2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数 学

本试卷共 12 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x|-4<x\le 1\},N=\{x|-1<x<3\}$，则 $M\cup N=$____▲____.

2. 已知 $\dfrac{Z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则 $Z=$____▲____.

3. 求圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离____▲____.

4. $(x-\sqrt{x})^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为____▲____.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$”的____▲____ 条件.

6. 已知 $f(x)=\sin\omega x$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{min}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=$____▲____.

7. 记水的质量为 $d=\dfrac{S-1}{\ln n}$，并且 d 越大，水质量越好. 若 S 不变，且 $d_1=2.1,d_2=2.2$，则 n_1 与 n_2 的关系为____▲____.

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 $4,4,2\sqrt{2},2\sqrt{2}$，求该四棱锥的高.

9. 已知 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是 $y=2^x$ 上的点，则下列正确的是

   A. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$　B. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$　C. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　D. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 若集合 $\{y|y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\}$ 表示的图形中，两点间最大距离为 d、面积为 S，则

    A. $d=3,S<1$　B. $d=3,S>1$　C. $d=\sqrt{10},S<1$　D. $d=\sqrt{10},S>1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为___▲___.

12. 已知 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 α 与 β 的终边关于原点对称，则 $\cos\beta$ 的最大值为___▲___.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，则过 $(3,0)$ 且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为___▲___.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列. 第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为___▲___.

15. 已知 $M=\{k|a_k=b_k\}$，a_n,b_n 不为常数列且各项均不相同，下列正确的是___▲___.

①a_n,b_n 均为等差数列，则 M 中最多一个元素；

②a_n,b_n 均为等比数列，则 M 中最多三个元素；

③a_n 为等差数列，b_n 为等比数列，则 M 中最多三个元素；

④a_n 单调递增，b_n 单调递减，则 M 中最多一个元素.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，A 为钝角，$\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求 $\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求 $\triangle ABC$ 的面积.

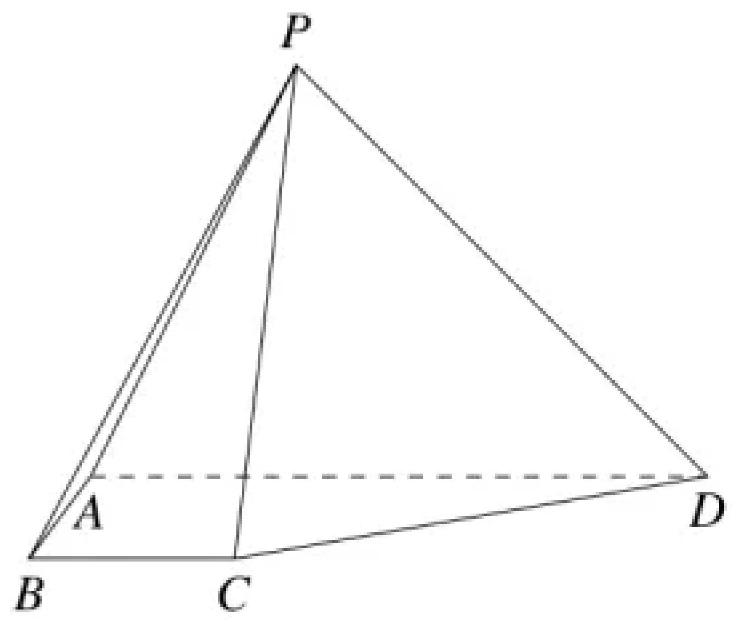
①$b=7$；②$\cos B=\dfrac{13}{14}$；③$c\sin A=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥 $P-ABCD$，$AD//BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E 是 AD 上一点，$PE\perp AD$.

（1）若 F 是 PE 中点，证明：$BF//$ 平面 PCD.

（2）若 $AB\perp$ 平面 PED，求面 PAB 与面 PCD 夹角的余弦值.



18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

（1）求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

（2）(i) 毛利润是保费与赔偿金额之差. 设毛利润为 X，估计 X 的数学期望；

(ii) 若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降 4%，已赔偿过的增加 20%. 估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

19. 已知椭圆方程 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过 $(0,t)(t>\sqrt{2})$ 的直线 l 与椭圆交于 A,B、$C(0,1)$，连接 AC 交椭圆于 D.

（1）求椭圆方程和离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t.

20. 已知 $f(x)=x+k\ln(1+x)$ 在 $(t,f(t))(t>0)$ 处切线为 l.

（1）若切线 l 的斜率 $k=-1$，求 $f(x)$ 单调区间；

（2）证明：切线 l 不经过 $(0,0)$；

（3）已知 $A(t,f(t)),C(0,f(t)),O(0,0)$，其中 $t>0$，切线 l 与 y 轴交于点 B. 时当 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的 A 的个数为?

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 设集合 $M=\{(i,j,s,t)|i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},s\in\{5,6\},t\in\{7,8\}\}$.

对于给定有穷数列 A 和序列 $\Omega:\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s,\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换 T：将数列 A 的第 i_1,j_1,s_1,t_1 列加 1，得到数列 $T_1(A)$；将数列 $T_1(A)$ 的第 i_2,j_2,s_2,t_2 列加 1，得到数列 $T_2T_1(A)$...；重复上述操作，得到数列 $T_s\cdots T_2T_1$，记为 $\Omega(A)$.

（3）若 $a_1+a_3+a_5+a_9$ 为偶数，证明："$\Omega(A)$ 为常数列"的充要条件为"$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$".

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

【第 1 题】

【答案】(-4,3)

【第 2 题】

【答案】-1-i

【第 3 题】

【答案】$3\sqrt{2}$

【第 4 题】

【答案】6

【第 5 题】

【答案】必要不充分

【第 6 题】

【答案】2

【第 7 题】

【答案】若 $S>1$，则 $n_1>n_2$；若 $S<1$，则 $n_1<n_2$.

【第 8 题】

【答案】$\sqrt{3}$

【第 9 题】

【答案】A

【第 10 题】

【答案】C

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

【第 11 题】

【答案】(4,0）

【第 12 题】

【答案】$-\frac{1}{2}$

【第 13 题】

【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【第 14 题】

【答案】57.5mm，23mm

【第 15 题】

【答案】①③④

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

【第 16 题】

【答案】（1） $A=\frac{2\pi}{3}$；（2） $S=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【解析】（1） $\because 2\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$，$\therefore \sqrt{3}b=14\sin B=2a\sin B$.

$\because \sqrt{3}\sin B=2\sin A\sin B$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\because A>\frac{\pi}{2}$， $\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)①不可能.

②$\because \sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$， $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{13}{14}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}>0$.

∴构成三角形.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$， $b=\dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=3$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin c=\dfrac{1}{2}\times 7\times 3\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

③$\because c\sin A=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$，$c=5$， $\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin c}$， $\therefore \sin c=\dfrac{c}{a}\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

$\therefore \cos C=\dfrac{11}{14}$， $\because A>\dfrac{\pi}{2}$， $\therefore \sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

【第 17 题】

【答案】（1）见详解；（2） $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$

【解析】 (1)证明：$\because AD=3, DE=2, \therefore AE=1, \therefore AE=BC$，$AE$ □ BC，

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

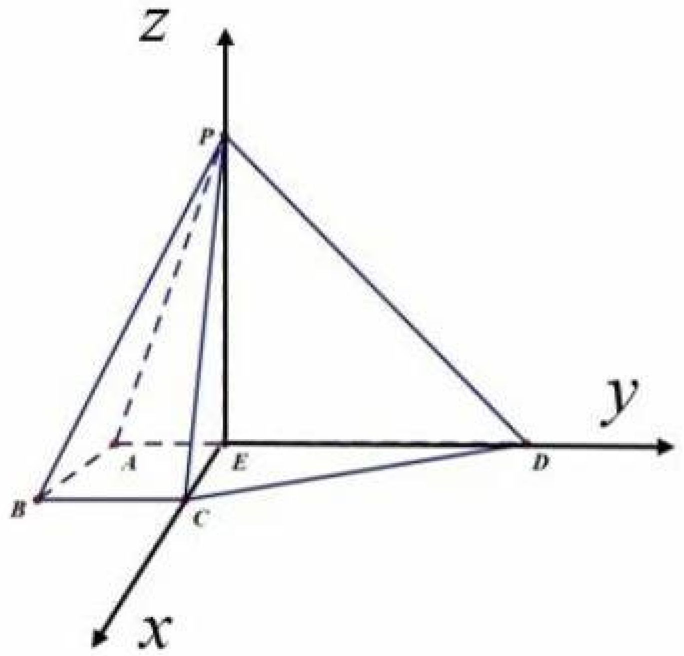
延长 EB, DC 交于点 G，则 $BC=\dfrac{1}{2}ED, BC$ □ ED，

∴BC 为△GED 的中位线.

$\because B$ 为 GE 中点，$\therefore BF$ 为 $\triangle EPG$ 中位线，

$\therefore BF /\!/ PG$，G 在 CD 上，$PG \subset$ 平面 PCD，$\therefore BF /\!/$ 平面 PCD.

(2)$\because AB \perp$ 平面 PED, EP, ED, EC 相互垂直，如图建系，



$\therefore P(0,0,2)$，$A(0,-1,0), C(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,0,0), \overrightarrow{AP}=(0,1,2), \overrightarrow{n_1}=(0,2,-1), \overrightarrow{n_2}=(2,1,1)$，

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{30}.$$

【第 18 题】

【答案】(1) $\frac{1}{70}$；(2)(i) 0.122 万元；(ii) 0.1252 万元

【解析】(1) $\frac{60+30+10}{800+100+60+30+10}=\frac{1}{70}$.

(2)(i) $E(X)=0.4-\left(0.8\times\frac{1}{10}+1.6\times\frac{3}{50}+2.4\times\frac{3}{100}+3\times\frac{1}{100}\right)$

$=0.122$ 万元.

(ii) 保费 $=0.4\times\frac{4}{5}\times 96\%+0.4\times\frac{1}{5}\times 1.2$ $=0.4032$；

$E(X)=0.122+0.0032=0.1252$ 万元.

【第 19 题】

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$t=2$

【解析】$(1)b=c=\sqrt{2},a=2,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)联立$\begin{cases} y=k_0+b, \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$

得$\left(2k^2+1\right)x^2+4ktx+2t^2-4=0$

设$A\left(y_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$.

$\therefore\ x_1+x_2=\frac{-4ht}{2k^2+1}$，　$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{2k^2+1}$，

$D(-x_2,y_2)$.

$\therefore\ AD:y=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}\left(x_0-x_1\right)+y_1$,

$y_c=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}$,

$y_c=\frac{2kx_1x_2+t\left(x_1+x_2\right)}{x_1+x_2}=\frac{4k\left(t^2-2\right)}{-4kt}+t=\frac{2}{t}=1$,

$\therefore t=2$.

【第 20 题】

【答案】见详解

【解析】（1）$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f^{'}(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ （x>-1），

$\therefore\ f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

（2）$f^{'}(x)=1+\frac{k}{1+x}$，$Y-f(t)=\left[1+\frac{k}{1+t}\right](x-t)\quad(t>0)$.

将$(0,0)$ 代入则 $-f(t)|=-t\left[1+\frac{k}{1+t}\right)$，$f(t)=t\left(1+\frac{k}{1+t}\right)$，

$t+k\ln(1+t)=t+t\dfrac{k}{1+t}, \ln(1+t)=\dfrac{t}{1+t}, \ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=0.$

令 $F(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$.反证法：假过 l 过 $(0,0)$，则 $F(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 存在零点.

$F'(t)=\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}=\dfrac{t}{(1+t)^2}>0$.$\therefore$ $F(t)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，$F(t)>F(0)=0$

$\therefore$ $F(t)$ 在（$0,+\infty$）无零点，$\therefore$ 与假设予盾，故 l 不过 $(0,0)$.

（3）（3）$k=1$ 时，$f(x)=x+\ln(1+x), f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x+2}{1+x}>0$.

$S_{\triangle ACO}=\dfrac{1}{2}tf(t)$，设 l 与 y 轴交点 B 为 $(0,q)$.,

则 $S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}qt$.

$t>0$ 时，若 $q<0$，则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知 $q\neq 0$，所以 $q>0$，且 $q=\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}$.

$\therefore$ $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，$2tf(t)=15\left[\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}\right]t$，

$\therefore$ $13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}=0$，记 $h(x)=13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}(t>0)$.

$\therefore$满足条件的 A 有 几个即 $h(x)$ 有几个零点.

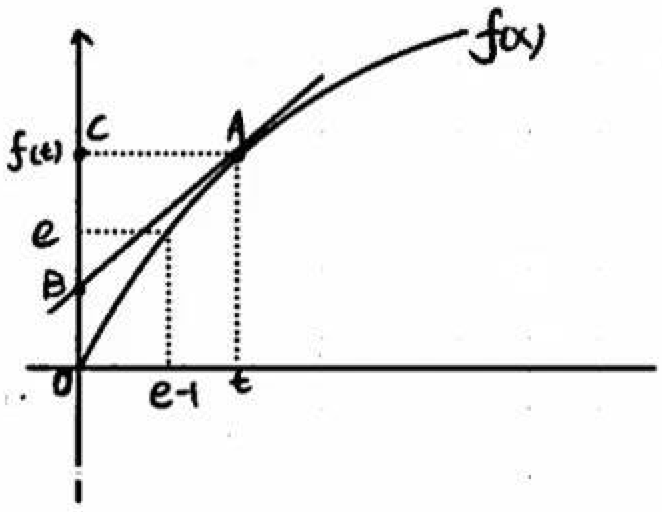
$$h'(x)=\frac{13}{1+t}-2-15\left[\frac{1}{(t+1)^2}\right]=\frac{13t+13-2\left(t^2+2t+1\right)-15}{(t+1)^2}=\frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+t)^2}$$

$\therefore$ $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减，$\left(\dfrac{1}{2},4\right)$上单调递调，在 $(4+\infty)$ 上单调递减.

$h(0)=0,\quad h\left(\dfrac{1}{2}\right)<0,\quad h(4)=13\ln 5-20>13\times 1.6-20=0.8>0,$

$h(999)<0$,所以由零点定理及 $h(x)$ 的单调性，$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 上必有一个零点，$(4,999)$ 上必有一个零点.

综上所述，$h(x)$ 有两个零点，即满足 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 的 A 有两个.



【第 21 题】

【答案】略