	$i = 1$	$i = 5$	$i = 9$	⋯	$i = 4m - 3$
$j = 2$	$(1,2)$				
$j = 6$	$(1,6)$	$(5,6)$			
$j = 10$	$(1,10)$	$(5,6)$	$(9,10)$		
⋯	⋯.	⋯.	⋯.	⋯.	
$j = 4m + 2$	$(1,4m + 2)$	$(5,4m + 2)$	$(9,4m + 2)$	⋯.	$(4m + 1,4m + 2)$

则符合题意的情况共$s_1 = (m + 1) + m + (m - 1) + \cdots + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$种

由（2）得，取出a_2, a_9后，a_1, a_3, a_5, a_7;a_4, a_6, a_8, a_{10}分别为等差数列，则a_{4m+2}中剩余的$4m + 2 - 10 = 4m - 8$项

中，相邻的四项均可分别构成等差数列，如：$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14};\ldots;a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$.，则可推出满足题意的$(i,j)$为：

	$i=2$	$i=6$	$i=10$	$\cdots$	$i=4m-6$
$j=9$	$(2,9)$				
$j=13$	$(2,13)$	$(6,13)$			
$j=17$	$(2,17)$	$(6,17)$	$(10,17)$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$j=4m+1$	$(2,4m+1)$	$(6,4m+1)$	$(10,4m+1)$	$\cdots$	$(4m-6,4m+1)$

则符合题意的情况共$s_2=(m-1)+(m-2)+\cdots+1=\frac{m(m-1)}{2}$种

综上以上两种情况，共$s_1+s_2=m^2+m+1$种，

则$P_m=\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8m^2+8m+8}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$，证毕.