

初三数学

2024. 05

考生须知

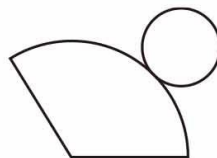
1. 本试卷共 7 页,共 28 道题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,将本试卷、答案卡和草稿纸一并交回。

一、选择题(共 16 分,每题 2 分)

第 1-8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个.

1. 如图是某几何体的展开图,该几何体是

- A. 三棱柱 B. 三棱锥
C. 圆柱 D. 圆锥



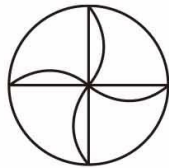
2. 截至 2023 年 12 月中旬,2023 年全民健身线上运动会已上线 199 项赛事,累计参赛人数达到 2189 万,证书总发放量达 1731 万张. 将 21 890 000 用科学记数法表示应为

- A. 21.89×10^6 B. 2.189×10^7 C. 2.189×10^8 D. 0.2189×10^9

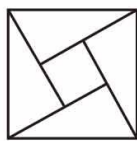
3. 下列图形中,既是轴对称图形又是中心对称图形的是



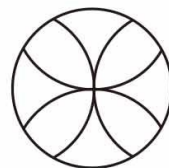
A.



B.

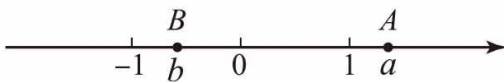


C.



D.

4. 如图, A, B 两点在数轴上表示的数分别是 a, b , 下列结论中正确的是



- A. $ab > 0$ B. $a + b > 0$ C. $|b| > |a|$ D. $b - a > 0$

5. 某学校组织学生到社区开展公益宣传活动,成立了“文明交通”“垃圾分类”两个宣传队,若小明和小亮每人随机选择参加其中一个宣传队,则他们恰好选到同一个宣传队的概率是

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

三、解答题(共 68 分,第 17-20 题,每题 5 分,第 21 题 6 分,第 22-23 题,每题 5 分,第 24-26 题,每题 6 分,第 27-28 题,每题 7 分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

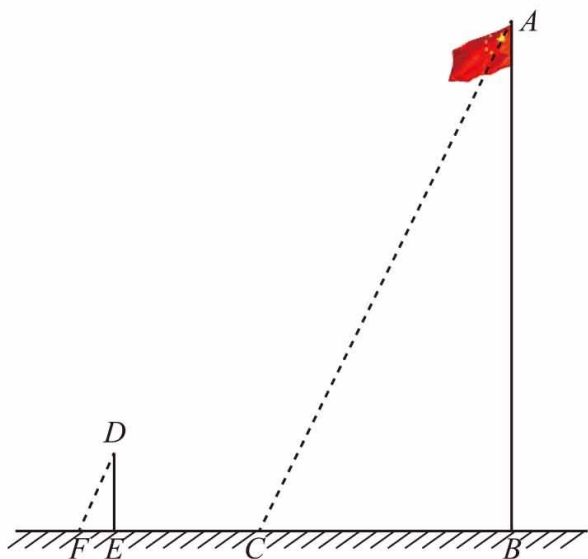
17. 计算: $\sqrt{12} - (\frac{1}{2})^{-1} + |-3| - 2\sin 60^\circ$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x-1) < x+3, \\ \frac{4x+1}{2} > x. \end{cases}$$

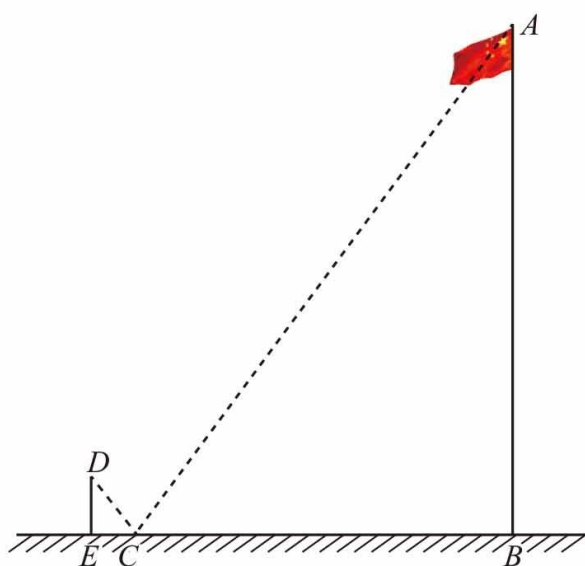
19. 已知 $x - y - 5 = 0$, 求代数式 $(\frac{x^2 + y^2}{x} - 2y) \div \frac{x - y}{2x}$ 的值.

20. 在数学活动课上,同学们分组测量学校旗杆的高度,经过交流、研讨及测量给出如下两种方案,请你选择一种方案求出旗杆的高度.

方案一:在某一时刻,借助太阳光线,测得小华的身高 DE 为 1.8 米,他的影长 EF 为 0.9 米,同时测得旗杆 AB 的影长 BC 为 6 米.



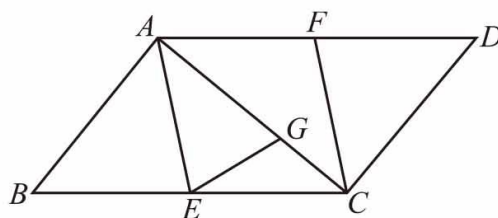
方案二:利用“光在反射时,反射角等于入射角”的规律,小丽在她的脚下 C 点放了一面小镜子,然后向后退 1.2 米到达点 E ,恰好在小镜子中看到旗杆的顶端 A ,此时旗杆底端 B 到点 C 的距离 BC 为 9 米,小丽的眼睛点 D 到地面的距离 DE 为 1.6 米.



21. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, E, F 分别是 BC, AD 的中点,连接 AE, CF, G 是线段 AC 上一点,且 $AE = AG$,连接 EG .

(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是菱形;

(2) 若 $AB = 6, BC = 10$, 求 EG 的长.

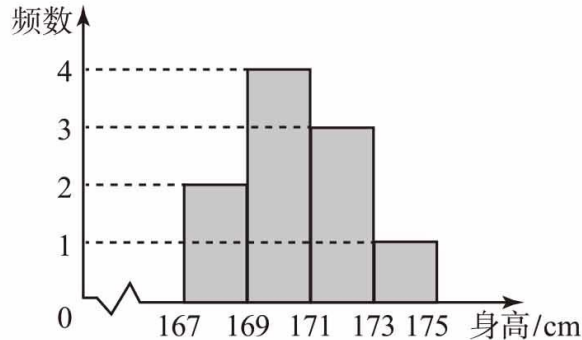


22. 某校有 A, B 两个合唱队, 每队各 10 名学生. 测量并获取了所有学生身高(单位: cm) 的数据, 并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

a. A 队学生的身高:

165 167 168 170 170 170 171 172 173 174

b. B 队学生身高的频数分布直方图如下(数据分成 4 组: $167 \leq x < 169$, $169 \leq x < 171$, $171 \leq x < 173$, $173 \leq x \leq 175$):



c. B 队学生身高的数据在 $169 \leq x < 171$ 这一组的是:

169 169 169 170

d. A, B 两队学生身高数据的平均数、中位数、众数、方差如下:

	平均数	中位数	众数	方差
A 队	170	170	m	6.8
B 队	170	n	169	3.4

根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 写出表中 m, n 的值;
- (2) 对于不同队的学生, 若学生身高的方差越小, 则认为该队舞台呈现效果越好. 据此推断: A, B 两队舞台呈现效果更好的是_____ (填“A 队”或“B 队”);
- (3) A 队要选 5 名学生参加比赛, 已确定 3 名学生参赛, 他们的身高分别为 170, 170, 173, 他们的身高的方差为 2. 下列推断合理的是_____ (填序号).
 - ①另外选 2 名学生的身高为 171 和 172 时, 5 名学生身高的平均数大于 171, 方差小于 2;
 - ②另外选 2 名学生的身高为 168 和 170 时, 5 名学生身高的平均数小于 171, 方差小于 2.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = 2x$ 的图象平移得到, 且经过点 $(1, 5)$.

- (1) 求这个函数的表达式;
- (2) 当 $x < -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的值大于函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值, 直接写出 m 的取值范围.

24. 综合实践活动课上,老师给每位同学准备了一张边长为 30cm 的正方形硬纸板,要求在 4 个角上剪去相同的小正方形(如图 1),这样可制作一个如图 2 所示的无盖的长方体纸盒. 设剪去的小正方形的边长为 x cm ($1 \leq x \leq 14$),则纸盒的底面边长为 $(30 - 2x)$ cm.

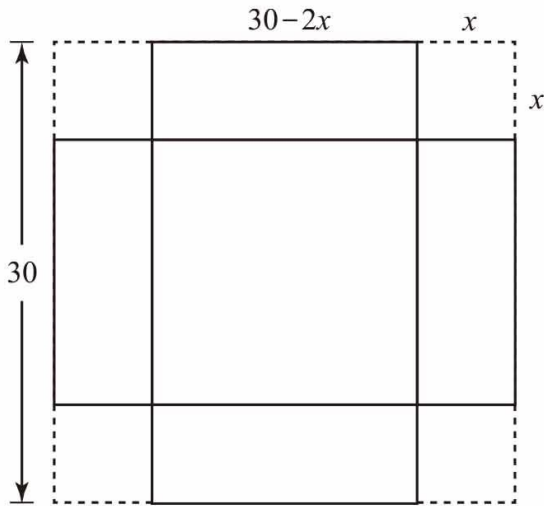


图 1

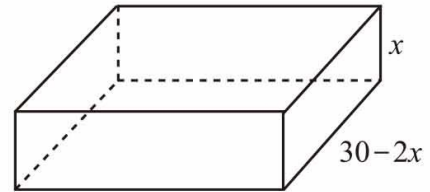


图 2

a. 甲同学研究无盖纸盒的底面积,得到:

无盖纸盒的底面积 y_1 与剪去小正方形的边长 x 的函数表达式为 $y_1 = (30 - 2x)^2$;

b. 乙同学研究无盖纸盒的侧面积(四个侧面面积之和),得到:

无盖纸盒的侧面积 y_2 与剪去小正方形的边长 x 的函数表达式为 $y_2 = 4x(30 - 2x)$;

c. 丙同学研究无盖纸盒的体积,得到:

无盖纸盒的体积 y_3 与剪去小正方形的边长 x 的函数表达式为 $y_3 = x(30 - 2x)^2$.

y_3 与 x 的几组对应值如下表:

x (cm)	1	2.5	5	7.5	10	12.5	14
y_3 (cm ³)	784	1562.5	2000	1687.5	1000	312.5	56

如图 3,在平面直角坐标系 xOy 中,描出了表中各组数值所对应的点 (x, y_3) ,并用平滑曲线连接这些点,得到了函数 $y_3 = x(30 - 2x)^2$ ($1 \leq x \leq 14$) 的图象.

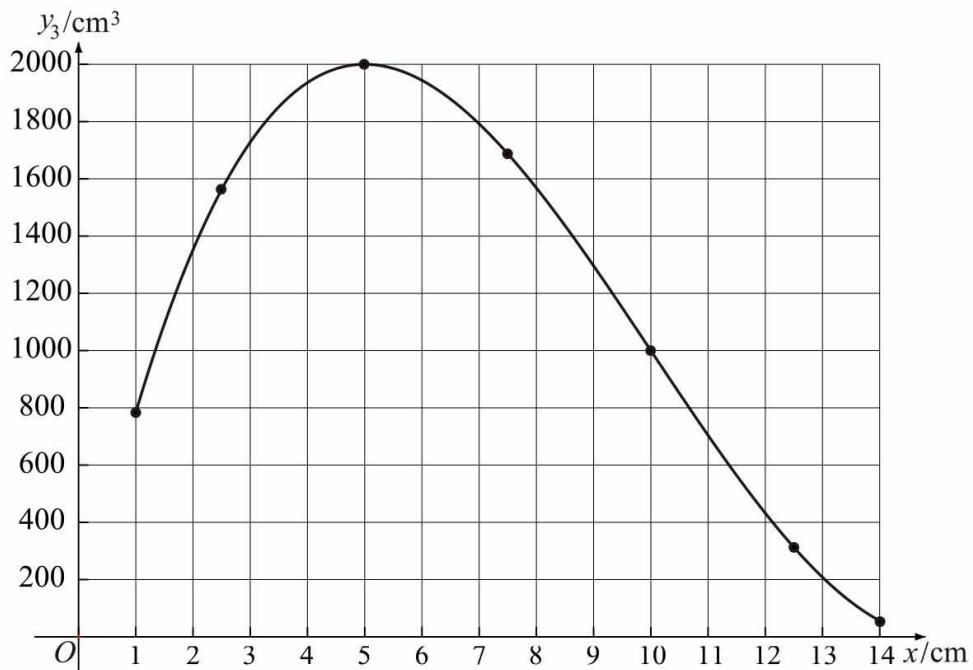
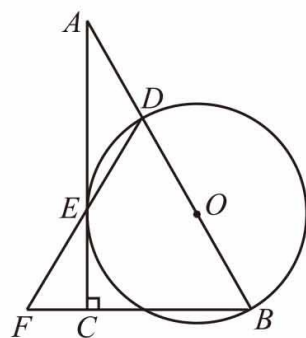


图 3

根据以上信息,解决下列问题:

- (1) 当剪去小正方形的边长 x 为 10cm 时,则无盖纸盒的底面积 y_1 为 _____ cm^2 ;
- (2) 当无盖纸盒的侧面积 y_2 取最大值时,求剪去小正方形的边长 x 的值;
- (3) 下列推断合理的是 _____ (填序号);
- ① 当 $1 \leq x \leq 14$ 时,无盖纸盒的体积 y_3 随着剪去小正方形的边长 x 的增大而减小;
- ② 当剪去的小正方形的边长 x 为 11cm 时,无盖纸盒的体积 y_3 小于 1000cm^3 ;
- ③ 当无盖纸盒的体积 y_3 为 1000cm^3 时,剪去的小正方形的边长 x 只能为 10cm.
- (4) 当无盖纸盒的体积 y_3 为 2000cm^3 时,无盖纸盒的侧面积 y_2 为 _____ cm^2 .

25. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 边上一点,以 BD 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 E ,连接 DE 并延长交 BC 的延长线于点 F ,且 $BD = BF$.

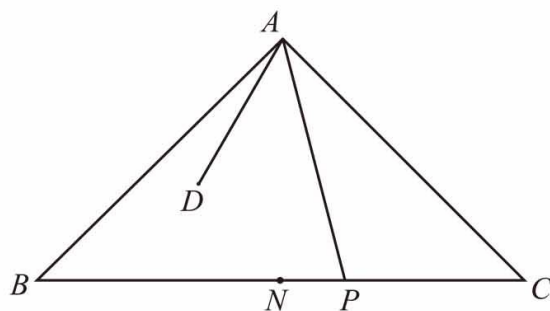


- (1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $CF = 2$, $\tan \angle CEF = \frac{1}{2}$,求 AD 的长.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(-1, m)$ 和点 $B(4, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ ($a > 0$) 上,设抛物线的对称轴为 $x = t$.

- (1) 若 $m = 1, n = 6$,求 t 的值;
- (2) 已知点 $C(1, y_1), D(\frac{3}{2}t, y_2)$ 在该抛物线上,若 $m > -2, n < -2$,比较 y_1, y_2 的大小,并说明理由.

27. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, \angle BAC = 2\alpha, N$ 是 BC 中点, P 为 NC 上一点,连接 AP, D 为 $\triangle BAP$ 内一点,且 $\angle DAP = \alpha$,点 D 关于直线 AP 的对称点为点 E, DE 与 AP 交于点 M ,连接 BD, CE .



- (1) 依题意补全图形;
- (2) 求证: $BD = EC$;
- (3) 连接 MN ,若 $\angle DBC + \angle ECB = 90^\circ$,用等式表示线段 BD 与 MN 的数量关系,并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中,对于点 $T, M(a,b), N(n,0)$,给出如下定义:若点 N 以点 T 为中心逆时针旋转 90° 后,能与点 M 重合,则称点 T 为线段 MN 的“完美等直点”.

(1)如图 1,当 $a = 0, b = 2, n = 2$ 时,线段 MN 的“完美等直点”坐标是_____;

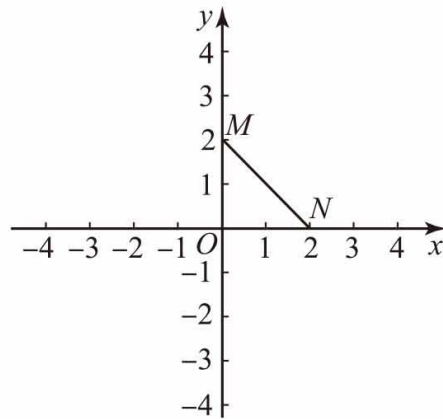


图 1

(2)如图 2,当 $a = 0, n = 2$ 时,若直线 $y = x + 2$ 上的一点 T ,满足 T 是线段 MN 的“完美等直点”,求点 T 的坐标及 b 的值;

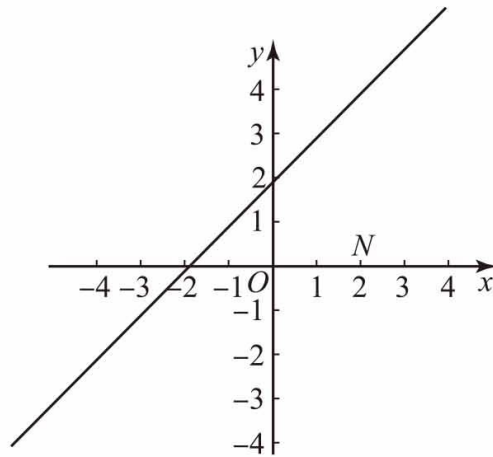


图 2

(3)当 $-2 \leq n \leq 4$ 时,若点 $M(a,b)$ 在以 $(1,1)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上,点 T 为线段 MN 的“完美等直点”,直接写出点 T 的横坐标 t 的取值范围.

大兴区 2023 ~ 2024 学年度第二学期初三期末检测

数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	B	C	B	C	A

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$x \neq 5$	$3(x+1)(x-1)$	$x = -1$	$>$	6	$2\sqrt{3}$	答案不唯一， 例如： $AB=CD$	8, 4

三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27~28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解：原式 = $2\sqrt{3} - 2 + 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4 分
 $= \sqrt{3} + 1$ 5 分

18. 解：
$$\begin{cases} 2(x-1) < x+3, & \text{①} \\ \frac{4x+1}{2} > x. & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，得 $x < 5$ 2 分

解不等式②，得 $x > -\frac{1}{2}$ 4 分

所以原不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < x < 5$ 5 分

19. 解：原式 = $\left(\frac{x^2+y^2}{x} - \frac{2xy}{x} \right) \cdot \frac{2x}{x-y}$.

$= \left(\frac{x^2+y^2-2xy}{x} \right) \cdot \frac{2x}{x-y}$ 1 分

$= \frac{(x-y)^2}{x} \cdot \frac{2x}{x-y}$ 2 分

$= 2(x-y)$ 3 分

$\because x-y-5=0$ 4 分

$\therefore x-y=5$.

\therefore 原式 = 10. 5 分

20. 方案一:

解: 由题意得,

$\angle DEF = \angle ABC = 90^\circ$, $DF \parallel AC$1分

$\therefore \angle DFE = \angle ACB$2分

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$3分

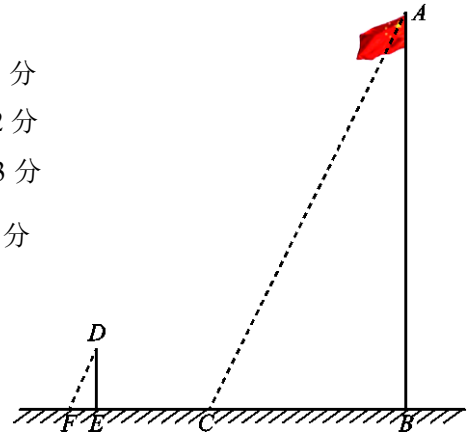
$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$4分

$\because DE = 1.8, EF = 0.9, BC = 6$,

$\therefore \frac{1.8}{AB} = \frac{0.9}{6}$.

$\therefore AB = 12$.

答: 旗杆高度为 12m.5分



方案二:

解: 由题意得,

$\angle DEC = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle DCE = \angle ACB$ 1分

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ABC$2分

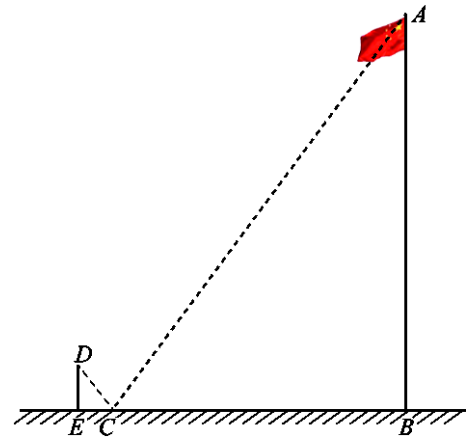
$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$3分

$\because DE = 1.6, EC = 1.2, BC = 9$,

$\therefore \frac{1.6}{AB} = \frac{1.2}{9}$4分

$\therefore AB = 12$.

答: 旗杆高度为 12m.5分



21. (1) 证明:

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$, $AD \parallel BC$.

\because 点 E, F 分别为 AD, BC 中点,

$\therefore AF = \frac{1}{2} AD$, $EC = \frac{1}{2} BC$.

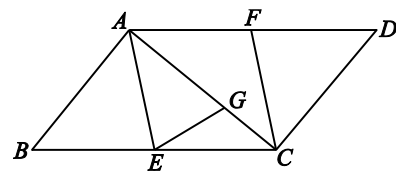
$\therefore AF = EC$.

\therefore 四边形 $AECF$ 是平行四边形.1分

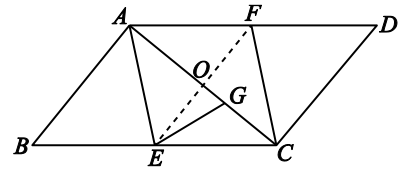
$\because \angle BAC = 90^\circ$, 点 E 为 BC 中点,

$\therefore AE = \frac{1}{2} BC = EC$.

\therefore 四边形 $AECF$ 是菱形.2分



(2) 解: 连接 EF , 交 AC 于点 O .



在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$, $AB=6, EC=10$,

$\therefore AC = 8$ (舍负).3分

$\therefore AE = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore AE = 5$.

$\therefore AE = AG$,

$\therefore AG = 5$4分

\therefore 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\therefore O$ 是 AC 的中点, $AC \perp EF$.

$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 4$, $EO = \frac{1}{2}AB = 3$.

$\therefore OG = AG - AO = 5 - 4 = 1$5分

在 $Rt\triangle EOG$ 中,

$\therefore EO^2 + OG^2 = EG^2$,

$\therefore EG = \sqrt{10}$ (舍负)6分

22.解: (1) $m = 170, n = 169.5$;2分

(2) B 队;3分

(3) ①.5分

23. 解: (1) \because 函数 $y = kx + b$ 的图象是由 $y = 2x$ 的图象平移得到的,

$\therefore k = 2$1分

把 $(1, 5)$ 代入 $y = 2x + b$, 解得 $b = 3$2分

\therefore 函数的表达式是 $y = 2x + 3$3分

(2) $m \leq -1$5分

24. (1) 100;1分

(2) 解: $y_2 = 4x(30 - 2x) = -8x^2 + 120x = -8(x - \frac{15}{2})^2 + 450$.

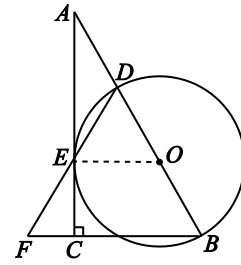
答: 当剪去小正方形的边长 x 为 $\frac{15}{2}$ cm 时, y_2 取得最大值;3分

(3) ②;5分

(4) 400.6分

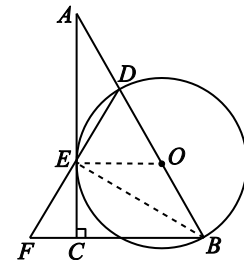
25. (1) 证明: 连接 OE .

$\because OD=OE,$
 $\therefore \angle ODE=\angle OED. \dots\dots\dots 1$ 分
 $\because BD=BF,$
 $\therefore \angle BDF=\angle F.$
 $\therefore \angle OED=\angle F.$
 $\therefore OE \parallel BF.$
 $\therefore \angle AEO=\angle ACB=90^\circ.$
 $\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线. $\dots\dots\dots 2$ 分



(2) 解: 如图, 连接 BE .

$\because \angle ACB=90^\circ,$
 $\therefore \angle ECF=90^\circ,$
 在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中,
 $\because \tan \angle CEF = \frac{FC}{EF} = \frac{1}{2},$
 $\therefore CF=2,$
 $\therefore CE=4. \dots\dots\dots 3$ 分



$\because BD$ 是直径,
 $\therefore \angle DEB=\angle FEB=90^\circ.$
 $\therefore \angle CEF+\angle CEB=90^\circ.$
 $\because \angle ACB=90^\circ,$
 $\therefore \angle FBE+\angle CEB=90^\circ.$
 $\therefore \angle FBE=\angle CEF.$
 $\therefore \tan \angle FBE = \tan \angle CEF = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}.$
 $\therefore BC=8. \dots\dots\dots 4$ 分

$\therefore BF=BC+CF=10.$
 $\therefore BD=BF=10.$
 $\therefore OE=5.$

在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中,

$$\because \sin A = \frac{OE}{AO} = \frac{5}{AD+5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中,

$$\because \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{AD+10},$$

$$\therefore \frac{5}{AD+5} = \frac{8}{AD+10}. \dots\dots\dots 5$$
 分

$$\therefore AD = \frac{10}{3}. \dots\dots\dots 6$$
 分

26. 解: (1) 把点 $A(-1, 1)$ 和点 $B(4, 6)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 2$ 得,

$$\begin{cases} a - b - 2 = 1, \\ 16a + 4b - 2 = 6. \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} a = 1, \\ b = -2. \end{cases}$ 1 分

$\therefore t = -\frac{b}{2a} = 1.$ 2 分

(2) $\because a > 0,$

\therefore 当 $x > t$ 时, y 随 x 的增大而增大. 3 分

令 $x = 0$, 得 $y = -2$,

\therefore 抛物线与 y 轴交点坐标为 $(0, -2)$.

$\because m > -2, n < -2, -1 < 0 < 4,$

$\therefore (-1, m), (0, -2)$ 在对称轴的左侧,

设点 $(0, -2)$ 关于对称轴 $x = t$ 的对称点坐标 $(x_0, -2)$,

$\therefore x_0 - t = t - 0$.

$\therefore x_0 = 2t$.

\therefore 点 $(0, -2)$ 关于对称轴 $x = t$ 的对称点坐标为 $(2t, -2)$ 4 分

$\because n < -2,$

$\therefore 2t > 4.$

$\therefore t > 2.$ 5 分

\therefore 点 $C(1, y_1)$ 在对称轴左侧, 点 $D(\frac{3}{2}t, y_2)$ 在对称轴右侧.

设点 $C(1, y_1)$ 关于对称轴 $x = t$ 的对称点坐标 (x_0', y_1) ,

$\therefore x_0' - t = t - 1$.

$\therefore x_0' = 2t - 1$.

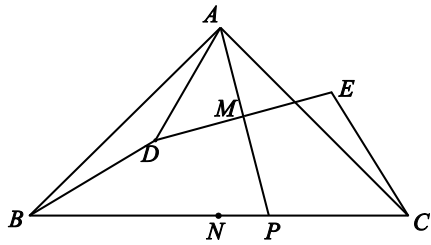
\therefore 点 $C(1, y_1)$ 关于对称轴 $x = t$ 的对称点坐标为 $(2t - 1, y_1)$.

$\therefore 2t - 1 - \frac{3}{2}t = \frac{1}{2}t - 1 > 0.$

$\therefore 2t - 1 > \frac{3}{2}t.$

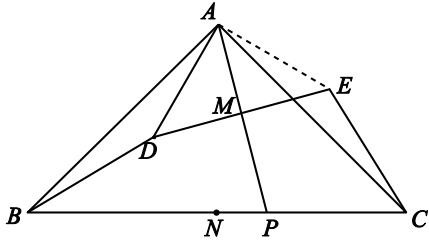
$\therefore y_1 > y_2.$ 6 分

27.解：(1) 依题意补全图形：



.....1分

(2) 证明：连接 AE .



\because 点 D 关于直线 AP 的对称点为 E , $\angle DAP = \alpha$,

$\therefore \angle EAP = \angle DAP = \alpha$, $AD = AE$.

$\therefore \angle DAC + \angle EAC = 2\alpha$.

$\because \angle BAC = 2\alpha$,

$\therefore \angle DAC + \angle DAB = 2\alpha$.

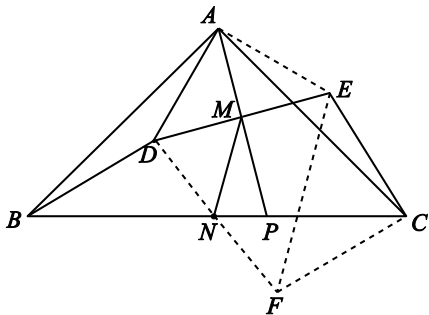
$\therefore \angle DAB = \angle EAC$2分

$\because AB = AC$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC$.

$\therefore BD = EC$3分

(3) 用等式表示线段 BD 与 MN 的数量关系是： $BD = \sqrt{2}MN$4分



证明：连接 DN 并延长到 F , 使得 $NF = ND$, 连接 FC , EF .

\therefore 点 N 是 DF 中点.

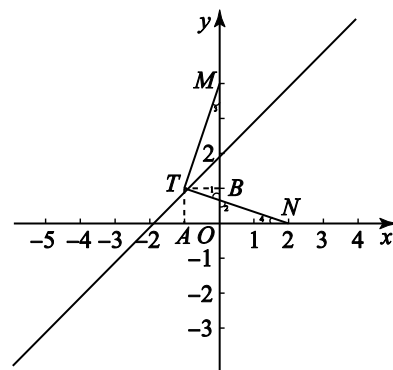
\because 点 D 关于直线 AP 的对称点为 E , DE 与 AP 交于 M ,

\therefore 点 M 是 DE 中点.
 $\therefore MN$ 为 $\triangle DEF$ 的中位线.
 $\therefore MN = \frac{1}{2} EF$5 分
 \therefore 点 N 是 BC 中点,
 $\therefore NB = NC$.
 $\therefore \angle BND = \angle CNF, NF = ND$,
 $\therefore \triangle BND \cong \triangle CNF$.
 $\therefore CF = BD, \angle DBC = \angle FCN$.
 又 $\therefore BD = CE$,
 $\therefore CF = CE$6 分
 $\therefore \angle DBC + \angle BCE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FCN + \angle BCE = 90^\circ$.
 $\therefore \angle ECF = 90^\circ$.
 $\therefore \angle CEF = \angle CFE = 45^\circ$.
 $\therefore EF = \sqrt{2} CE$.
 $\therefore BD = CE, MN = \frac{1}{2} EF$,
 $\therefore MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BD$.
 $\therefore BD = \sqrt{2} MN$7 分

28. 解: (1) $(0,0)$ 1 分

(2) 过点 T 作 $TA \perp x$ 轴, $TB \perp y$ 轴, 垂足分别为 A, B2 分

$\therefore \angle TBM = \angle TAN = 90^\circ$.
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$.
 $\therefore TM = TN$,
 $\therefore \triangle MBT \cong \triangle NAT$.
 $\therefore TA = TB, BM = AN$.
 \therefore 点 T 在直线 $y = x + 2$ 上, 不妨设点 T 坐标为 $(x, x+2)$.
 $\therefore |x| = |x+2|$.



- 解得： $x = -1$3 分
- \therefore 点 T 坐标为 $(-1, 1)$4 分
- 点 A 坐标为 $(-1, 0)$.
- 点 B 坐标为 $(0, 1)$.
- $\therefore AN = BM = 3$.
- $\therefore OM = 4$.
- $\therefore b = 4$ 5 分
- (3) $-2 \leq t \leq 3$7 分