2024 北京北师大实验中学初三二模

数　学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 长江干流上的葛洲坝、三峡向家坝、溪洛渡、白鹤滩、乌东德 6 座巨型梯级水电站，共同构成目前世界上最大的清洁能源走廊，总装机容量 71695000 千瓦，将 71695000 用科学记数法表示为（　）

A. 7.1695×10^{7}　　B. 716.95×10^{5}　　C. 7.1695×10^{6}　　D. 71.695×10^{6}

2. 下列 4 个图形中，是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

3. 式子 $\sqrt{3-x}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>3$　　B. $x\geq3$　　C. $x<3$　　D. $x\leq3$

4. 下列说法正确的是（　）

A. “买中奖率为 $\frac{1}{10}$ 的奖券 10 张，中奖”是必然事件

B. “汽车累积行驶 10000km，从未出现故障”是不可能事件

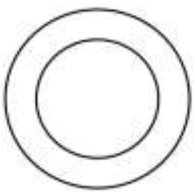
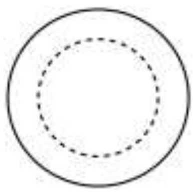
C. 襄阳气象局预报说“明天的降水概率为 70%”，意味着襄阳明天一定下雨

D. 若两组数据的平均数相同，则方差小的更稳定

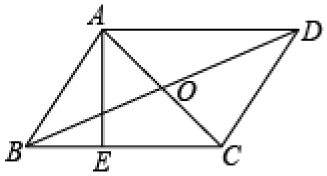
5. 将方程 $x^2-6x+1=0$ 配方后，原方程可变形为（　）

A. $(x-3)^2=8$　　B. $(x-3)^2=-10$　　C. $(x+3)^2=-10$　　D. $(x+3)^2=8$

6. 某无盖分类垃圾桶如右图所示，则它的俯视图是（　）

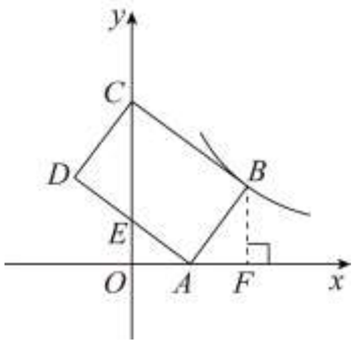
A. 　B. 　C. 　D. 

7. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BC$ 于 E，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 AE 的长为（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

8. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A，C 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，点 D（-2，3），AD=5，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ （k>0，x>0）的图象经过点 B，则 k 的值为（　　）



A. $\frac{16}{3}$　　B. 8　　C. 10　　D. $\frac{32}{3}$

二、填空题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分.

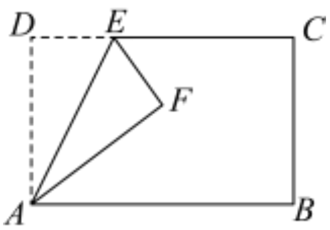
9. 点 $\left(-1,3\right)$ 关于原点对称的点的坐标是______.

10. 因式分解： $x^2-4y^2=$__________________.

11. 计算 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$ 的结果等于__________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若函数 $y=\frac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的图象经过点 $A\left(-3,2\right)$ 和 $B\left(m,-2\right)$，则 m 的值为______.

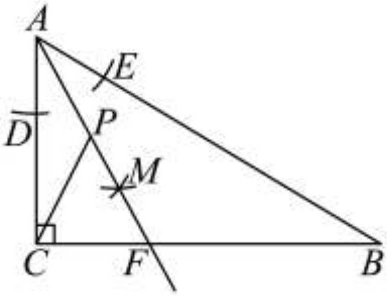
13. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AD=5$， $AB=8$，点 E 为射线 DC 上一个动点，把△ADE 沿直线 AE 折叠，当点 D 的对应点 F 刚好落在线段 AB 的垂直平分线上时，则 DE 的长为__________.



14. 若一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 17，方差为 3，则另一组数据 $2x_1+2$， $2x_2+2$， $\cdots 2x_n+2$ 的平均数是_______，方差是_______

15. 已知一次函数 $y_1=4x+5$ 与 $y_2=3x+10$，则 $y_1>y_2$ 的解集是________.

16. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=4$，按下列步骤作图：①在 AC 和 AB 上分别截取 AD、AE，使 $AD=AE$．②分别以点 D 和点 E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 M．③作射线 AM 交 BC 于点 F．若点 P 是线段 AF 上的一个动点，连接 CP，则 $CP+\frac{1}{2}AP$ 的最小值是____________．



三、解答题：本题共 12 小题，共 68 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 计算：$\left|-2\right|-\left(\sqrt{2}-3\right)^0+\sqrt{9}-\sqrt{2}\times\sin 45^\circ-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$．

18. 先化简，再求值：$\frac{x+1}{x}\div\left(x-\frac{1}{x}\right)$，其中 $x=\sqrt{2}$．

19. 解不等式组：$\begin{cases}2-x<5\\ \frac{2x+1}{3}\geq 1\end{cases}$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx-1$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 交于点 $A(2,m)$．

（1）求 k，m 的值；

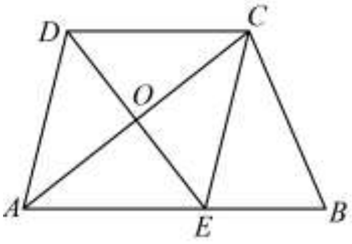
（2）已知点 $P(n,0)$，过点 P 作垂直于 x 轴的直线交直线 $y=kx-1$ 于点 M，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 N．若 $MN=2$，直接写出 n 的值．

21. 2023 年的春节档电影竞争激烈，多部贺岁片上影，点燃新春，浓浓的年味让人们感受到了久违的热闹景象．小亮和小丽分别从《满江红》《无名》《流浪地球 2》《熊出没・伴我“熊心”》四部电影中随机选择一部观看，将《满江红》表示为 A，《无名》表示为 B，《流浪地球 2》表示为 C，《熊出没・伴我“熊心”》表示为 D．

（1）小亮从这 4 部电影中，随机选择 1 部观看，则他选中《满江红》的概率为________；

（2）请用列表法或树状图法中的一种方法，求小亮和小丽恰好选择观看同一部电影的概率．

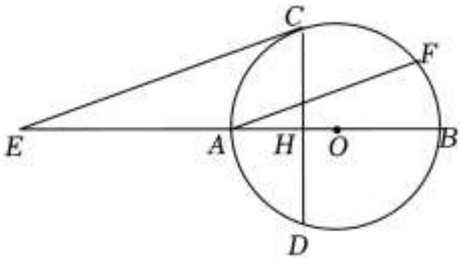
22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,CD$，过点 D 作 $\angle ADC$ 的角平分线交 AB 于点 E，连接 AC 交 DE 于点 O，$AD\,/\!/\,CE$．



（1）求证：四边形 $AECD$ 是菱形；

（2）若 $AD=10$，$\triangle ACD$ 的周长为 36，求菱形 $AECD$ 的面积.

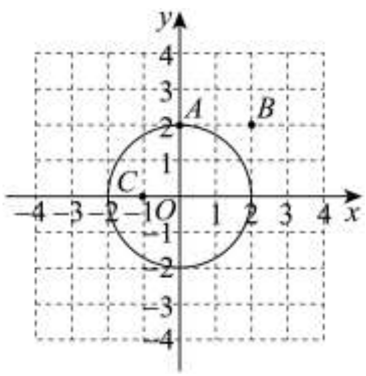
23. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 H，$\odot O$ 的切线 CE 与 BA 的延长线交于点 E，$AF\parallel CE$，AF 与 $\odot O$ 的交点为 F.



（1）求证：$AF=CD$；

（2）若 $\odot O$ 的半径为 6，$AH=2OH$，求 AE 的长.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于 $\odot G$ 和线段 AB 给出如下定义：如果线段 AB 上存在点 P，Q，使得点 P 在 $\odot G$ 内，且点 Q 在 $\odot G$ 外，则称线段 AB 为 $\odot G$ 的“交割线段”.



（1）如图，$\odot O$ 的半径为 2，点 $A(0,2)$，$B(2,2)$，$C(-1,0)$.

①在 $\triangle ABC$ 的三条边 AB，BC，AC 中，$\odot O$ 的“交割线段”是____；

②点 M 是直线 OB 上的一个动点，过点 M 作 $MN\perp x$ 轴，垂足为 N，若线段 MN 是 $\odot O$ 的“交割线段”，求点 M 的横坐标 m 的取值范围；

（2）已知三条直线 $y=3$，$y=-x$，$y=-2x+3$ 分别相交于点 D，E，F，$\odot T$ 的圆心为 $(0,\ t)$，半径为 2，若 $\triangle DEF$ 的三条边中有且只有两条是 $\odot T$ 的“交割线段”，直接写出 t 的取值范围.

25. 如图，直线 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A,B，抛物线的顶点 P 在直线 AB 上，与 x 轴的交点为 C,D，其中点 C 的坐标为 $(2,0)$. 直线 BC 与直线 PD 相交于点 E.

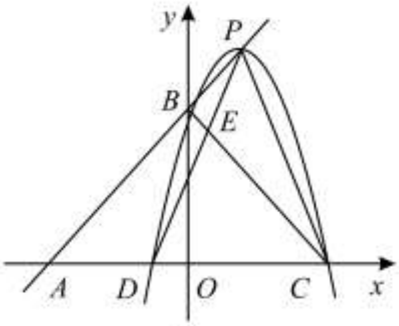


图1

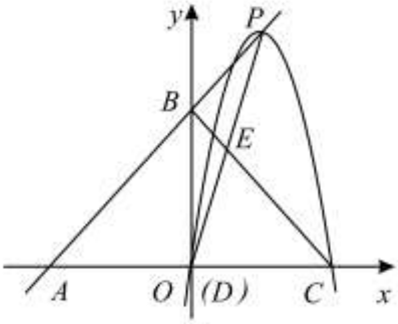


图2

（1）如图 2，若抛物线经过原点O.

①求该抛物线的函数表达式；②求$\dfrac{BE}{EC}$的值.

（2）连接$PC, \angle CPE$与$\angle BAO$能否相等？若能，求符合条件的点P的横坐标；若不能，试说明理由.

26. $\triangle ABC$和$\triangle ADF$均为等边三角形，点E、D分别从点A，B同时出发，以相同的速度沿AB、BC运动，运动到点B、C停止.

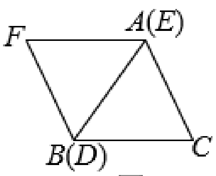


图1

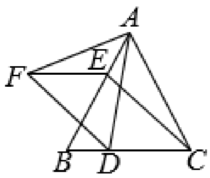
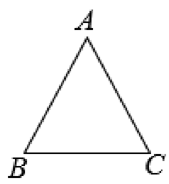


图2



备用图

（1）如图 1，当点E、D分别与点A、B重合时，请判断：线段CD、EF的数量关系是____________，位置关系是____________；

（2）如图 2，当点E、D不与点A，B重合时，（1）中的结论是否依然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由；

（3）当点D运动到什么位置时，四边形$CEFD$的面积是$\triangle ABC$面积的一半，请直接写出答案；此时，四边形$BDEF$是哪种特殊四边形？请在备用图中画出图形并给予证明.

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】A

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．

【详解】解：$71695000=7.1695\times10^{7}$．

故选：A．

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

2.【答案】B

【分析】根据中心对称图形的定义旋转180°后能够与原图形完全重合即是中心对称图形，逐一判断即可得到答案．

【详解】解：A、不是中心对称图形，不符合题意，选项错误；

B、是中心对称图形，符合题意，选项正确；

C、不是中心对称图形，不符合题意，选项错误；

D、不是中心对称图形，不符合题意，选项错误，

故选：B．

【点睛】本题考查了中心对称图形，熟练掌握其定义是解题关键．

3.【答案】D

【分析】本题考查了二次根式的定义，形如 $\sqrt{a}\left(a\ge0\right)$ 的式子叫二次根式，二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义．据此列式求解即可．

【详解】解：依题意，得

$3-x\ge0$，

解得，$x\le3$．

故选：D．

4.【答案】D

【分析】根据事件发生的可能性大小判断相应事件的类型，以及方差的性质逐一分析即可．

【详解】A．“买中奖率为 $\frac{1}{10}$ 的奖券 10 张，中奖”是随机事件，故不符合题意；

B．“汽车累积行驶10000km，从未出现故障”是随机事件，故不符合题意；

C．襄阳气象局预报说“明天的降水概率为70%”，但是襄阳明天只是有可能下雨，故不符合题意；

D. 若两组数据的平均数相同，则方差小的更稳定，该说法正确，故符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查根据事件发生的可能性大小判断相应事件的类型，以及方差的性质等内容，解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念，以及方差越小，数据越稳定.

5.【答案】A

【分析】将常数项移到方程的右边，两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后即可得出答案.

【详解】解：$x^2-6x+1=0$

$\boldsymbol{x^2-6x=-1}$

$x^2-6x+9=-1+9$

$(x-3)^2=8$.

故选 A.

【点睛】本题考查利用配方法解一元二次方程．掌握配方法解一元二次方程的步骤是解答本题的关键.

6.【答案】B

【分析】本题考查了简单组合图形的三视图，属于基础题，关键掌握俯视图是从上向下看得到的视图．俯视图是从上向下看得到的视图，结合选项即可做出判断.

【详解】解：从上向下看，是两个同心圆.

故选：B

7.【答案】D

【分析】由勾股定理的逆定理可判定△BAO 是直角三角形，然后根据平行四边形 $ABCD$ 的面积即可求出.

【详解】解：∵AC=2，BD=4，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=1, BO=\frac{1}{2}BD=2$，

$\because AB=\sqrt{3}$，

$\therefore AB^2+AO^2=BO^2$，

$\therefore \angle BAC=90^\circ$，

∵在 Rt△BAC 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$，

$\because S_{\triangle BAC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AE$，

$\therefore \sqrt{3}\times 2=\sqrt{7}AE$，

$\therefore AE=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

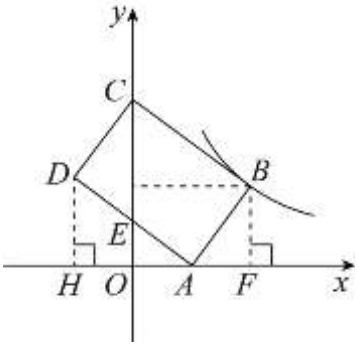
故选 D

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理和平行四边形的性质，能得出△BAC 是直角三角形是解此题的关键.

8.【答案】D

【分析】先由 D（-2，3），AD=5，求得 A（2，0），即得 AO=2；设 AD 与 y 轴交于 E，求得 E（0，1.5），即得 EO=1.5；作 BF 垂直于 x 轴于 F，求证△AOE ∽△CDE，可得 $BA=CD=\frac{10}{3}$，求证△AOE∽△BFA，可得 AF=2，BF=$\frac{8}{3}$，进而可求得 B（4，$\frac{8}{3}$）；将 B（4，$\frac{8}{3}$）代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，即可求得 k 的值.

【详解】解：如图，过 D 作 DH 垂直 x 轴于 H，设 AD 与 y 轴交于 E，过 B 作 BF 垂直于 x 轴于 F，



∵点 D（-2，3），AD=5，

∴DH=3，

∴ $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴A（2，0），即 AO=2，

∵D（-2，3），A（2，0），

∴AD 所在直线方程为：$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$，

∴E（0，1.5），即 EO=1.5，

∴ $AE=\sqrt{AO^2+EO^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$，

∴ED=AD- AE=5-$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$，

∵∠AOE=∠CDE，∠AEO=∠CED，

∴△AOE ∽△CDE，

∴ $\frac{EO}{ED}=\frac{AO}{CD}$，

∴ $CD=AO\times\frac{ED}{EO}=\frac{10}{3}$，

∴在矩形 $ABCD$ 中，$BA=CD=\frac{10}{3}$，

∵∠EAO+∠BAF=90°，

又∠EAO+∠AEO=90°，

∴∠AEO=∠BAF，

又∵∠AOE=∠BFA，

∴$\triangle BFA\backsim\triangle AOE$，

∴$\dfrac{BA}{AE}=\dfrac{AF}{EO}=\dfrac{BF}{AO}$，

∴代入数值，可得 AF=2，BF=$\dfrac{8}{3}$，

∴OF=AF+AO=4，

∴B（4，$\dfrac{8}{3}$），

∴将 B（4，$\dfrac{8}{3}$）代入反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $k=\dfrac{32}{3}$，

故选：D．

【点睛】本题主要考查了待定系数法求反比例函数的系数、相似三角形的判定与性质、勾股定理、矩形的性质等知识．解题关键是通过求证$\triangle AOE\backsim\triangle$CDE，$\triangle AOE\backsim\triangle BFA$，得到 B 点坐标，将 B 点坐标代入反比例函数，即可得解．

二、填空题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分．

9.【答案】$(1,-3)$

【分析】根据关于原点对称的点的坐标特点：两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反可直接得到答案．

【详解】解：点$(-1,3)$关于原点对称的点的坐标是$(1,-3)$，

故答案为：$(1,-3)$．

【点睛】此题主要考查了关于原点对称的点的坐标特点，关键是掌握点的坐标的变化规律．

10.【答案】$(x+2y)(x-2y)$

【分析】利用平方差公式分解即可．

本题考查了因式分解，熟练掌握公式法分解因式是解题的关键．

【详解】$x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x+2y)(x-2y)$．

故答案为：$(x+2y)(x-2y)$．

11.【答案】3

【分析】先运用用平方差公式把括号展开，再根据二次根式的性质计算可得．

【详解】解：原式=（$\sqrt{6}$）^{2}-（$\sqrt{3}$）^{2}

=6-3

=3，

故答案为 3.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算的应用，熟练掌握平方差公式与二次根式的性质是关键.

12.【答案】3

【分析】先把点 A 坐标代入求出反比例函数解析式，再把点 B 代入即可求出 m 的值.

【详解】解：∵函数 $y=\frac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的图象经过点 $A\left(-3,2\right)$ 和 $B\left(m,-2\right)$

∴把点 $A\left(-3,2\right)$ 代入得 $k=-3\times 2=-6$，

∴反比例函数解析式为 $y=\frac{-6}{x}$，

把点 $B\left(m,-2\right)$ 代入得：$-2=\frac{-6}{m}$，

解得：$m=3$，

故答案为：3.

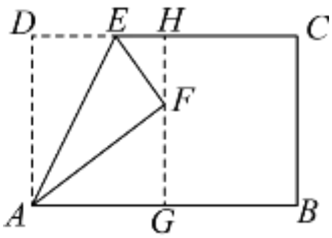
【点睛】本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，反比例函数图象上点的坐标特征，熟知反比例函数图象上的点的坐标一定满足函数解析式是解题的关键.

13.【答案】$\frac{5}{2}$ 或 10

【分析】本题主要考查了矩形的折叠问题，勾股定理．根据题意进行分类讨论①当点 E 在线段 DC 上时，②当点 E 在线段 DC 延长线上时，点 F 作 AD 的平行线，交 DC 于点 H，交 AB 于点 G，先求出 $FG=\sqrt{AF^2-AG^2}=3$，再求出 FH，设 $DE=x$，根据勾股定理列出方程求解即可.

【详解】解：①当点 E 在线段 DC 上时，

过点 F 作 AD 的平行线，交 DC 于点 H，交 AB 于点 G，



∵四边形 $ABCD$ 为矩形，$GH\parallel AD$，

∴四边形 $AGHD$ 为矩形，

∴ $AD=GH=5$，$GH\perp AB$，

∵点 F 在线段 AB 的垂直平分线上，

∴ $AG=\frac{1}{2}AB=4$，则 $DH=AG=4$，

∵ $\triangle ADE$ 沿直线 AE 折叠得到 $\triangle AFE$，

∴ $AF=AD=5$，

根据勾股定理可得：$FG=\sqrt{AF^2-AG^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$\therefore FH=GH-FG=5-3=2$，

设 $DE=x$，则 $EH=4-x$，$EF=DE=x$，

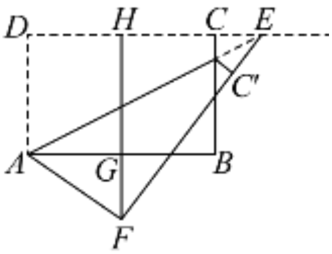
根据勾股定理可得：$EH^2+FH^2=EF^2$，即 $(4-x)^2+2^2=x^2$，

解得：$x=\frac{5}{2}$，

即 $DE=\frac{5}{2}$；

②当点 E 在线段 DC 延长线上时，

过点 F 作 AD 的平行线，交 DC 于点 H，交 AB 于点 G，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$GH\parallel AD$，

$\therefore$ 四边形 $AGHD$ 为矩形，

$\therefore AD=GH=5$，$GH\perp AB$，

$\because$ 点 F 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore AG=\frac{1}{2}AB=4$，则 $DH=AG=4$，

$\because \triangle ADE$ 沿直线 AE 折叠得到 $\triangle AFE$，

$\therefore AF=AD=5$，

根据勾股定理可得：$FG=\sqrt{AF^2-AG^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$\therefore FH=GH+FG=5+3=8$，

设 $DE=x$，则 $EH=x-4$，$EF=DE=x$，

根据勾股定理可得：$EH^2+FH^2=EF^2$，即 $(x-4)^2+8^2=x^2$，

解得：$x=10$，

即 $DE=10$.

综上：$DE=\frac{5}{2}$ 或 $DE=10$.

故答案为：$\frac{5}{2}$ 或 10.

14.【答案】　①. 36　②. 12

【分析】本题考查根据一组数据的平均数和方差，求另一组数据的平均数和方差，若一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2；则数据 $kx_1+b, kx_2+b, \cdots, kx_n+b$ 的平均数为 $k\overline{x}+b$，方差为 k^2s^2，由此可解.

【详解】解：由题意得：$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=17$，$\dfrac{\left(x_1-17\right)^2+\left(x_2-17\right)^2+\cdots+\left(x_n-17\right)^2}{n}=3$，

则另一组数据 $2x_1+2$，$2x_2+2$，$\cdots 2x_n+2$ 的平均数是：

$$\frac{2x_1+2+2x_2+2+\cdots+2x_n+2}{n}$$

$$=\frac{2\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}{n}+2$$

$$=2\times 17+2$$

$$=36,$$

方差为：$\dfrac{\left(2x_1+2-36\right)^2+\left(2x_2+2-36\right)^2+\cdots+\left(2x_n+2-36\right)^2}{n}$

$$=4\times\frac{\left(x_1-17\right)^2+\left(x_2-17\right)^2+\cdots+\left(x_n-17\right)^2}{n}$$

$$=4\times 3$$

$$=12,$$

故答案为：36；12.

15.【答案】$x>5$

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式，以及解一元一次不等式，根据 $y_1>y_2$ 建立不等式求解，即可解题.

【详解】解：$\because y_1>y_2$，

$\therefore 4x+5>3x+10$，

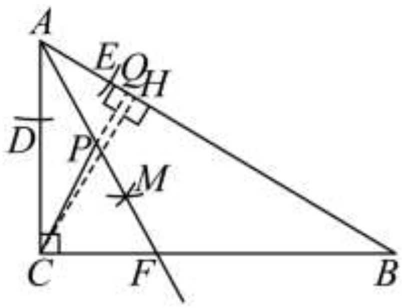
解得 $x>5$，

故答案为：$x>5$.

16.【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】过点 P 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，先利用角平分线和三角形的内角和定理求出 $\angle BAF=30^\circ$，然后利用含 30° 的直角三角的性质得出 $PQ=\dfrac{1}{2}AP$，则 $CP+\dfrac{1}{2}AP=CP+PQ\geq CH$，当 C、P、Q 三点共线，且与 AB 垂直时，$CP+\dfrac{1}{2}AP$ 最小，$CP+\dfrac{1}{2}AP$ 最小值为 CH，利用含 30° 的直角三角的性质和勾股定理求出 AB，BC，最后利用等面积法求解即可.

【详解】解：过点 P 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，



由题意知：AF 平分 $\angle BAC$，

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，

$\therefore \angle BAC=60^\circ$，

$\therefore \angle BAF=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore PQ=\frac{1}{2}AP$，

$\therefore CP+\frac{1}{2}AP=CP+PQ\geq CH$，

$\therefore$当 C、P、Q 三点共线，且与 AB 垂直时，$CP+\frac{1}{2}AP$ 最小，$CP+\frac{1}{2}AP$ 最小值为 CH，

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=4$，

$\therefore AB=2AC=8$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{3}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$，

$\therefore CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{4\times4\sqrt{3}}{8}=2\sqrt{3}$，

即 $CP+\frac{1}{2}AP$ 最小值为 $2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了尺规作图-作角平分线，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理等知识，注意掌握利用等积法求三角形的高或点的线的距离的方法．

三、解答题：本题共 12 小题，共 68 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.【答案】-6

【分析】本题主要考查了实数的混合运算，先计算零指数幂，特殊角的三角函数值，负整数指数幂然后根据实数的运算法则求得计算结果．

【详解】解：$|-2|-\left(\sqrt{2}-3\right)^0+\sqrt{9}-\sqrt{2}\times\sin 45^\circ-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$=2-1+3-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-9$

$=2-1+3-1-9$

$=-6$.

18.【答案】$\frac{1}{x-1}$，$\sqrt{2}+1$.

【分析】先对小括号部分通分，再把除化为乘，然后根据分式的基本性质约分，最后代入求值.

【详解】解：$\frac{x+1}{x}\div\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{x+1}{x}\div\frac{x^2-1}{x}$

$=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x-1}$，

当$x=\sqrt{2}$时，原式$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

【点睛】本题考查了分式的化简求值，二次根式的分母有理化计算，掌握运算顺序和计算法则正确计算是解题关键.

19.【答案】$x\geq1$

【分析】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

【详解】解；$\begin{cases}2-x<5①\\ \frac{2x+1}{3}\geq1②\end{cases}$，

解不等式①得：$x>-3$，

解不等式②得：$x\geq1$，

则不等式组的解为$x\geq1$.

20.【答案】(1) $k=1,m=1$

(2) $n=6$或-2

【分析】(1) 将点$A(2,m)$代入$y=\frac{1}{2}x$求得m，将$A(2,1)$代入$y=kx-1$，即可求得k的值；

(2) $M(n,n-1)$，$N\left(n,\frac{1}{2}n\right)$，根据$MN=2$，则$\left|n-1-\frac{1}{2}n\right|=2$，解方程即可求解.

【小问1详解】

解：将点 $A(2,m)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$

即 $m=\frac{1}{2}\times 2=1$，

$\therefore A(2,1)$，

代入 $y=kx-1$，即 $1=2k-1$，

解得：$k=1$；

【小问 2 详解】

解：依题意，$M(n,n-1)$，$N\left(n,\frac{1}{2}n\right)$，

$\because MN=2$，

$\therefore \left|n-1-\frac{1}{2}n\right|=2$，

解得：$n=6$ 或 -2．

【点睛】本题考查了一次函数的性质，待定系数法求解析式，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键．

21.【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{4}$

【分析】(1) 直接根据概率公式求解即可；

(2) 画树状图列出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可．

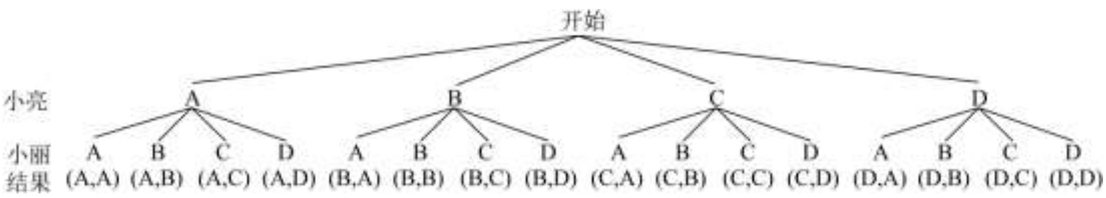
【小问 1 详解】

解：小亮从这 4 部电影中，随机选择 1 部观看，共有 4 种不同的选法，

故选中《满江红》的概率为 $P=\frac{1}{4}$．

【小问 2 详解】

解：画树状图如下：



$\because$ 共有 16 种等可能的结果，其中小亮和小丽恰好选择观看同一部电影的情况有 4 种，分别是 (A,A)、(B,B)、(C,C)、(D,D)，

$\therefore$ 小亮和小丽恰好选择观看同一部电影的概率：$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，

即 P（小亮和小丽恰好选择观看同一部电影）$=\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了树状图法与列表法求概率．正确的列出树状图是解题的关键．

22.【答案】(1）见解析　（2）96

【分析】(1）先证明四边形是平行四边形，再根据平行线的性质和角平分线的定义证得 $\angle ADE=\angle AED$，再利用等腰三角形的等角对等边得到 $AD=AE$，进而利用菱形的判定定理即可证得结论；

（2）先根据菱形的性质和三角形的周长求得 AC，进而利用勾股定理求得 DE 即可求解．

【小问 1 详解】

证明：$\because AB \parallel CD$，$AD \parallel CE$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 是平行四边形，$\angle CDE=\angle AED$，

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle CDE=\angle ADE$，

$\therefore \angle ADE=\angle AED$，

$\therefore AD=AE$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：$\because$四边形 $AECD$ 是菱形，

$\therefore AD=CD$，$AC\perp DE$，$OA=OC$，$OD=OE$，

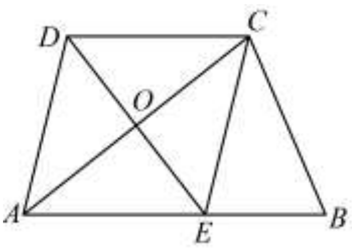
$\because AD=10$，$\triangle ACD$ 的周长为 36，

$\therefore AC=36-2\times10=16$，则 $OC=OA=\frac{1}{2}AC=8$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OD=\sqrt{AD^2-OA^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

$\therefore DE=2OD=12$，

$\therefore$菱形 $AECD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times16\times12=96$.



【点睛】本题考查菱形的判定与性质、平行四边形的判定、等腰三角形的判定、勾股定理、平行线的性质以及角平分线的定义，熟练掌握菱形的判定与性质是解答的关键．

23.【答案】(1）证明见解析

（2）12

【分析】(1）利用切线性质，圆周角定理，余角的性质证明 $AF=CD$；

（2）利用三角函数计算即可．

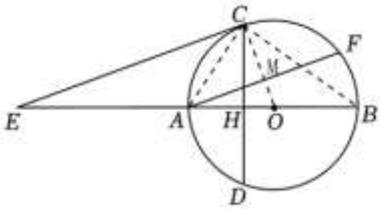
本题考查了切线性质，圆周角定理，余角的性质，三角函数的应用，熟练掌握性质，三角函数是解题的关键．

【小问 1 详解】

证明：连接 AC、OC、BC，则 $OC = OA$，

$\because$ CE 与 $\odot O$ 相切于点 C，

$\therefore CE \perp OC$，



$\because$ AB 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle OCE = \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle ACE + \angle OCA = 90°$，$\angle B + \angle OAC = 90°$，

$\because \angle OCA = \angle OAC$，

$\therefore \angle ACE = \angle B$，

$\because AF \parallel CE$，

$\therefore \angle CAF = \angle ACE = \angle B$，

$\therefore CF = AC$，

$\because CD \perp AB$，

$\therefore AD = AC$，

$\therefore AD = FC$，

$\therefore AF = AC + FC = AD + AC = CD = CF + AC = AD + AC = CD$，

$\therefore AF = CD$．

解法 2 证明：连接 OC，交 AF 于点 M，

$\because$ CE 与 $\odot O$ 相切于点 C，

$\therefore CE \perp OC$，

$\therefore \angle OCE = 90°$，

$\because AF \parallel CE$，

$\therefore \angle AMO = 90°$，

$\therefore AM = MF = \frac{1}{2}AF$，

$\because CD \perp AB$，

$\therefore \angle OHC = 90°$，

$\therefore CH = DH = \frac{1}{2}CD$，

$\because \sin\angle COH = \frac{CH}{CO} = \frac{AM}{AO}$， $AO = CO$，

$\therefore CH = AM$，

$\therefore AF = CD$.

【小问 2 详解】

解：$\because \odot O$ 的半径为 6， $AH = 2OH$，

$\therefore OC = OA = 2OH + OH = 6$，

$\therefore OH = 2$，

$\because \angle OHC = \angle OCE = 90°$，

$\therefore \frac{OH}{OC} = \frac{OC}{OE} = \cos\angle COE$，

$\therefore OE = \frac{OC^2}{OH} = 18$，

$\therefore AE = OE - OA = 18 - 6 = 12$，

$\therefore AE$ 的长为 12.

24.【答案】（1）①BC；②当$-2 < m < -\sqrt{2}$或$\sqrt{2} < m < 2$

（2）$3 - 2\sqrt{5} < t \le 1$或$2\sqrt{2} \le t < 5$

【分析】（1）先根据点 A 和点 B 的坐标得到$\odot O$与 AB 相切，则线段 AB 上没有点在$\odot O$外；再证明线段 AC 上没有点在$\odot O$外，线段 BC 上有点在$\odot O$内，也有点在$\odot O$内，即可得到结论；

（2）设直线OB在 x 轴上方与$\odot O$交于 T，过点 T 和点 B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 G、H，设 $T(t、t)$，利用勾股定理求出$t = \sqrt{2}$，由函数图象可知，当点 M 在 BT 之间（不包括端点），即 $\sqrt{2} < m < 2$时，线段 MN 是$\odot O$的“交割线段”；由对称性可得当$-2 < m < -\sqrt{2}$时，线段 MN 是$\odot O$的“交割线段”；

（3）分图 2-1，图 2-2，图 2-3，图 2-4 四种临界情况，求出此时 t 的值，再结合图形以及“交割线段”的定义即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：$\because A(0,2)$，$B(2,2)$，

$\therefore OA = 2$，$OA \perp AB$，

$\therefore$点 A 在$\odot O$上，

$\therefore \odot O$与 AB 相切，

$\therefore$线段 AB 上没有点在$\odot O$外，

∴线段 AB 不是 $\odot O$ 的“交割线段”，

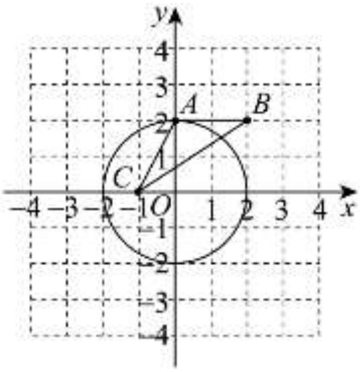
∵ $OC=1<2$，$OB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}>2$，

∴点 C 在 $\odot O$ 内，点 B 在 $\odot O$ 外，

∴线段 AC 上没有点在 $\odot O$ 外，线段 BC 上有点在 $\odot O$ 内，也有点在 $\odot O$ 内，

∴线段 AC 不是 $\odot O$ 的“交割线段”，线段 BC 是 $\odot O$ 的“交割线段”，

故答案为：BC；



②如图所示，设直线 OB 在 x 轴上方与 $\odot O$ 交于 T，过点 T 和点 B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 G、H，设 $T(t、t)$，

∴ $OH=BH=2$，$OG=TG=t$，

∴此时点 H 刚好在 $\odot O$ 上，且此时 BH 与 $\odot O$ 相切；

∵ $\odot O$ 的半径为 2，

∴ $OT=2$，

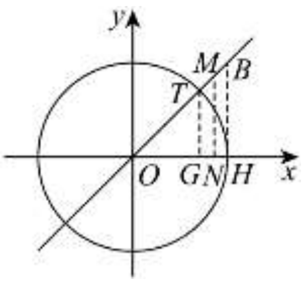
∴ $t^2+t^2=2^2$，

解得 $t=\sqrt{2}$ 或 $t=-\sqrt{2}$（舍去），

∴由函数图象可知，当点 M 在 BT 之间（不包括端点），即 $\sqrt{2}<m<2$ 时，线段 MN 是 $\odot O$ 的“交割线段”；

由对称性可得当 $-2<m<-\sqrt{2}$ 时，线段 MN 是 $\odot O$ 的“交割线段”；

综上所述，当 $-2<m<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<m<2$ 时，线段 MN 是 $\odot O$ 的“交割线段”；



【小问 2 详解】

解：联立 $\begin{cases}y=3\\y=-x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$，

∴ $E(-3,3)$，

同理可得 $D(0,3)$， $F(3,-3)$；

如图 2-1 所示，当 $\odot T$ 恰好经过点 D 时，

$\therefore TD=2$，

$\therefore t=2+3=5$；

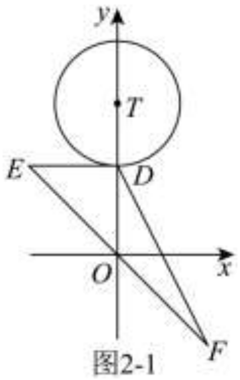


图2-1

如图 2-2 所示，当 $\odot T$ 恰好与 EF 相切于 H 时，连接 TH，

$\because E(-3,3)$， $D(0,3)$，

$\therefore DE=OD=3$， $DE\perp OD$，

$\therefore \angle DOE=45°$，

由切线的性质可得 $\angle THO=90°$，

$\therefore \triangle TOH$ 是等腰直角三角形，

$\therefore t=OT=\sqrt{2}TH=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 当 $2\sqrt{2}\le t<5$ 时， DE， DF 是 $\odot T$ 的“交割线段”， EF 不是 $\odot T$ 的“交割线段”；

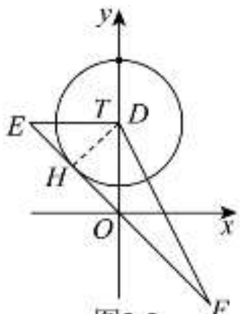


图2-2

如图 2-3 所示，当 $\odot T$ 恰好经过点 D 时，

$\therefore TD=2$，

$\therefore t=3-2=1$；

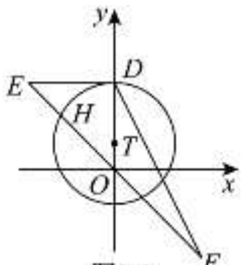


图2-3

如图 2-4 所示，当$\odot T$恰好与DF相切于P时，连接TP，设直线DF与x轴交于Q，

$\therefore Q\left(\frac{3}{2},0\right)$，

$\therefore DQ=\sqrt{OD^2+OQ^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore \sin\angle ODQ=\frac{OQ}{DQ}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

由切线的性质可得$\angle TPD=90°$，$TP=2$，

$\therefore \sin\angle TDP=\frac{TP}{DT}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore DT=2\sqrt{5}$，

$\therefore OT=DT-OD=2\sqrt{5}-3$，

$\therefore t=3-2\sqrt{5}$，

$\therefore$当$3-2\sqrt{5}<t\le 1$时，EF，DF是$\odot T$的“交割线段”，DE不是$\odot T$的“交割线段”；

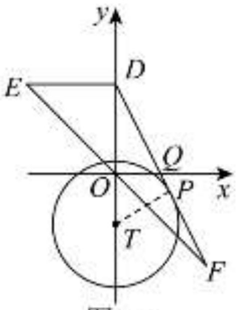


图2-4

综上所述，当$3-2\sqrt{5}<t\le 1$或$2\sqrt{2}\le t<5$时，$\triangle DEF$的三条边中有且只有两条是$\odot T$的“交割线段”.

【点睛】本题主要考查了切线的性质与判定，坐标与图形，勾股定理，一次函数与几何综合，等腰直角三角形的性质与判定等等，解题的关键在于正确理解“交割线段”的定义，以及求出临界情况下的临界值.

25.【答案】(1) ① $y=-\frac{3\sqrt{5}}{2}x^2+3\sqrt{5}x$；② $\frac{1}{3}$

(2) 能，6或$\frac{2}{3}$或$-\frac{6}{7}$或$-\frac{14}{3}$.

【分析】(1) ①先求顶点的坐标，然后待定系数法求解析式即可求解；

②过点E作$EH\perp OC$于点H．设直线BC为$y=kx+\sqrt{5}$，把$C(2,0)$代入，得$0=2k+\sqrt{5}$，解得$k=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，直线BC为$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}$．同理，直线$OP$为$y=\frac{3\sqrt{5}}{2}x$．联立两直线解析式得出

$E\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$，根据 $EH // BO$，由平行线分线段成比例即可求解；

（2）设点 P 的坐标为 $\left(t,\frac{\sqrt{5}}{2}t+\sqrt{5}\right)$，则点 D 的坐标为 $(2t-2,0)$．①如图 2-1，当 $t>2$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$．记 $\angle CPE=\angle BAO=\alpha,\angle APC=\beta$，则 $\angle APD=\alpha+\beta$．过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，则 $AF=t+2$．在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中，$\cos\angle BAO=\frac{AF}{AP}=\frac{2}{3}$，进而得出点 P 的横坐标为 6．②如图 2-2，当 $0<t\le 2$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$．记 $\angle CPE=\angle BAD=\alpha,\angle APD=\beta$．过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，则 $AF=t+2$．在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中，$\cos\angle BAO=\frac{AF}{AP}=\frac{2}{3}$，得出点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$．③如图 $2-3$，当 $-2<t\le 0$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$．记 $\angle BAO=\alpha$．过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，则 $AF=t+2$．在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中，$\frac{AF}{AP}=\cos\angle BAO=\frac{2}{3}$，得出点 P 的横坐标为 $-\frac{6}{7}$．④如图 2-4，当 $t\le -2$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$．记 $\angle BAO=\alpha$．过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，则 $AF=-t-2$．在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中，$\frac{AF}{AP}=\cos\angle PAF=\frac{2}{3}$，得出点 P 的横坐标为 $-\frac{14}{3}$．

【小问 1 详解】

解：①$\because OC=2$，

$\therefore$ 顶点 P 的横坐标为 1．

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$．

设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+\frac{3\sqrt{5}}{2}$，把 $(0,0)$ 代入，

得 $0=a+\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

解得 $a=-\frac{3\sqrt{5}}{2}$．

$\therefore$ 该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3\sqrt{5}}{2}(x-1)^2+\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

即 $y=-\frac{3\sqrt{5}}{2}x^2+3\sqrt{5}x$．

②如图 1，过点 E 作 $EH\perp OC$ 于点 H．

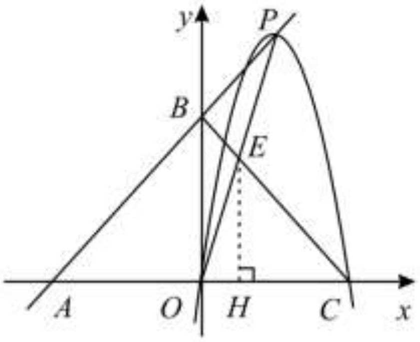


图1

设直线 BC 为 $y=kx+\sqrt{5}$，把 $C(2,0)$ 代入，得 $0=2k+\sqrt{5}$，

解得 $k=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ 直线 BC 为 $y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}$．

同理，直线 OP 为 $y=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}x$．

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{5}, \\ y=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}x. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}. \end{cases}$

$\therefore E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\right)$．

$\therefore OH=\dfrac{1}{2}, HC=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$．

$\because EH /\!/ BO$，

$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{1}{3}$．

【小问 2 详解】

设点 P 的坐标为 $\left(t,\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+\sqrt{5}\right)$，则点 D 的坐标为 $(2t-2,0)$．

①如图 $2-1$，当 $t>2$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$．

记 $\angle CPE=\angle BAO=\alpha, \angle APC=\beta$，则 $\angle APD=\alpha+\beta$．

$\because \angle PCD$ 为 $\triangle PAC$ 的外角，

$\therefore \angle PCD=\alpha+\beta$.

$\because PC=PD$.

$\therefore \angle PDC=\angle PCD=\alpha+\beta$.

$\therefore \angle APD=\angle ADP$.

$\therefore AP=AD=2t$.

过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F ，则 $AF=t+2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中， $\cos\angle BAO=\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore \dfrac{t+2}{2t}=\dfrac{2}{3}$ ，解得 $t=6$.

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 6.

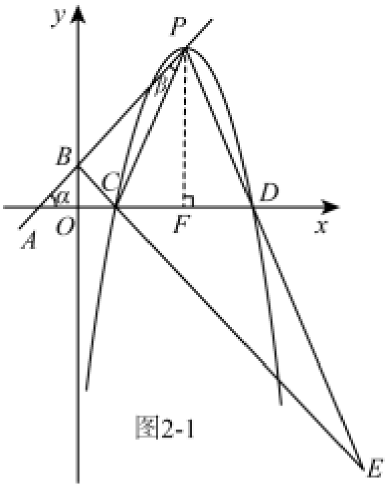


图2-1

②如图 2-2，当 $0<t\le 2$ 时，存在 $\angle CPE=\angle BAO$.

记 $\angle CPE=\angle BAD=\alpha,\angle APD=\beta$.

$\because \angle PDC$ 为 $\triangle PAD$ 的外角，

$\therefore \angle PDC=\alpha+\beta$.

$\therefore \angle PCD=\angle PDC=\alpha+\beta$

$\therefore \angle APC=\angle ACP$.

$\therefore AP=AC=4$.

过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F ，则 $AF=t+2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中， $\cos\angle BAO=\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore \dfrac{t+2}{4}=\dfrac{2}{3}$ ，解得 $t=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 $\dfrac{2}{3}$.

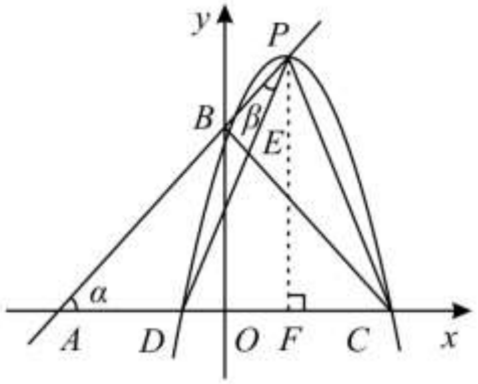


图2-2

③如图 2-3，当$-2<t\le 0$时，存在$\angle CPE=\angle BAO$．记$\angle BAO=\alpha$．

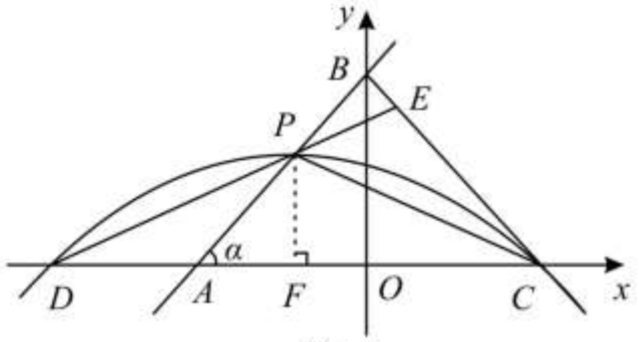


图2-3

$\because PC=PD$，

$\therefore \angle PDC=\angle PCD=\dfrac{1}{2}\angle CPE=\dfrac{1}{2}\alpha$．

$\therefore \angle APD=\angle BAO-\angle PDC=\alpha-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\alpha$．

$\therefore \angle APD=\angle PDA$．

$\therefore AD=AP=-2t$．

过点P作$PF\perp x$轴于点F，则$AF=t+2$．

在$\mathrm{Rt}\triangle APF$中，$\dfrac{AF}{AP}=\cos\angle BAO=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore \dfrac{t+2}{-2t}=\dfrac{2}{3}$，解得$t=-\dfrac{6}{7}$．

$\therefore$点P的横坐标为$-\dfrac{6}{7}$．

④如图 2-4，当$t\le -2$时，存在$\angle CPE=\angle BAO$．记$\angle BAO=\alpha$．

$\because PC=PD$，

$\therefore \angle PCD=\angle PDC=\dfrac{1}{2}\angle CPE=\dfrac{1}{2}\alpha$．

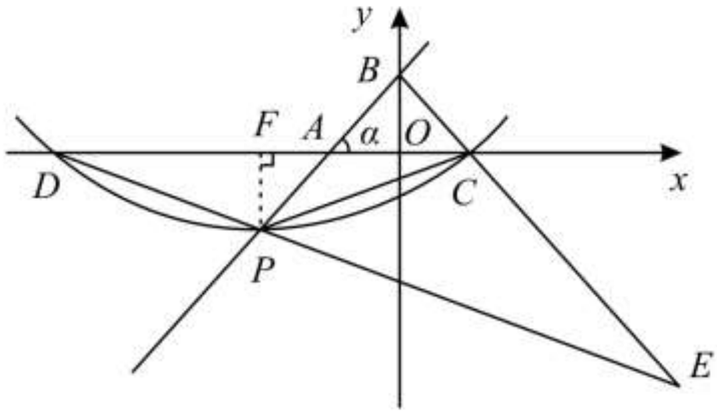


图2-4

$\therefore \angle APC = \angle BAO - \angle PCD = \alpha - \dfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha$.

$\therefore PA = CA = 4$.

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F，则 $AF = -t-2$.

在 Rt$\triangle APF$ 中，$\dfrac{AF}{AP} = \cos\angle PAF = \dfrac{2}{3}$，

$\therefore \dfrac{-2-t}{4} = \dfrac{2}{3}$，解得 $t = -\dfrac{14}{3}$.

$\therefore$点 P 的横坐标为$-\dfrac{14}{3}$.

综上，点 P 的横坐标为$6, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{6}{7}, -\dfrac{14}{3}$.

【点睛】本题考查了二次函数综合运用，解直角三角形，平行线分线段成比例，熟练掌握以上知识，分类讨论是解题的关键.

26.【答案】(1）$CD=EF$，$CD \parallel EF$

（2）$CD=EF$，$CD \parallel EF$，成立，理由见解析

（3）点 D 运动到 BC 的中点时，▱$BDEF$ 是菱形，证明见解析

【分析】(1）根据 $\triangle ABC$ 和$\triangle ADF$ 均为等边三角形，得到 $AF=AD$，$AB=BC$，$\angle FAD=\angle ABC=60°$，根据 E、D 分别与点 A、B 重合，得到 $AB=AD$，$EF=AF$，$CD=BC$，$\angle FAD=\angle FAB$，推出 $CD=EF$，$CD \parallel EF$;

（2）连接 BF，根据$\angle FAD=\angle BAC=60°$，推出$\angle FAB=\angle DAC$，根据 $AF=AD$，$AB=AC$，推出 $\triangle AFB \cong \triangle ADC$，得到$\angle ABF=\angle ACD=60°$，$BF=CD$，根据 $AE=BD$，推出 $BE=CD$，得到 $BF=BE$，推出 $\triangle BFE$ 是等边三角形，得到 $BF=EF$，$\angle FEB=60°$，推出 $CD=EF$，$CD \parallel EF$;

（3）过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G，设$\triangle ABC$ 的边长为 a，$AD=h$，根据 $AB=BC$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，$BD=AE$，推出 $AE=BE=\frac{1}{2}AB$，根据 $AB=AC$，推出 $AD \perp BC$，得到 $EG \parallel AD$，推出$\triangle EBG \backsim \triangle ABD$，推出

$\dfrac{EG}{AD}=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{2}$，得到 $EG=\dfrac{1}{2}AD=\frac{1}{2}h$，根据 $CD=EF$，$CD\parallel EF$，推出四边形 $CEFD$ 是平行四边形，推出 $S_{CEFD}=CD\cdot EG=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{1}{2}h=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，根据 $EF=BD$，$EF\parallel BD$，推出四边形 $BDEF$ 是平行四边形，根据 $BF=EF$，推出▱$BDEF$ 是菱形．

【小问 1 详解】

∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 均为等边三角形，

∴$AF=AD$，$AB=BC$，$\angle FAD=\angle ABC=60°$，

当点 E、D 分别与点 A、B 重合时，$AB=AD$，$EF=AF$，$CD=BC$，$\angle FAD=\angle FAB$，

∴$CD=EF$，$CD\parallel EF$；

故答案为：$CD=EF$，$CD\parallel EF$；

【小问 2 详解】

$CD=EF$，$CD\parallel EF$，成立．

证明：

连接 BF，

∵$\angle FAD=\angle BAC=60°$，

∴$\angle FAD-\angle BAD=\angle BAC-\angle BAD$，

即 $\angle FAB=\angle DAC$，

∵$AF=AD$，$AB=AC$，

∴$\triangle AFB\cong\triangle ADC$(SAS)，

∴$\angle ABF=\angle ACD=60°$，$BF=CD$，

∵$AE=BD$，

∴$BE=CD$，

∴$BF=BE$，

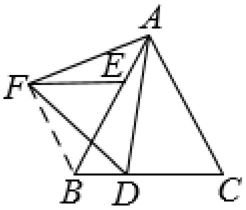
∴$\triangle BFE$ 是等边三角形，

∴$BF=EF$，$\angle FEB=60°$，

∴$CD=EF$，$BC\parallel EF$，

即 $CD\parallel EF$，

∴$CD=EF$，$CD\parallel EF$；



【小问 3 详解】

如图，当点 D 运动到 BC 的中点时，四边形 $CEFD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的一半，此时，四边形 $BDEF$ 是菱形．

证明：

过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G，设$\triangle ABC$ 的边长为 a，$AD=h$，

$\because AB=BC$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$， $BD=AE$，

$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB$，

$\because AB=AC$，

$\therefore AD\perp BC$，

$\therefore EG\parallel AD$，

$\therefore \triangle EBG\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{EG}{AD}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore EG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}h$，

由（2）知，$CD=EF$， $CD\parallel EF$，

$\therefore$四边形 $CEFD$ 是平行四边形，

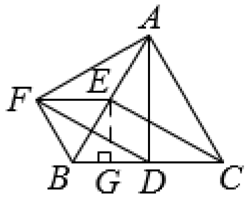
$\therefore S_{四边形CEFD}=CD\cdot EG=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

此时，$EF=BD$，$EF\parallel BD$，

$\therefore$四边形 $BDEF$ 是平行四边形，

$\because BF=EF$，

$\therefore \square BDEF$ 是菱形．



【点睛】本题主要考查了等边三角形判定与性质，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，菱形的判定，解决问题的关键是熟练掌握等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形判定和性质，相似三角形的判定和性质，菱形的判定．