

数学试卷

2024.5

学校 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 教育 ID 号 _____

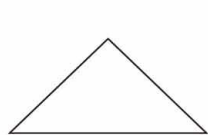
考生
须知

1. 本试卷共 8 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和教育 ID 号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束后,将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

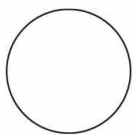
一、选择题(本题共 16 分,每小题 2 分)

第 1—8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个。

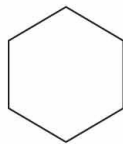
1. 下列图形中,是轴对称图形但不是中心对称图形的是



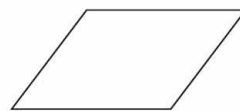
A



B



C



D

2. 4 月 18 日是国际古迹遗址日. 在国家考古遗址公园联盟联席会上发布的《2023 年度国家考古遗址公园运营报告》显示,圆明园等全国 55 家国家考古遗址公园 2023 年接待游客总量超 6 700 万人次,同比增长 135%. 将 67 000 000 用科学记数法表示应为

A. 6.7×10^8

B. 6.7×10^7

C. 67×10^6

D. 0.67×10^8

3. 在下列各式中,从左到右计算结果正确的是

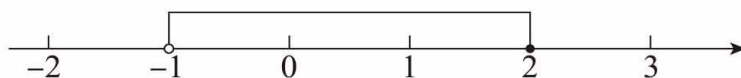
A. $\sqrt{8} - \sqrt{6} = \sqrt{2}$

B. $(x-1)^2 = x^2 - 1$

C. $\sqrt{(-2)^2} = -2$

D. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{x+1} = 1$

4. 若实数 x 的取值范围在数轴上的表示如图所示,在下列结论中,正确的是



A. $|x| = x$

B. $0 < x+1 \leq 3$

C. $-2 \leq 2x \leq 4$

D. $1 < x^2 \leq 4$

5. 若一个多边形的内角和是外角和的 3 倍, 则这个多边形的边数是

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 10

6. 一个圆锥的底面半径的长为 3, 母线的长为 15, 则侧面展开图的面积是

- A. 6π B. 9π C. 45π D. 54π

7. 在一个不透明的盒子中装有 3 个小球, 其中 2 个红球、1 个绿球, 除颜色不同外, 其它没有任何差异. 小红将小球摇匀, 从中随机摸出 2 个小球, 恰好是 1 个红球和 1 个绿球的概率是

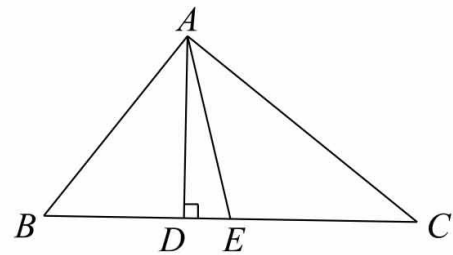
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , 点 E 是 BC 的中点. 设 $AB=c, AC=b, AD=h, BD=m, CD=n, m < n$, 且 $h^2 = mn$, 有以下三个结论:

- ① $c^2 = m^2 + mn$;
② 点 A, B, C 在以点 E 为圆心, $\frac{1}{2}(m+n)$ 为半径的圆上;
③ $b^2 + m^2 > 3h^2$.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③



二、填空题(本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 若分式 $\frac{2}{x-1}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

10. 因式分解: $ma^2 + 4ma + 4m =$ _____.

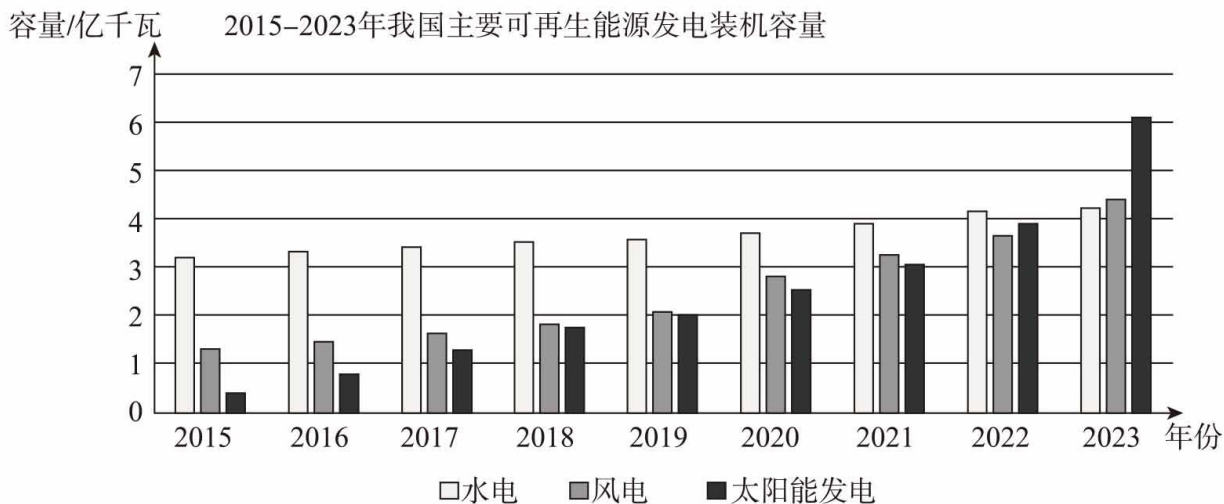
11. 当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, 可以说明“若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”是假命题(写出一组 a, b 的值即可).

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $(2, 4)$ 是函数 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$ 和 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$ 的图象的一个交点, 则这两个函数图象的另一个交点的坐标是_____.

13. 若 $m^2 + m - 5 = 0$, 则代数式 $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\right) \div \frac{m^2 - 1}{10m}$ 的值为_____.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+1)x + m = 0$ 的两个实数根的差等于 2, 则实数 m 的值是_____.

15. 下图是 2015—2023 年我国主要可再生能源发电装机容量(亿千瓦)统计图.



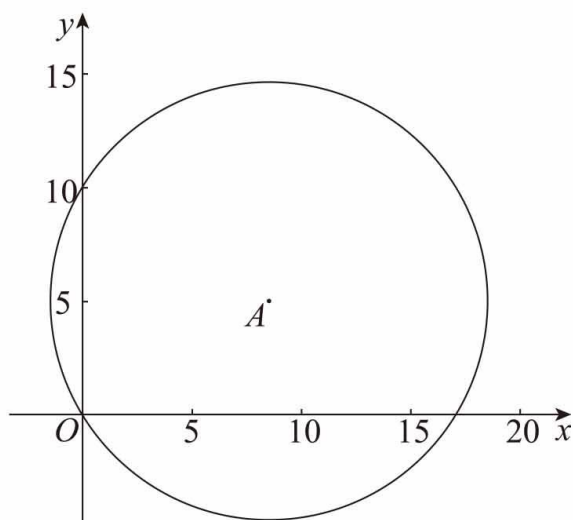
根据上述信息,下列推断合理的是_____ (填写序号).

- ①2015—2023 年,我国主要可再生能源发电中,太阳能发电装机容量增幅最大;
- ②2015—2023 年,相对于风电和太阳能发电,我国水电发电装机容量比较稳定;
- ③2015—2023 年,我国水电发电装机容量一直高于风电发电装机容量.

16. 现有一半径 10 米的圆形场地,建立如图所示的平面直角坐标系 xOy ,场地圆心 A

的坐标为 $(5\sqrt{3}, 5)$. 机器人在该场地中(含边界),根据指令 $[s, \alpha]$ ($s \geq 0, 0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 完成下列动作:先朝其面对的方向沿直线行走距离 s ,再在原地逆时针旋转角度 α ,执行任务. 机器人位于坐标原点 O 处,且面对 x 轴正方向.

- (1)若给机器人下达指令 $[4, 90^\circ]$,则机器人至少重复执行_____次该指令能回到坐标原点 O 处;
- (2)若给机器人下达指令 $[s, \alpha]$,使机器人重复执行该指令回到坐标原点 O 处,且 s 最大,则应给机器人下达的指令是_____.



三、解答题(本题共 68 分,第 17—22 题,每题 5 分,第 23—26 题,每题 6 分,第 27—28 题,每题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $\sqrt{12} - \tan 60^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - (-2)^3$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x+1) < 5x-4, \\ \frac{6x+1}{3} \geq x-1. \end{cases}$$

19. 如图,已知 $\odot O$ 及 $\odot O$ 外一点 P .

求作: $\odot O$ 的切线 PA, PC .

作法:

①连接 OP ;

②分别以点 O, P 为圆心,大于 $\frac{1}{2}OP$ 的长为半径画弧,两弧分别交于点 M, N ,

作直线 MN 交 OP 于点 B ;

③以点 B 为圆心, OB 的长为半径画圆,交 $\odot O$ 于点 A, C (点 A 位于 OP 的上方);

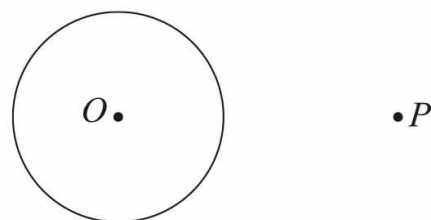
④作直线 PA, PC ;

则直线 PA, PC 就是所求作的直线.

(1)利用直尺和圆规,补全图形(保留作图痕迹);

(2)设线段 OP 交 $\odot O$ 于点 E ,连接 OA, AC, CE . 若 $\angle ACE = 34^\circ$,

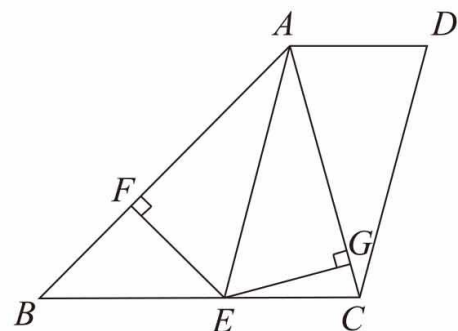
则 $\angle AOP =$ _____ $^\circ$, $\angle APC =$ _____ $^\circ$.



20. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,点 E 在 BC 上, $AE \parallel CD$, $\angle ACB = \angle DAC$, $EF \perp AB$ 于点 F , $EG \perp AC$ 于点 G , $EF = EG$.

(1)求证: 四边形 $AECD$ 是平行四边形;

(2)若 $CD = 4$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle CEG = 15^\circ$, 求 AB 的长.



21. 列方程或方程组解应用题.

如图 1, 正方形 $ABCD$ 是一块边长为 30 cm 的灰色地砖, 在 A, B, C, D 四个顶点处截去四个全等的等腰直角三角形后, 得到一块八边形地砖. 用四块相同的该八边形地砖和一块黑色正方形地砖拼成如图 2 所示的图案, 该图案的面积为 $3\ 000\text{ cm}^2$ (不考虑接缝), 求一块八边形地砖和黑色正方形地砖的面积.

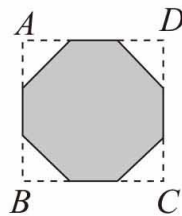


图1

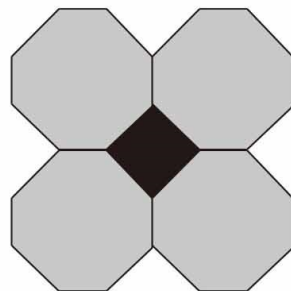


图2

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(1,0)$ 和 $B(2,1)$.

(1) 求该函数的解析式;

(2) 当 $x > 3$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y=mx+\frac{1}{2}$ 的值小于函数 $y=kx+b(k \neq 0)$

的值, 当 $x < -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y=mx+\frac{1}{2}$ 的值小于 0, 直接写出

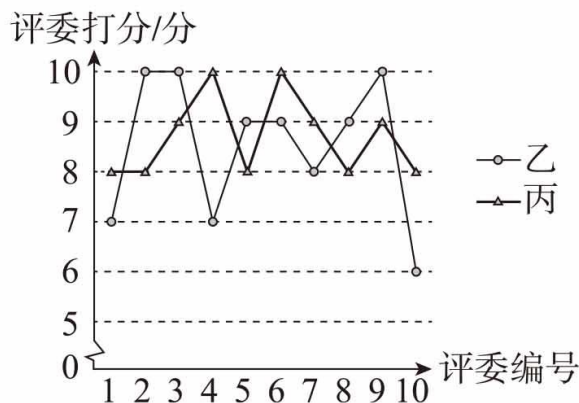
m 的值.

23. 某校举办“学生讲堂”,1班为了选出一位同学代表班级参赛,先后进行了笔试和面试.在笔试中,甲、乙、丙三位同学脱颖而出,他们的笔试成绩(满分100)分别是95,94,88.在面试中,十位评委对甲、乙、丙三位同学的表现进行打分,每位评委最高打10分,面试成绩等于各位评委打分之和.对甲、乙、丙三位同学的面试的数据进行整理、描述和分析,下面给出了部分信息.

a. 评委给甲同学打分如下:

10,10,9,8,8,8,7,7,6,5

b. 评委给乙、丙两位同学打分的折线图:



c. 甲、乙、丙三位同学面试情况统计表:

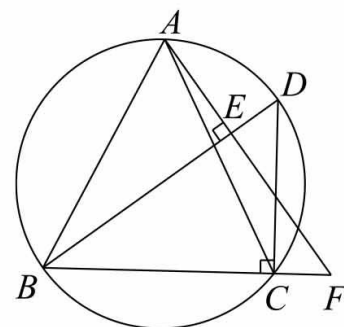
同学	评委打分中位数	面试成绩
甲	8	m
乙	9	85
丙	n	87

根据以上信息,回答下列问题:

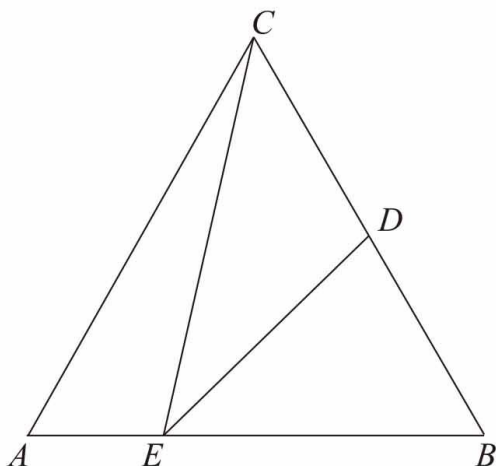
- 直接写出表中 m, n 的值;
- 在面试中,如果评委给某个同学的打分的方差越小,则认为评委对该同学面试的评价越一致.据此推断:甲、乙、丙三位同学中,评委对_____的评价更一致(填“甲”、“乙”或“丙”);
- 在笔试和面试两项成绩中,按笔试成绩占40%,面试成绩占60%,计算甲、乙、丙的综合成绩,综合成绩最高的是_____ (填“甲”、“乙”或“丙”).

24. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $CD \perp BC$ 于点 C ,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D .连接 BD , $AE \perp BD$ 于点 E ,交 BC 的延长线于点 F .

- 求证: $\angle BAF = \angle ABF$;
- 当 $AE=1, BE=2$ 时,求线段 EF 的长及 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径长.



25. 如图,在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$ cm,点 D 是 BC 的中点,点 E 是边 AB 上一个动点,连接 CE,DE . 设 B,E 两点间的距离为 x cm, $CE+DE-CD=y$ cm.



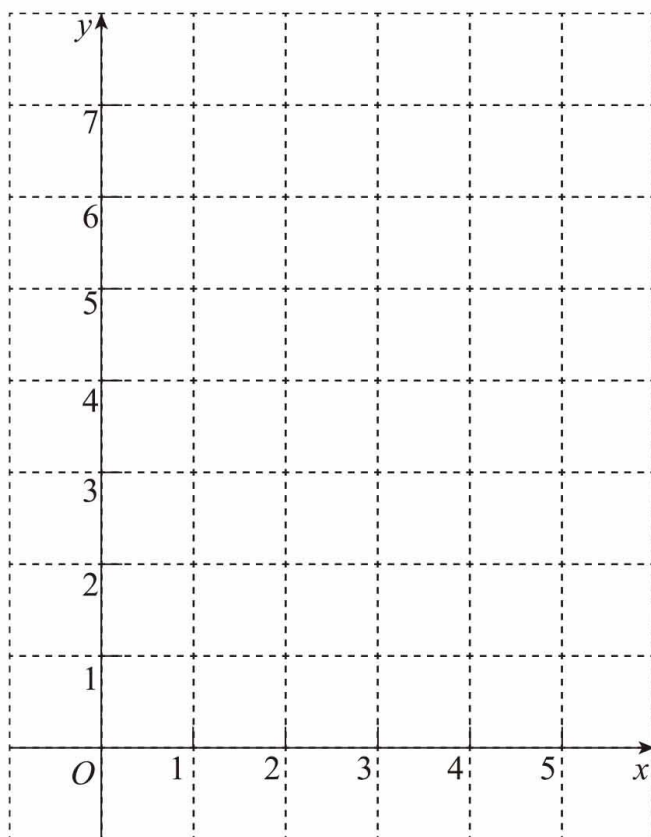
小明根据学习函数的经验,对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究. 下面是小明的探究过程,请补充完整:

- (1)按照下表中自变量 x 的值进行取点、画图、测量,得到了 y 与 x 的几组对应值:

x/cm	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y/cm	5	4.6	4.3	4.1	4.2	m	4.6	5.1	5.6	6.2	6.8

m 的值为_____ (保留一位小数);

- (2)在平面直角坐标系 xOy 中,描出补全后的表中各组数值所对应的点 (x,y) ,并画出函数 y 的图象;



- (3)结合函数图象,解决问题(保留一位小数):

- ①当 $y=5$ 时, B,E 两点间的距离约为_____ cm;
 ②当 $y=4x$ 时, B,E 两点间的距离约为_____ cm.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 - 2amx + am^2 - 4 (a > 0)$.

(1) 求该抛物线的顶点坐标(用含 m 的式子表示);

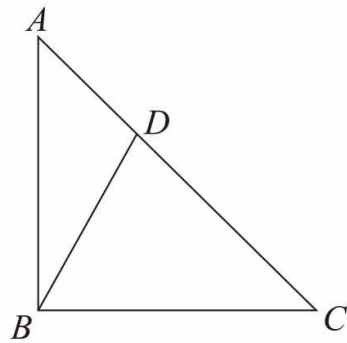
(2) 若对于该抛物线上的三个点 $A(m-2, y_1), B(2m, y_2), C(2m-2, y_3)$, 总有 $y_1 > y_2 > y_3$, 求实数 m 的取值范围.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC, \angle ABC = 90^\circ$. 点 D 是 AC 边上的动点, $\angle DBA = \alpha (0^\circ < \alpha < 45^\circ)$, 点 C 关于直线 BD 的对称点为 E , 连接 AE . 直线 AE 与直线 BD 交于点 F .

(1) 补全图形;

(2) 求 $\angle EFB$ 的大小;

(3) 用等式表示线段 FA, FB, FE 之间的数量关系, 并证明.



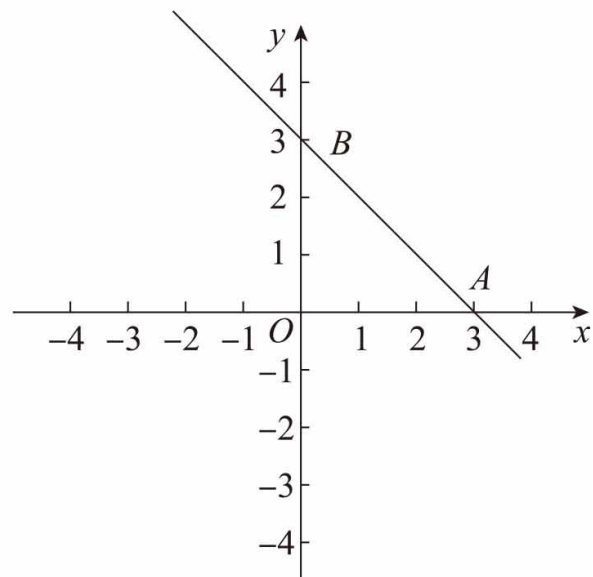
28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于线段 PQ 和直线 l , 称线段 PQ 的中点到直线 l 的距离为线段 PQ 关于直线 l 的平均距离, 记为 t .

已知点 $A(3, 0), B(0, 3)$.

(1) 线段 AB 关于 x 轴的平均距离 t 为 _____;

(2) 若点 M 在 x 轴正半轴上, 点 N 在 y 轴正半轴上, 且 $MN = 2$, 则线段 MN 关于直线 AB 的平均距离 t 的最小值为 _____;

(3) 已知点 P 是半径为 1 的 $\odot O$ 上的动点, 过点 P 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 Q , 直接写出线段 PQ 关于 x 轴的平均距离 t 的取值范围.



东城区 2023—2024 学年度第二学期初三年级统一测试(二)

数学试卷参考答案及评分标准

2024.5

一、选择题(每题 2 分,共 16 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	B	C	C	D	D

二、填空题(每题 2 分,共 16 分)

9. $x \neq 1$ 10. $m(a+2)^2$ 11. 答案不唯一,如 $a=0, b=-1$ 12. $(-2, -4)$ 13. 2

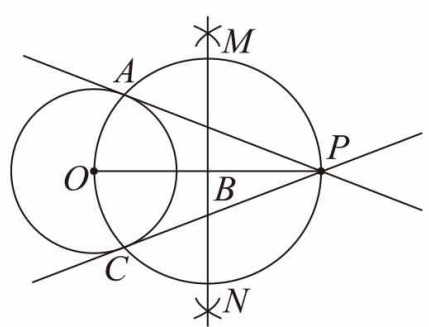
14. -1 或 3 15. ①② 16. (1)4 (2) $[10\sqrt{3}, 120^\circ]$

三、解答题(共 68 分,第 17—22 题,每题 5 分,第 23—26 题,每题 6 分,第 27—28 题,每题 7 分)

17. 解: $\sqrt{12} - \tan 60^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - (-2)^3$
 $= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 + 8 \dots\dots\dots 4$ 分
 $= \sqrt{3} + 6. \dots\dots\dots 5$ 分

18. 解: $\begin{cases} 2(x+1) < 5x-4, \text{①} \\ \frac{6x+1}{3} \geq x-1. \text{②} \end{cases}$
 解不等式①,得 $x > 2. \dots\dots\dots 2$ 分
 解不等式②,得 $x \geq -\frac{4}{3}. \dots\dots\dots 4$ 分
 \therefore 原不等式组的解集为 $x > 2. \dots\dots\dots 5$ 分

19. 解:(1)补全图形. $\dots\dots\dots 3$ 分



(2)68,44. $\dots\dots\dots 5$ 分

20. (1) 证明: $\because \angle ACB = \angle DAC,$

$\therefore AD \parallel BC.$

$\because AE \parallel CD,$

\therefore 四边形 $AECD$ 是平行四边形. 2 分

(2) 解: \because 四边形 $AECD$ 是平行四边形, $CD = 4,$

$\therefore AE = CD = 4.$ 3 分

$\because EF \perp AB$ 于点 $F, EG \perp AC$ 于点 $G, EF = EG,$

$\therefore \angle BAE = \angle CAE, \angle BFE = \angle CGE = 90^\circ.$

$\because \angle B = 45^\circ, \angle CEG = 15^\circ,$

$\therefore \angle BEF = 45^\circ, \angle ECA = 75^\circ.$

$\therefore \angle BAC = 60^\circ, BF = EF.$ 4 分

$\therefore \angle BAE = \angle CAE = 30^\circ.$

在 $Rt\triangle AFE$ 中, $EF = \frac{1}{2}AE = 2,$ 根据勾股定理, 得 $AF = 2\sqrt{3}.$

$\therefore BF = EF = 2.$

$\therefore AB = 2 + 2\sqrt{3}.$ 5 分

21. 解: 设一块八边形地砖和黑色正方形地砖的面积分别为 $x \text{ cm}^2, y \text{ cm}^2.$

根据题意列方程组, 得

$$\begin{cases} 4x + y = 3000, \\ x + y = 900. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\begin{cases} x = 700, \\ y = 200. \end{cases}$$

答: 一块八边形地砖和黑色正方形地砖的面积分别为 $700 \text{ cm}^2, 200 \text{ cm}^2.$ 5 分

22. 解: (1) 将点 $A(1,0)$ 和 $B(2,1)$ 代入 $y=kx+b(k \neq 0)$, 得 $\begin{cases} k+b=0, \\ 2k+b=1. \end{cases}$ 1 分

解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=-1. \end{cases}$

\therefore 该函数的解析式为 $y=x-1$ 3 分

(2) $m = \frac{1}{2}$ 5 分

23. 解: (1) $m=78, n=8.5$ 2 分

(2) 丙. 4 分

(3) 乙. 6 分

24. (1) 证明: $\because CD \perp BC$,

$\therefore \angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 90^\circ$.

$\because AE \perp BD$,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$.

$\therefore \angle BAF + \angle ABD = 90^\circ$.

$\because \widehat{AD} = \widehat{AD}$,

$\therefore \angle ACD = \angle ABD$.

$\therefore \angle ACB = \angle BAF$.

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABF = \angle ACB$.

$\therefore \angle BAF = \angle ABF$ 3 分

(2) 解: $\because \angle BAF = \angle ABF$,

$\therefore BF = AF$.

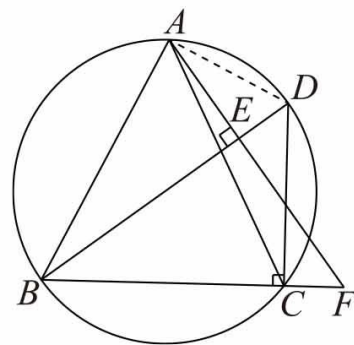
设 $EF = x$, 则 $BF = x + 1$.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $\angle BEF = 90^\circ$,

由勾股定理, 得 $BE^2 + EF^2 = BF^2$,

即 $2^2 + x^2 = (x + 1)^2$.

解得 $x = \frac{3}{2}$.



$\therefore EF = \frac{3}{2}$ 5分

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中, $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = 1$, $BE = 2$,

$\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore BD$ 是圆的直径.

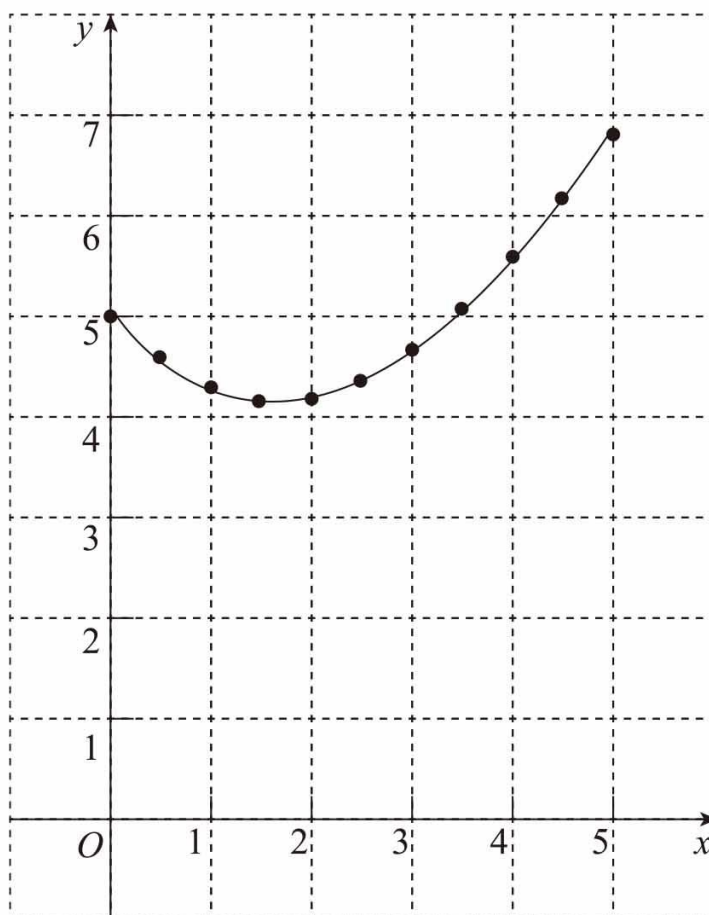
连接 AD , 则 $\angle DAB = 90^\circ$.

由 $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB}$, 得 $BD = \frac{5}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆的半径长为 $\frac{5}{4}$ 6分

25. 解: (1) $m = 4, 3$ 1分

(2) 图象如下: 3分



(3) ① $0, 3, 4$ 5分

② $1, 1$ 6分

26. 解: (1) $\because y = ax^2 - 2amx + am^2 - 4 = a(x - m)^2 - 4$,

\therefore 该抛物线的顶点坐标为 $(m, -4)$ 2分

(2)由(1)可知,抛物线的对称轴为直线 $x=m$.

$\because a>0$,

\therefore 抛物线的开口向上.

\therefore 当 $x<m$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 当 $x\geq m$ 时, y 随着 x 的增大而增大. $\dots\dots$ 3 分

设 $x_1=m-2, x_2=2m, x_3=2m-2$,

①当 $m\leq -2$ 时, $x_3<x_2\leq x_1<m$.

$\therefore y_3>y_2\geq y_1$, 不符合题意, 舍去;

②当 $-2<m\leq 0$ 时, $x_3\leq x_1<x_2\leq m$.

$\therefore y_3\geq y_1>y_2$, 不符合题意, 舍去;

③当 $0<m<2$ 时, $x_1<x_3<m<x_2$.

设点 $B(2m, y_2)$ 关于对称轴 $x=m$ 的对称点为 $B'(x_2', y_2)$, 则 $x_2'=0$.

(i) 当 $0<m\leq 1$ 时, $x_1<x_3\leq x_2'<m$.

$\therefore y_1>y_3\geq y_2$, 不符合题意, 舍去;

(ii) 当 $1<m<2$ 时, $x_1<x_2'<x_3<m$.

$\therefore y_1>y_2>y_3$, 符合题意;

④当 $m\geq 2$ 时, $x_1<m\leq x_3<x_2$.

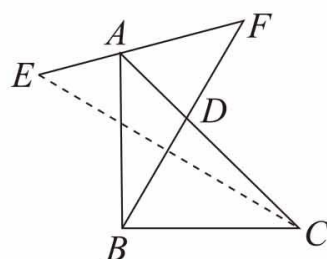
设点 $A(m-2, y_1)$ 关于对称轴 $x=m$ 的对称点为 $A'(x_1', y_1)$, 则 $x_1'=m+2$.

$\therefore x_2=2m\geq x_1'=m+2$.

$\therefore y_2\geq y_1$. 不符合题意, 舍去.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $1<m<2$. $\dots\dots\dots$ 6 分

27. 解: (1) 补全图形如下: $\dots\dots\dots$ 1 分



(2)如图,连接 BE .

$$\because \angle FBC = \angle ABC - \angle DBA,$$

$$\therefore \angle FBC = 90^\circ - \alpha.$$

\because 点 C 关于直线 BD 的对称点为 E ,

$$\therefore BE = BC.$$

$$\therefore \angle EBF = \angle FBC = 90^\circ - \alpha.$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBF - \angle DBA = 90^\circ - 2\alpha.$$

$$\because BA = BC,$$

$$\therefore BE = BA.$$

$$\therefore \angle EAB = \frac{180^\circ - \angle EBA}{2} = 45^\circ + \alpha.$$

$$\therefore \angle EFB = \angle EAB - \angle DBA = 45^\circ. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(3)猜想: $FE + FA = \sqrt{2}FB$.

证明: 延长 FE 至点 G , 使得 $EG = FA$, 连接 BG .

$$\because \angle AEB = \angle EAB,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - \angle EAB.$$

$$\therefore \angle GEB = \angle FAB.$$

$$\because GE = FA, EB = AB,$$

$$\therefore \triangle GEB \cong \triangle FAB.$$

$$\therefore \angle G = \angle EFB = 45^\circ.$$

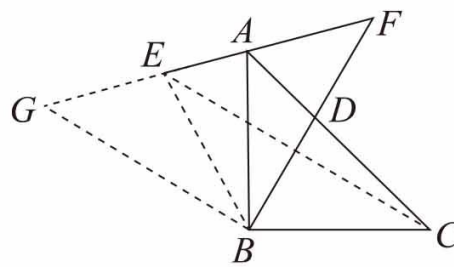
$$\therefore \angle GBF = 90^\circ.$$

$$\therefore \cos \angle EFB = \frac{FB}{FG} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore FG = \sqrt{2}FB.$$

$$\because FG = FE + EG = FE + FA,$$

$$\therefore FE + FA = \sqrt{2}FB. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$



28. 解: (1) $\frac{3}{2}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(3) $\frac{3 - \sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$