



## 数 学

2024.5

考生须知

1. 本试卷共 8 页，共两部分，28 道题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和草稿纸上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

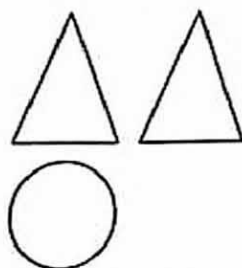
## 第一部分 选择题

## 一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 右图是某几何体的三视图，该几何体是

(A) 圆柱                      (B) 圆锥  
(C) 三棱柱                    (D) 长方体



2. 新能源革命受到全球瞩目的同时，也成为中国实现“碳达峰碳中和”目标的关键所在。2023 年全球可再生能源新增装机 510 000 000 千瓦，其中中国的贡献超过了 50%。将 510 000 000 用科学记数法表示应为

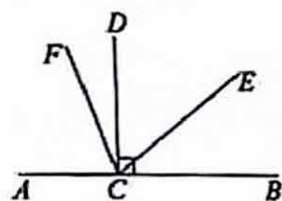
(A)  $0.51 \times 10^9$               (B)  $5.1 \times 10^8$               (C)  $5.1 \times 10^7$               (D)  $51 \times 10^7$

3. 正十二边形的每一个外角的度数为

(A)  $30^\circ$                       (B)  $36^\circ$                       (C)  $144^\circ$                       (D)  $150^\circ$

4. 如图，直线
- $AB \perp CD$
- 于点
- $C$
- ，射线
- $CE$
- 在
- $\angle BCD$
- 内部，射线
- $CF$
- 平分
- $\angle ACE$
- 。若
- $\angle BCE = 40^\circ$
- ，则下列结论正确的是

(A)  $\angle ECF = 60^\circ$   
(B)  $\angle DCF = 30^\circ$   
(C)  $\angle ACF$  与  $\angle BCE$  互余  
(D)  $\angle ECF$  与  $\angle BCF$  互补

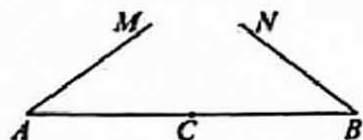


5. 不透明的袋子里装有 3 个完全相同的小球，上面分别标有数字 4, 5, 6。随机从中摸出一个小球不放回，再随机摸出另一个小球。第一次摸出小球上的数字大于第二次摸出小球上的数字的概率是

(A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{2}{3}$                       (D)  $\frac{4}{9}$



6. 如图, 点  $C$  为线段  $AB$  的中点,  $\angle BAM = \angle ABN$ , 点  $D, E$  分别在射线  $AM, BN$  上,  $\angle ACD$  与  $\angle BCE$  均为锐角. 若添加一个条件一定可以证明  $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ , 则这个条件不能是



- (A)  $\angle ACD = \angle BCE$       (B)  $CD = CE$   
(C)  $\angle ADC = \angle BEC$       (D)  $AD = BE$
7. 某农业合作社在春耕期间采购了 A, B 两种型号无人驾驶农耕机器. 已知每台 A 型机器的进价比每台 B 型机器进价的 2 倍少 0.7 万元; 采购相同数量的 A, B 两种型号机器, 分别花费了 21 万元和 12.6 万元. 若设每台 B 型机器的进价为  $x$  万元, 根据题意可列出关于  $x$  的方程为

- (A)  $12.6x = 21(2x - 0.7)$       (B)  $\frac{21}{x} = \frac{12.6}{2x - 0.7}$   
(C)  $\frac{21}{2x - 0.7} = \frac{12.6}{x}$       (D)  $\frac{21}{x} = 2 \times \frac{12.6}{x} - 0.7$

8. 下面问题中,  $y$  与  $x$  满足的函数关系是二次函数的是

- ①面积为  $10 \text{ cm}^2$  的矩形中, 矩形的长  $y$  (cm) 与宽  $x$  (cm) 的关系;  
②底面圆的半径为  $5 \text{ cm}$  的圆柱中, 侧面积  $y$  ( $\text{cm}^2$ ) 与圆柱的高  $x$  (cm) 的关系;  
③某商品每件进价为  $80$  元, 在某段时间内以每件  $x$  元出售, 可卖出  $(100 - 2x)$  件. 利润  $y$  (元) 与每件进价  $x$  (元) 的关系.

- (A) ①      (B) ②      (C) ③      (D) ①③

## 第二部分 非选择题

### 二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

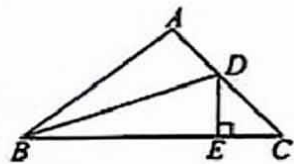
9. 若分式  $\frac{3}{x-4}$  有意义, 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 分解因式:  $2x^2y - 18y =$ \_\_\_\_\_.

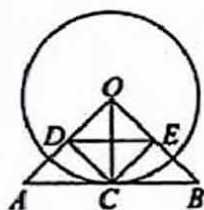
11. 方程组  $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 2y = 4 \end{cases}$  的解为\_\_\_\_\_.

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A(3, 1)$  关于原点  $O$  的对称点的坐标为\_\_\_\_\_.

13. 如图,  $BD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线,  $DE \perp BC$  于点  $E$ . 若  $BE = 3$ ,  $\triangle BDE$  的面积为  $1.5$ , 则点  $D$  到边  $AB$  的距离为\_\_\_\_\_.



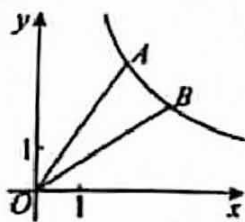
14. 如图,  $AB$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ . 点  $D, E$  分别在  $OA, OB$  上, 四边形  $ODCE$  为正方形. 若  $OA = 2$ , 则  $DE =$ \_\_\_\_\_.





15. 如图,  $A(2, m)$ ,  $B(3, 2)$  两点在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上. 若

将横、纵坐标都是整数的点称为整点, 则线段  $OA$ ,  $OB$  及反比例函数图象上  $A$ ,  $B$  两点之间的部分围成的区域 (不含边界) 中, 整点的坐标为\_\_\_\_\_.



16. 在某次比赛中, 5 位选手进入决赛环节, 决赛赛制为单循环形式 (每两位选手之间都赛一场). 每位选手胜一场得 3 分, 负一场得 0 分, 平局得 1 分. 已知这次比赛最终结果没有并列第一名, 获得第一名的选手的成绩记为  $m$  (分), 则  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_; 当获得第一名的选手的成绩恰好为最小值时, 决赛环节的平局总数至少为\_\_\_\_\_场.

三、解答题 (共 68 分, 第 17-21 题, 每题 5 分, 第 22-23 题, 每题 6 分, 第 24 题 5 分, 第 25-26 题, 每题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分)

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

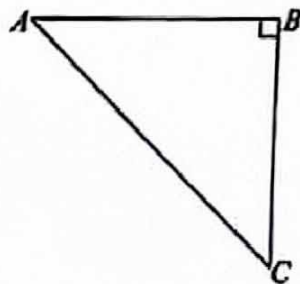
17. 计算:  $4\cos 45^\circ - \sqrt{18} + |-\sqrt{2}| - (\pi + 3)^0$ .

18. 解不等式组  $\begin{cases} 3x - 2 < x + 4, \\ x \geq \frac{2x - 3}{5}, \end{cases}$  并写出它的所有整数解.

19. 已知  $x^2 + x - 3 = 0$ , 求代数式  $(1 + \frac{3}{x-1}) \cdot \frac{3}{x^2 + 4x + 4}$  的值.

20. 已知: 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BA = BC$ .

求作: 点  $D$ , 使得点  $D$  在  $\triangle ABC$  内, 且  $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle BDC$ .



下面是小华的解答过程, 请补充完整:

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹):

①作线段  $BC$  的垂直平分线  $PQ$  交  $BC$  于点  $E$ ;

②以点  $A$  为圆心,  $AB$  长为半径作弧, 与直线  $PQ$  在  $\triangle ABC$  内交于点  $D$ .

点  $D$  就是所求作的点.

(2) 完成下面的证明.

证明: 连接  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$ .

$\because$  点  $D$  在线段  $BC$  的垂直平分线上,

$\therefore DB = DC$  (\_\_\_\_\_) (填推理的依据),

$DE \perp BC$ .

$\therefore \angle BDE = \angle CDE = \frac{1}{2} \angle BDC$ .



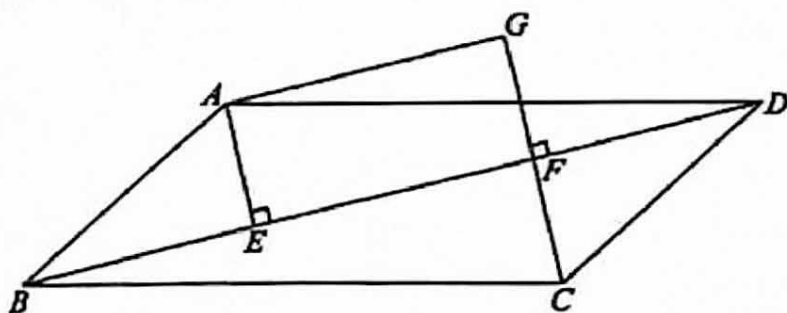
$$\begin{aligned} \therefore AB &\parallel DE. \\ \therefore \angle ABD &= \angle BDE. \\ \because \text{—————}, \\ \therefore \angle ADB &= \angle \text{———}, \\ \therefore \angle ADB &= \angle BDE = \frac{1}{2} \angle BDC. \end{aligned}$$

21. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 3x + k - 2 = 0$  有两个不相等的实数根.

- (1) 求实数  $k$  的取值范围;
- (2) 若  $k$  为满足条件的最大整数, 求此时方程的根.

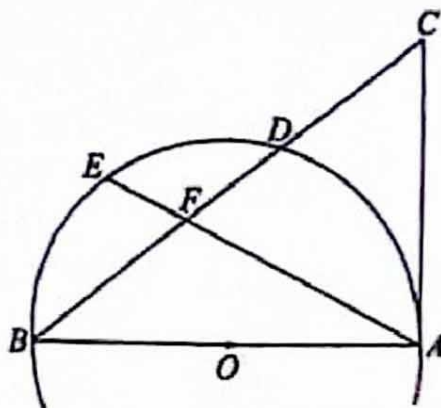
22. 如图, 四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $AE \perp BD$  于点  $E$ ,  $CG \perp BD$  于点  $F$ ,  $FG = CF$ , 连接  $AG$ .

- (1) 求证: 四边形  $AEFG$  是矩形;
- (2) 若  $\angle ABD = 30^\circ$ ,  $AG = 2AE = 6$ , 求  $BD$  的长.



23. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $BC$  交  $\odot O$  于点  $D$ , 点  $E$  是  $\widehat{BD}$  的中点, 连接  $AE$  交  $BC$  于点  $F$ ,  $\angle ACB = 2\angle EAB$ .

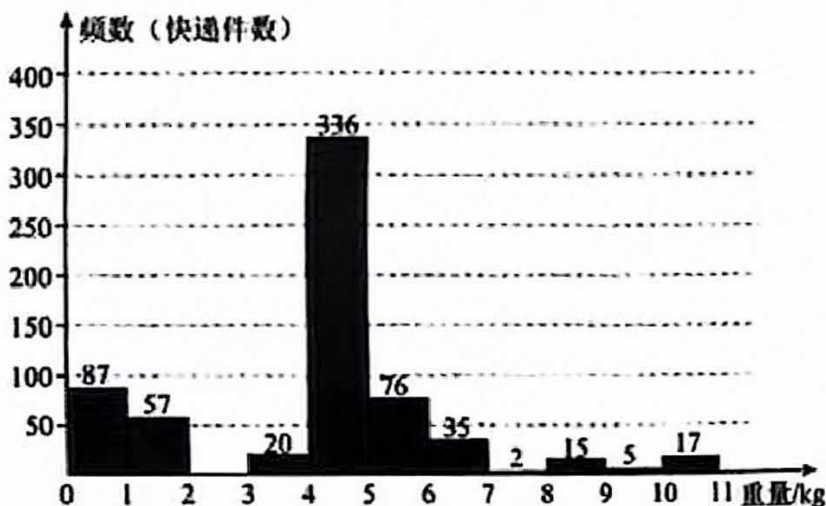
- (1) 求证:  $AC$  是  $\odot O$  的切线;
- (2) 若  $BF = 6$ ,  $\cos C = \frac{3}{5}$ , 求  $AB$  的长.





24. 我国快递市场繁荣活跃，某快递公司为提高服务质量，对公司的业务量、公众满意度等数据进行统计分析。公司随机抽取了某日发往相邻城市的快递中的 1000 件，称重并记录每件快递的重量（单位：kg，精确到 0.1）。下面给出了部分信息。

a. 每件快递重量的频数分布直方图（数据分成 11 组： $0 \leq x < 1$ ， $1 \leq x < 2$ ， $2 \leq x < 3$ ， $3 \leq x < 4$ ， $4 \leq x < 5$ ， $5 \leq x < 6$ ， $6 \leq x < 7$ ， $7 \leq x < 8$ ， $8 \leq x < 9$ ， $9 \leq x < 10$ ， $10 \leq x < 11$ ）；



b. 在  $3 \leq x < 4$  这一组的数据如下：

3.0 3.1 3.1 3.2 3.2 3.2 3.4 3.4 3.4 3.4  
3.5 3.5 3.5 3.5 3.6 3.6 3.7 3.7 3.8 3.9

c. 这 1000 件快递重量的平均数、中位数、众数如下：

	平均数	中位数	众数
快递重量 (单位：kg)	3.6	$m$	$n$

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 补全频数分布直方图；

(2) 写出  $m$  的值；

(3) 下面四个结论中，

- ①  $n$  的值一定在  $2 \leq x < 3$  这一组；
- ②  $n$  的值可能在  $4 \leq x < 5$  这一组；
- ③  $n$  的值不可能在  $5 \leq x < 6$  这一组；
- ④  $n$  的值不可能在  $8 \leq x < 9$  这一组。

所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_；

(4) 该日此快递公司在全市揽收的快递包裹中有 3800 件发往相邻城市，估计这批快递的重量。



25. 已知角  $x$  ( $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ), 探究  $\sin x$  与角  $x$  的关系.

两个数学兴趣小组的同学在查阅资料后, 分别设计了如下两个探究方案:

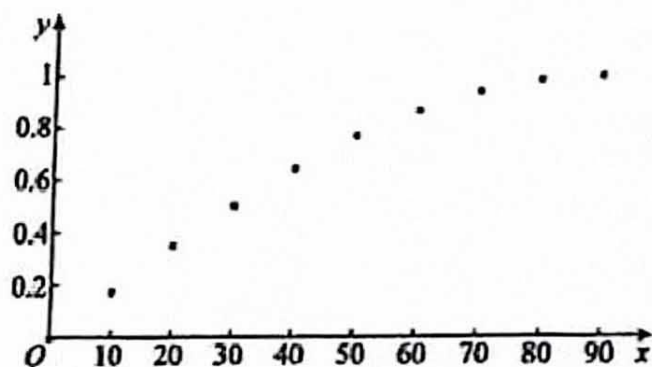
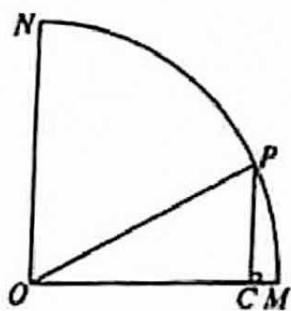
方案一: 如图, 点  $P$  在以点  $O$  为圆心, 1 为半径的  $\widehat{MN}$  上,  $\angle MON=90^\circ$ . 设  $\angle POM$  的度数为  $x$ . 作  $PC \perp OM$  于点  $C$ , 则线段 ① 的长度  $c$  即为  $\sin x$  的值.

方案二: 用函数  $F(x) = \frac{\pi x}{180} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi x}{180}\right)^5$  的值近似代替  $\sin x$  的值. 计算函数  $F(x)$  的值, 并在平面直角坐标系  $xOy$  中描出坐标为  $(x, F(x))$  的点.

两个小组同学汇总、记录的部分探究数据如下表所示 (精确到 0.001).

若  $|c - F(x)| \leq 0.001$  记为  $\checkmark$ , 否则记为  $\times$ .

$x$	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$c$	0	0.174	0.342	②	0.643	0.707	0.766	0.866	0.940	0.985	1
$F(x)$	0	0.174	0.342	0.500	0.643	0.707	0.766	0.866	0.941	0.987	1.005
$\checkmark$ 或 $\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	



根据以上信息, 解决下列问题:

- ①为\_\_\_\_, ②为\_\_\_\_;
- 补全表中的  $\checkmark$  或  $\times$ ;
- 画出  $F(x)$  关于  $x$  的函数图象, 并写出  $\sin 55^\circ$  的近似值 (精确到 0.01).

26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  是抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  上任意两点. 设抛物线的对称轴是  $x = t$ .

- 若对于  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ , 有  $y_1 = y_2$ , 求  $t$  的值;
- 若对于  $x_1 \geq 2$ , 都有  $y_1 < c$  成立, 并且对于  $x_2 > 1$ , 存在  $y_2 > c$ , 求  $t$  的取值范围.



27. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $\angle BAC=\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ ). 将射线  $AB$  绕点  $A$  顺时针旋转  $2\alpha$  得到射线  $l$ , 射线  $l$  与直线  $BC$  的交点为点  $M$ . 在直线  $BC$  上截取  $MD=AB$  (点  $D$  在点  $M$  右侧), 将直线  $DM$  绕点  $D$  顺时针旋转  $2\alpha$  所得直线交直线  $AM$  于点  $E$ .
- (1) 如图 1, 当点  $D$  与点  $B$  重合时, 补全图形并求此时  $\angle AED$  的度数;
- (2) 当点  $D$  不与点  $B$  重合时, 依题意补全图 2, 用等式表示线段  $ME$  与  $BC$  的数量关系, 并证明.

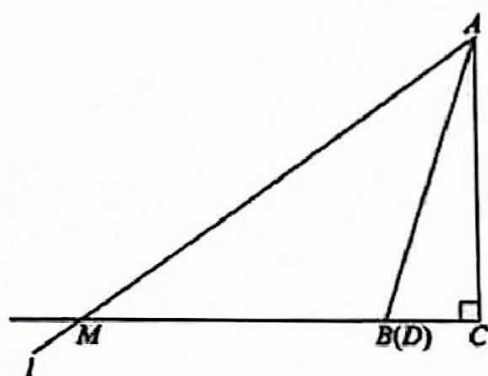


图 1

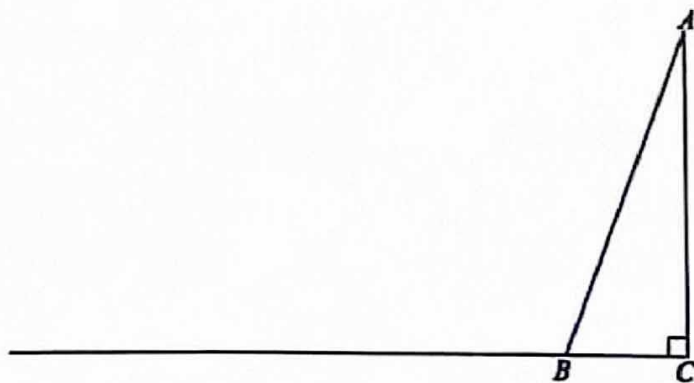


图 2



28. 如图 1, 对于 $\odot O$ 外的线段 $PQ$  (线段 $PQ$ 上的各点均在 $\odot O$ 外) 和直线 $PQ$ 上的点 $R$ , 给出如下定义: 若线段 $PQ$ 绕点 $R$ 旋转某一角度得到的线段 $P'Q'$ 恰好是 $\odot O$ 的弦, 则称点 $R$ 为线段 $PQ$ 关于 $\odot O$ 的“割圆点”.

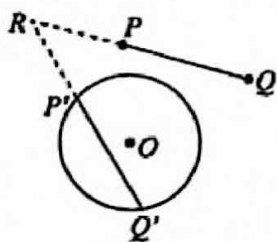


图 1

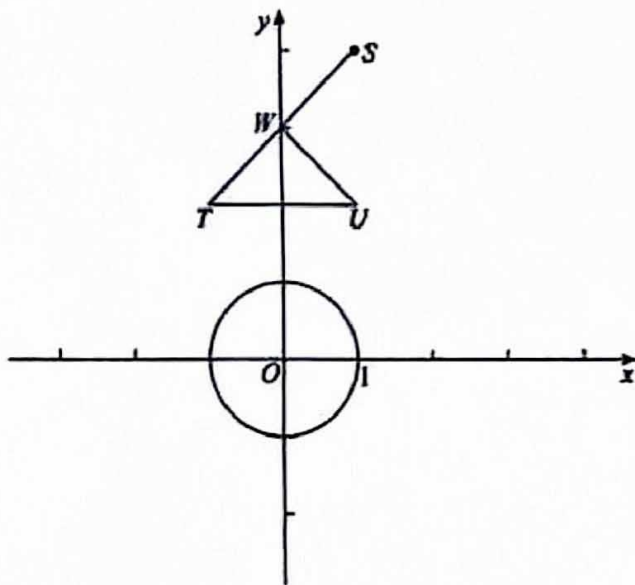


图 2

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,  $\odot O$ 的半径为 1.

- (1) 如图 2, 已知点 $S(1,4)$ ,  $T(-1,2)$ ,  $U(1,2)$ ,  $W(0,3)$ . 在线段 $ST$ ,  $TU$ ,  $UW$ 中, 存在关于 $\odot O$ 的“割圆点”的线段是\_\_\_\_\_, 该“割圆点”的坐标是\_\_\_\_\_;
- (2) 直线 $y=x+b$ 经过点 $W(0,3)$ , 与 $x$ 轴的交点为点 $V$ . 点 $P$ , 点 $Q$ 都在线段 $VW$ 上, 且 $PQ=\sqrt{2}$ . 若线段 $PQ$ 关于 $\odot O$ 的“割圆点”为点 $R$ , 写出点 $R$ 的横坐标 $x_R$ 的取值范围;
- (3) 直线 $l$ 经过点 $H(1,\sqrt{3})$ , 不重合的四个点 $A, B, C, D$ 都在直线 $l$ 上, 且点 $H$ 既是线段 $AB$ 关于 $\odot O$ 的“割圆点”, 又是线段 $CD$ 关于 $\odot O$ 的“割圆点”. 线段 $AB, CD$ 的中点分别为点 $M, N$ , 记线段 $MN$ 的长为 $d$ , 写出 $d$ 的取值范围.





# 北京市西城区九年级模拟测试试卷

## 数学答案及评分参考

2024.5

### 一、选择题 (共 16 分, 每题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	D	A	B	C	C

### 二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9.  $x \neq 4$       10.  $2y(x+3)(x-3)$       11.  $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$       12.  $(-3, -1)$
13. 1      14.  $\sqrt{2}$       15.  $(1, 1), (2, 2)$       16. 6; 4

### 三、解答题 (共 68 分, 第 17-21 题, 每题 5 分, 第 22-23 题, 每题 6 分, 第 24 题 5 分, 第 25-26 题, 每题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分)

17. 解:  $4\cos 45^\circ - \sqrt{18} + |-\sqrt{2}| - (\pi+3)^0$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= -1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

18. 解: 原不等式组为  $\begin{cases} 3x-2 < x+4, & \text{①} \\ x \geq \frac{2x-3}{5}. & \text{②} \end{cases}$

解不等式①, 得  $x < 3$ .  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

解不等式②, 得  $x \geq -1$ .  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore$  原不等式组的解集为  $-1 \leq x < 3$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore$  原不等式组的所有整数解为  $-1, 0, 1, 2$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

19. 解:  $(1 + \frac{3}{x-1}) \cdot \frac{3}{x^2 + 4x + 4}$

$$= \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{3}{x^2 + x - 2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\because x^2 + x - 3 = 0,$

$\therefore x^2 + x = 3.$

$\therefore$  原式  $= 3$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



20. 解: (1) 作图见图 1. ....2 分

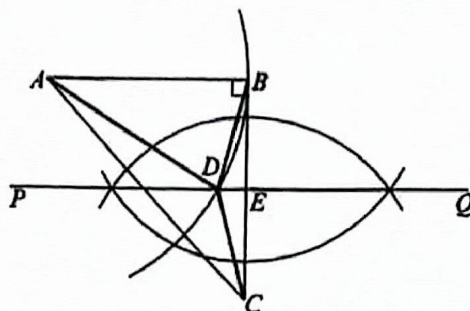


图 1

(2) 线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等; ..... 3 分

$AB=AD$ ; ..... 4 分

$ABD$ . ..... 5 分

21. 解: (1) 依题意, 得  $\Delta = 3^2 - 4(k-2) = 17 - 4k$ . ..... 1 分

$\therefore$  原方程有两个不相等的实数根,

$\therefore 17 - 4k > 0$ . .....2 分

解得  $k < \frac{17}{4}$ . .....3 分

(2)  $\therefore k$  为满足条件的最大整数,

$\therefore k = 4$ .

此时方程为  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .

此时方程的根为  $x_1 = -1, x_2 = -2$ . .....5 分

22. (1) 证明: 如图 2.

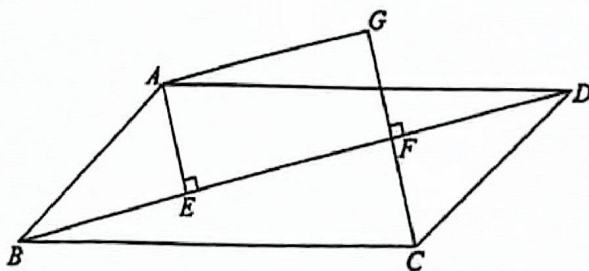


图 2

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, AB = CD$ . ..... 1 分

$\therefore \angle ABE = \angle CDF$ .

$\therefore AE \perp BD$  于点  $E, CG \perp BD$  于点  $F$ ,

$\therefore \angle AEB = \angle CFD = \angle AEF = \angle EFC = 90^\circ$ .

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ .



$\therefore AE=CF$ .  
 $\therefore FG=CF$ ,  
 $\therefore AE=FG$ .  
 $\therefore \angle AEF=\angle EFC$ ,  
 $\therefore AE\parallel FG$ .  
 $\therefore$  四边形  $AEFG$  是平行四边形.  
 $\therefore \angle AEF=90^\circ$ ,  
 $\therefore$  四边形  $AEFG$  是矩形. .... 3 分

(2) 解:  $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ ,

$\therefore BE=DF$ .  
 $\therefore AG=2AE=6$ ,  
 $\therefore AE=3$ .

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\angle AEB=90^\circ$ ,  $\angle ABE=30^\circ$ ,  $AE=3$ ,

$\therefore BE = \frac{AE}{\tan \angle ABE} = \frac{3}{\tan 30^\circ} = 3\sqrt{3}$ . .... 4 分

$\therefore$  四边形  $AEFG$  是矩形,  $AG=6$ ,

$\therefore EF=AG=6$ . .... 5 分

$\therefore BD = BE + EF + DF = 2BE + EF = 6\sqrt{3} + 6$ . .... 6 分

23. (1) 证明: 如图 3, 连接  $AD$ .

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,  $BC$  交  $\odot O$  于点  $D$ ,

$\therefore \angle BDA=90^\circ$ .

$\therefore \angle B + \angle DAB = 90^\circ$ .

$\therefore$  点  $E$  是  $\widehat{BD}$  的中点,

$\therefore \widehat{BE} = \widehat{ED}$ .

$\therefore \angle EAB = \angle 1$ .

$\therefore \angle DAB = \angle EAB + \angle 1 = 2\angle EAB$ .

$\therefore \angle ACB = 2\angle EAB$ ,

$\therefore \angle DAB = \angle ACB$ .

$\therefore \angle B + \angle ACB = 90^\circ$ .

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ . .... 2 分

$\therefore AC \perp AB$ .

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$\therefore AC$  是  $\odot O$  的切线. .... 3 分

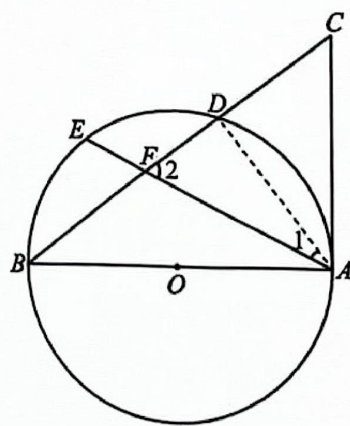


图 3



(2) 解: 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle BAC=90^\circ$ ,  $\cos C = \frac{3}{5}$ .

设  $AC=3k$ , 则  $BC=5k$ ,  $AB=4k$ .

$\because \angle B + \angle DAB = 90^\circ$ ,  $\angle CAD + \angle DAB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle B = \angle CAD$ .

$\because \angle 2 = \angle B + \angle EAB$ ,  $\angle CAF = \angle CAD + \angle 1$ ,  $\angle EAB = \angle 1$ ,

$\therefore \angle 2 = \angle CAF$ .

$\therefore CF=AC=3k$ .

$\therefore BF = BC - CF = 2k$ .

$\because BF=6$ ,

$\therefore k=3$ .

$\therefore AB = 4k = 12$ . ..... 6分

24. 解: (1) 补全频数分布直方图见图 4; ..... 1分

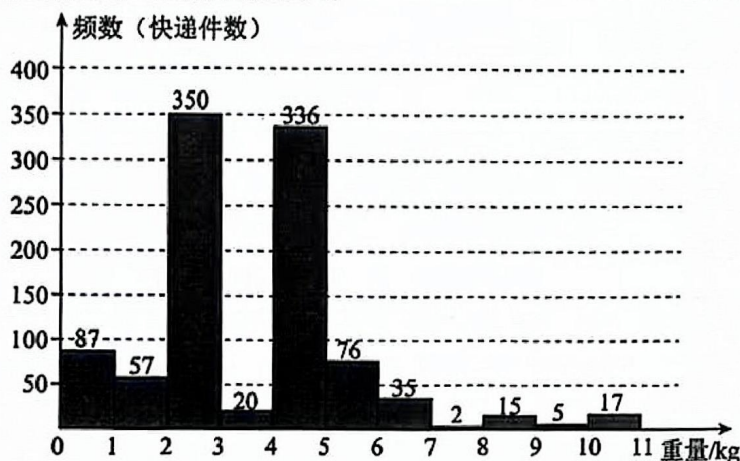


图 4

(2) 3.3; ..... 2分

(3) ②④; ..... 4分

(4)  $3.6 \times 3800 = 13680$  (kg). ..... 5分

25. 解: (1)  $PC$ , 0.5; ..... 2分

(2)  $\checkmark$ ,  $\times$ ; ..... 4分

(3) 画图见图 5;

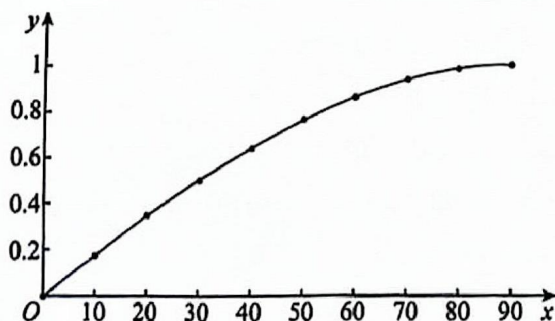


图 5

0.82. .... 5分

0.82. .... 6分



26. 解: (1)  $\because$  对于  $x_1=2, x_2=-1$ , 有  $y_1=y_2$ ,

$$\therefore 4a+2b+c=a-b+c.$$

$$\therefore b=-a.$$

$$\therefore t=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

(2) 由题意可知, 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与  $y$  轴的交点为  $(0,c)$ .

①当  $a>0$  时, 抛物线开口向上.

$\therefore$  当  $x_1 \geq 2$  时,  $y_1$  有最小值, 没有最大值.

$\therefore$  与“对于  $x_1 \geq 2$  时, 都有  $y_1 < c$ ”不符, 所以不合题意.

$\therefore a>0$  不成立.

②当  $a<0$  时, 抛物线开口向下, 且经过点  $(0,c), (2t,c)$ .

若抛物线经过点  $(1,c)$ , 则  $t=\frac{1}{2}$ ;

若抛物线经过点  $(2,c)$ , 则  $t=1$ .

(i) 当  $t \leq \frac{1}{2}$  时,

$$t \leq 0 < 1 \text{ 或 } 0 < t < 2t \leq 1.$$

$\therefore$  对于  $x_2 > 1$ , 都有  $y_2 < c$ .

与“对于  $x_2 > 1$ , 存在  $y_2 > c$ ”不符, 所以不合题意.

(ii) 当  $\frac{1}{2} < t < 1$  时,  $t < 1 < 2t < 2$ .

$\therefore$  对于  $x_2 > 1$ , 存在  $y_2 > c$ ,

对于  $x_1 \geq 2$ , 都有  $y_1 < c$ .

$\therefore \frac{1}{2} < t < 1$  成立.

(iii) 当  $t \geq 1$  时,  $0 < 2 \leq 2t$ .

$\therefore$  当  $x_1=2$  时,  $y_1 > c$ .

与“对于  $x_1 \geq 2$ , 都有  $y_1 < c$  成立”不符, 所以不合题意.

综上所述,  $\frac{1}{2} < t < 1$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

27. 解: (1) 补全图形见图 6.

$\because$  点  $D$  与点  $B$  重合,  $MD=AB, \angle BAM=2\alpha$ ,

$\therefore \angle AMD=\angle BAM=2\alpha$ .

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,

$\therefore \angle AMD + \angle MAC = 90^\circ$ .

$\because \angle BAC=\alpha$ ,

$\therefore \angle AMD + \angle BAM + \angle BAC = 5\alpha = 90^\circ$ .

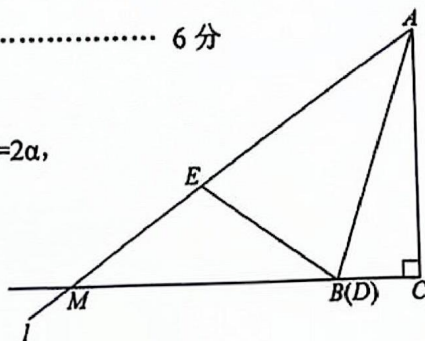


图 6



解得  $\alpha=18^\circ$ .

$\therefore \angle MDE=2\alpha$ ,

$\therefore \angle AED = \angle AMD + \angle MDE = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha = 72^\circ$ . ..... 2分

(2) 补全图形见图 7. .... 3分

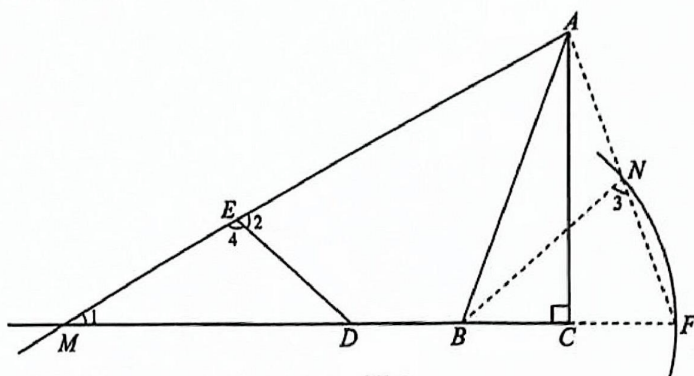


图 7

$ME=2BC$ . ..... 4分

证明: 如图 7, 在  $BC$  的延长线上截取  $CF=BC$ , 连接  $AF$ . 以点  $B$  为圆心,  $BF$  为半径作弧, 交  $AF$  于点  $N$ , 连接  $BN$ .

$\therefore CF=BC, \angle ACB=90^\circ$ ,

$\therefore AB=AF$ .

$\therefore \angle BAN=2\angle BAC=2\alpha$ .

$\therefore \angle MDE=2\alpha$ ,

$\therefore \angle MDE=\angle BAN$ .

$\therefore$  在等腰  $\triangle ABF$  中,  $\angle F = \frac{180^\circ - \angle BAF}{2} = 90^\circ - \alpha$ .

$\therefore BN=BF$ ,

$\therefore \angle 3 = \angle F = 90^\circ - \alpha$ .

在  $\text{Rt}\triangle AMC$  中,  $\angle 1 = 90^\circ - \angle MAC = 90^\circ - 3\alpha$ .

$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle MDE = (90^\circ - 3\alpha) + 2\alpha = 90^\circ - \alpha$ .

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ .

$\therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 2, \angle BNA = 180^\circ - \angle 3$ ,

$\therefore \angle 4 = \angle BNA$ .

$\therefore DM=AB$ ,

$\therefore \triangle DME \cong \triangle ABN$ .

$\therefore ME=BN$ .

$\therefore BN=BF$ ,

$\therefore ME=BF=2BC$ . ..... 7分

28. 解: (1)  $UW, (2,1)$ ; ..... 2分

(2)  $x_R \leq -2$  或  $x_R \geq -1$ ; ..... 4分

(3)  $0 < d < 2 - \sqrt{3}$  或  $2\sqrt{3} < d \leq 4$ . ..... 7分