

# 2024 北京十三中初二（下）期中

## 数 学

考生须知：

1. 本试卷共 6 页，共四道大题，26 道小题，第一至第三大题为必做题，第四大题为选做题。考试时间 100 分钟。
2. 在试卷、答题卡的规定位置认真填写班级、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 选择题、作图题在答题卡上用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔在答题卡上完成作答。
5. 考试结束，请将考试材料按监考教师要求交回。

### 一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

1. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

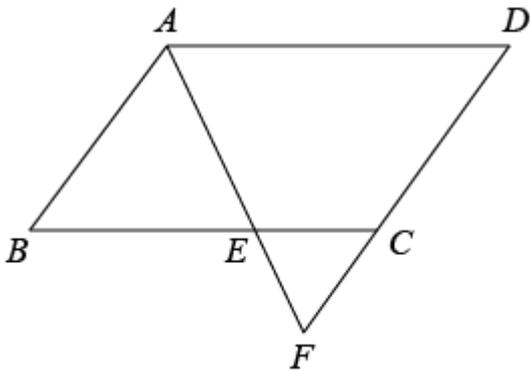
A.  $\sqrt{\frac{1}{3}}$

B.  $\sqrt{0.5}$

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{12}$

2. 如图， $E$  是平行四边形  $ABCD$  边  $BC$  上一点，且  $AB = BE$ ，连接  $AE$ ，并延长  $AE$  与  $DC$  的延长线交于点  $F$ ，如果  $\angle F = 70^\circ$ ，那么  $\angle B$  的度数是（ ）



A.  $30^\circ$

B.  $40^\circ$

C.  $50^\circ$

D.  $70^\circ$

3. 下列运算正确的是（ ）

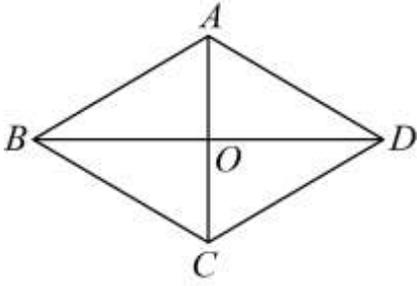
A.  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B.  $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$

C.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$

D.  $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{2}$

4. 如图，在菱形  $ABCD$  中，对角线  $AC$ ， $BD$  相交于点  $O$ ， $\angle ABD = 30^\circ$ ， $BD = 2\sqrt{3}$ ，则  $AB$  的长为（ ）



A. 1

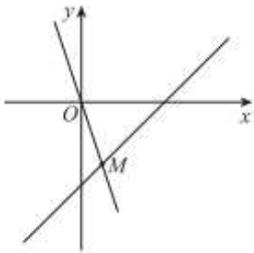
B. 2

C.  $\sqrt{3}$

D.  $2\sqrt{3}$

5. 如图，直线  $y = k_1x + b_1$  和直线  $y = k_2x + b_2$  相交于点  $M\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ ，则关于  $x, y$  的方程组

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}, \text{ 的解为 ( )}$$



A.  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

6. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边分别记为  $a, b, c$ ，下列条件中，能判定  $\triangle ABC$  是直角三角形的是 ( )

A.  $a^2 = (c-b)(c+b)$

B.  $a = 1, b = 2, c = 3$

C.  $\angle A = \angle C$

D.  $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$

7. 已知一次函数  $y = -x + 2$ ，那么下列结论正确的是 ( )

A.  $y$  的值随  $x$  的值增大而增大

B. 图象经过第一、二、三象限

C. 图象必经过点  $(0, 2)$

D. 当  $x < 2$  时， $y < 0$

8. 如图，分别在四边形  $ABCD$  的各边上取中点  $E, F, G, H$ ，连接  $EG$ ，在  $EG$  上取一点  $M$ ，连接  $HM$ ，过  $F$  作  $FN \parallel HM$ ，交  $EG$  于  $N$ ，将四边形  $ABCD$  中的四边形①和②移动后按图中方式摆放，得到四边形  $AHM'G'$  和  $AFN'E$ ，延长  $M'G'$ ， $N'F'$  相交于点  $K$ ，得到四边形  $MM'KN'$ 。下列说法中，错误的是 ( )



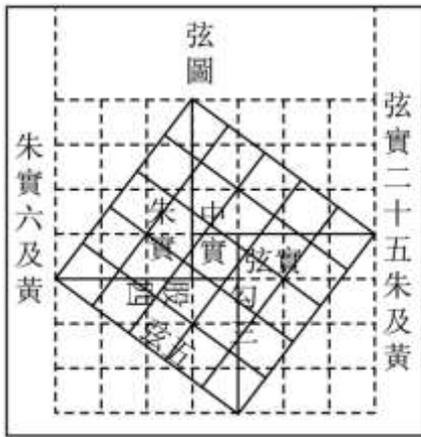


图1

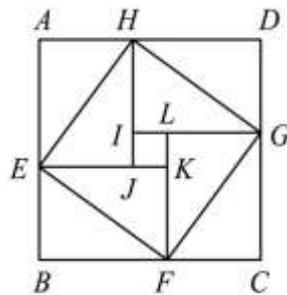


图2

16. 已知  $A, B$  两地相距  $240\text{km}$ . 甲、乙两辆货车分别从  $A, B$  两地同时出发, 匀速相向而行. 图 1 表示甲、乙两辆货车距  $A$  地的距离  $s$  (单位:  $\text{km}$ ) 与行驶时间  $t$  (单位:  $\text{h}$ ) 的数量关系; 图 2 表示甲、乙两辆货车间的距离  $d$  (单位:  $\text{km}$ ) 与行驶时间  $t$  (单位:  $\text{h}$ ) 的数量关系.

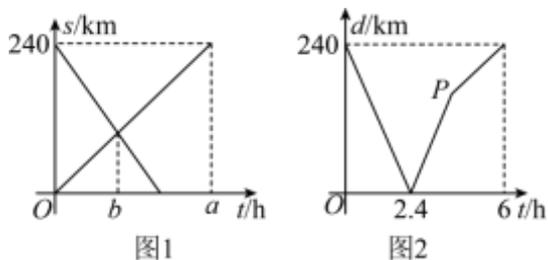


图1

图2

根据以上信息得到以下四个推断:

- ①甲货车从  $A$  地到  $B$  地耗时  $6$  小时, 即  $a = 6$ ;
- ②出发后  $2.4$  小时甲、乙两辆货车相遇, 即  $b = 2.4$ ;
- ③乙货车的速度是  $60\text{km/h}$ ;
- ④点  $P$  的坐标是  $(4, 180)$ .

所有正确推断的序号是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (共 68 分)

17. 计算:

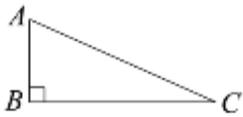
(1)  $\sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{48}$ ;

(2)  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27}$

(3)  $(\sqrt{5} - 1)^2 - (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

(4) 已知:  $x = \sqrt{2} - 1$ , 求代数式  $x^2 + 2x + 1$  的值.

18. 下面是小阳设计的作矩形的尺规作图过程.



已知：Rt $\triangle ABC$ ， $\angle ABC=90^\circ$  .

求作：矩形  $ABCD$ .

作法：

- ①以  $A$  为圆心， $BC$  的长为半径画弧，再以  $C$  为圆心， $AB$  的长为半径画弧，两弧交于点  $D$ ；
- ②连接  $DA$ ， $DC$ .

所以四边形  $ABCD$  即为所求作的矩形.

根据小阳设计的尺规作图过程，

- (1) 使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；
- (2) 完成下面的证明.

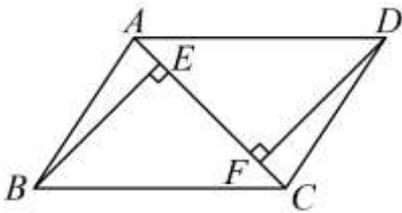
证明： $\because AD=BC$ ， $CD=AB$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是\_\_\_\_\_（\_\_\_\_\_）.

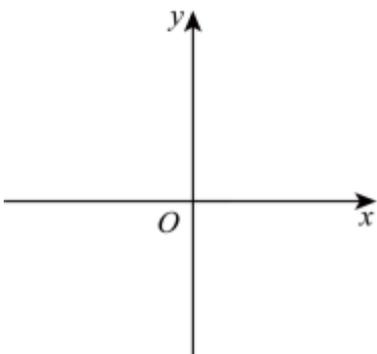
$\because \angle ABC=90^\circ$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形（\_\_\_\_\_）.

19. 如图，在  $\square ABCD$  中， $AC$  是对角线， $BE \perp AC$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点  $E$ ， $F$ ，求证： $AE=CF$ .



20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，一次函数  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ) 的图象由函数  $y=2x$  的图象平移得到，且经过点  $(-1,3)$ ， $P(x,y)$  是一次函数图象上一点



- (1) 求一次函数的解析式；
- (2) 写出图象与  $x$  轴、 $y$  轴的交点的坐标，并画出一一次函数图象；
- (3) 当  $y > 0$  时，直接写出  $x$  的取值范围；

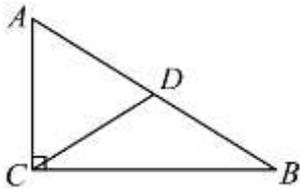
(4) 已知点  $A(-3,0)$ ，当  $\triangle OPA$  的面积为 6 时，求点  $P$  的坐标.

21. 下面是证明直角三角形性质时的两种添加辅助线的方法，请选择其中一种方法，完成证明.

求证：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

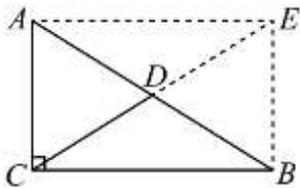
已知：如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点  $D$  是  $AB$  的中点.

求证： $CD = \frac{1}{2} AB$ .



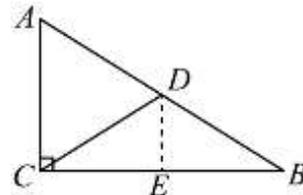
方法一

证明：如图，延长  $CD$  到点  $E$ ，使得  $DE = CD$ ，连接  $AE, BE$ .



方法二

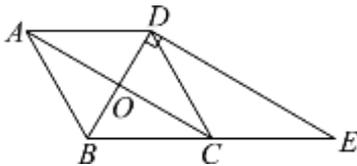
证明：如图，取  $BC$  的中点  $E$ ，连接  $DE$ .



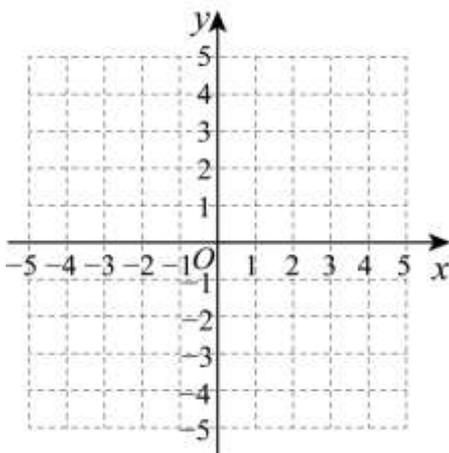
22. 已知：如图，在等腰  $\triangle ABC$  中， $AB = BC$ ， $BO$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于点  $O$ ，延长  $BO$  至点  $D$ ，使  $OD = BO$ ，连接  $AD, CD$ ，过点  $D$  作  $DE \perp BD$  交  $BC$  的延长线于点  $E$ .

(1) 求证：四边形  $ABCD$  是菱形；

(2) 如果  $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，求  $DE$  的长.



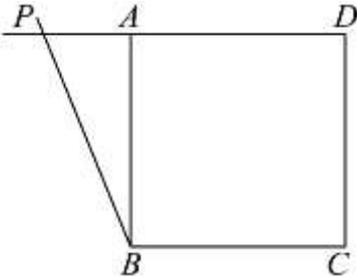
23. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知一次函数  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-4, -1)$ ， $(2, 2)$ .



(1) 求函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的解析式;

(2) 当  $x > -2$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y = x + n$  的值大于函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的值, 写出  $n$  的取值范围.

24. 如图, 正方形  $ABCD$ . 过点  $B$  作射线  $BP$ , 交  $DA$  的延长线于点  $P$ . 点  $A$  关于直线  $BP$  的对称点为  $E$ , 连接  $BE, AE, CE$ . 其中  $AE, CE$  分别与射线  $BP$  交于点  $G, H$ .



(1) 依题意补全图形;

(2) 设  $\angle ABP = \alpha$ ,  $\angle AEB =$  \_\_\_\_\_ (用含  $\alpha$  的式子表示),  $\angle AEC =$  \_\_\_\_\_  $^\circ$ ;

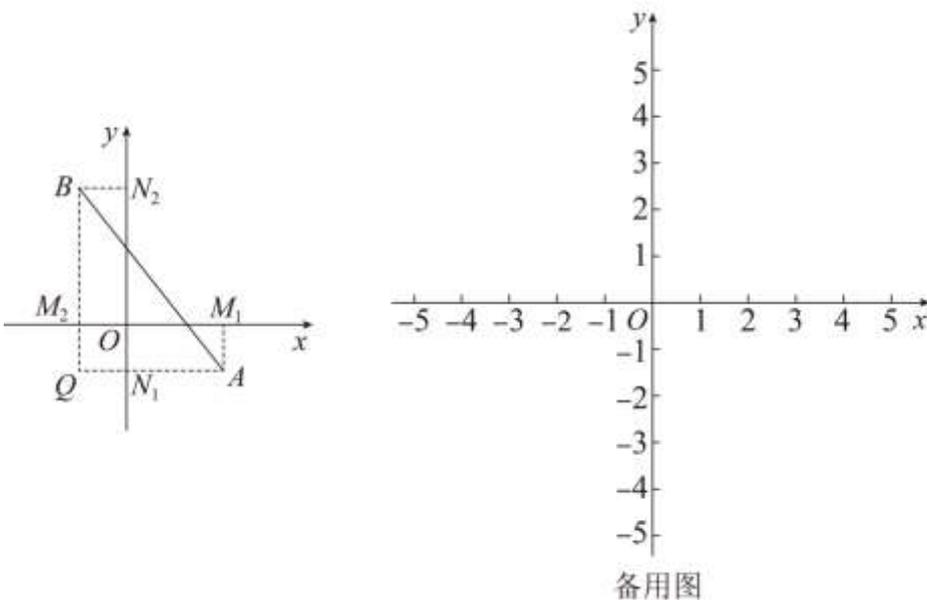
(3) 若  $EH = BH$ , 用等式表示线段  $AE$  与  $CE$  之间的数量关系, 并证明.

#### 四、附加题 (共 10 分)

25. 阅读材料: 在平面直角坐标系中, 已知  $x$  轴上两点  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$  的距离记作  $AB = |x_1 - x_2|$ . 若是平面上任意两点, 我们可以通过构造直角三角形来求  $AB$  间的距离, 如图, 过  $A, B$  分别向  $x$  轴、 $y$  轴作垂线  $AM_1, AN_1$  和  $BM_2, BN_2$ , 垂足分别是  $M_1, N_1, M_2, N_2$ , 直线  $AN_1$  交  $BM_2$  于点  $Q$ , 在  $Rt\triangle ABQ$  中,  $AQ = |x_1 - x_2|, BQ = |y_1 - y_2|,$

$\therefore AB^2 = AQ^2 + BQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ , 由此得到平面直角坐标系内任意两

点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  间的距离公式为:  $AB =$  \_\_\_\_\_;



(1) 直接应用平面内两点间距离公式计算点  $A(1, -3), B(-2, 1)$  之间的距离为 \_\_\_\_\_;

(2) 利用上面公式，在平面直角坐标系中的两点  $A(0,3)$ ， $B(4,1)$ ， $P$  为  $x$  轴上任一点，求  $PA+PB$  的最小值和此时  $P$  点的坐标；

26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，如果点  $A$ ， $C$  为某个菱形一组对角的顶点，且点  $A$ ， $C$  在直线  $y=x$  上，那么称该菱形为点  $A$ ， $C$  的“关联菱形”。例如，图 1 中的四边形  $ABCD$  为点  $A$ ， $C$  的“关联菱形”。已知点  $M(1,1)$ ，点  $P(a,a)$ 。

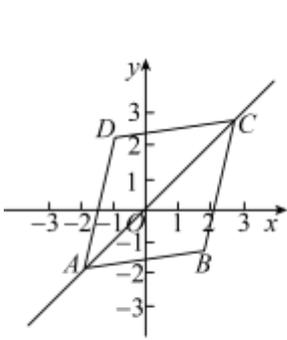
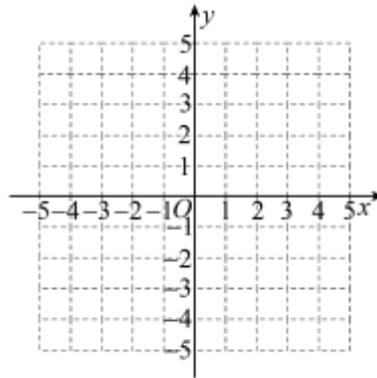
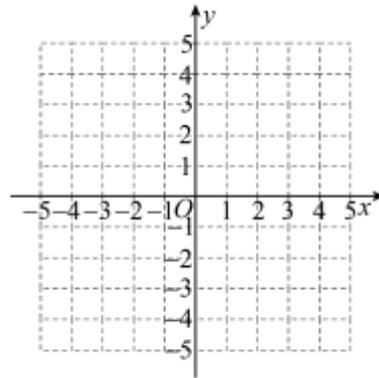


图1



备用图



(1) 当  $a=3$  时，

① 在点  $E(2,1)$ ， $F(1,3)$ ， $G(-1,5)$  中，点     ，     能够成为点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”的顶点；

② 当点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”  $MNPQ$  的面积为 8 时，求点  $N$  的坐标。

(2) 已知直线  $y=-2x+b$  与  $x$  轴交于点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $B$ ，若线段  $AB \leq 5$ ，且点  $A$  是点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”的顶点，直接写出  $a$  的取值范围。

## 参考答案

### 一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

#### 1. 【答案】C

【分析】根据最简二次根式的定义，逐一判断即可解答.

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 A 不符合题意；

B、 $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 B 不符合题意；

C、 $\sqrt{3}$  是最简二次根式，故 C 符合题意；

D、 $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ ，故 D 不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

#### 2. 【答案】B

【分析】利用平行四边形的性质以及等腰三角形的性质得出  $\angle 1 = \angle 3$ ，再利用三角形的内角和定理即可得到答案.

【详解】解：如图所示，

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\therefore AB \parallel DC$ ，

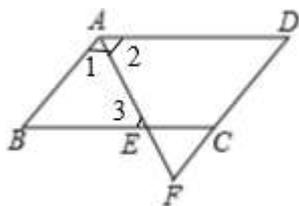
$\therefore \angle 1 = \angle F = 70^\circ$  .

$\because AB = BE$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 40^\circ$ ，

故选：B.



【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质以及平行线的性质，等腰三角形的性质等知识，熟练应用平行四边形的性质得出是解题关键.

#### 3. 【答案】D

【分析】根据二次根式的运算法则逐项进行判断.

【详解】解：A、 $\sqrt{2}$  与  $\sqrt{3}$  不能合并，所以选项错误；

B、 $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，所以选项错误；

C、 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ，所以选项错误；

D、 $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ ，所以选项正确；

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式的运算，属于基础题，掌握二次根式的性质及运算法则是解题的关键.

#### 4. 【答案】B

【分析】利用菱形的性质，求出  $\angle AOB = 90^\circ$ ，得出三角形  $ABO$  是直角三角形，再  $AB = x$ ，运用勾股定理求出  $AB$ .

【详解】解：∵ 四边形  $ABCD$  是菱形， $AC$ ， $BD$  是对角线， $\angle ABD = 30^\circ$ ，

∴  $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$ ， $AC \perp BD$ ，

∴  $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，即三角形  $ABO$  是直角三角形，

又∵  $BD = 2\sqrt{3}$ ，

∴  $BO = \sqrt{3}$ ，

设  $AB = x$ ，则  $AO = \frac{1}{2}x$ ，

根据勾股定理可得， $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2$ ，

解得  $x = 2$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了菱形的性质，直角三角形的性质，勾股定理，灵活运用这些性质解决问题时解题的关键.

#### 5. 【答案】A

【分析】根据直线  $y = k_1x + b_1$  和直线  $y = k_2x + b_2$  相交于点  $M\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ ，即可确定方程组，直接求解即可.

【详解】解：根据题意，可得方程组  $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ ，

根据函数图像与方程组解的关系可知，函数图像的交点坐标就是联立函数解析式构成的方程组的解，则根

据直线  $y = k_1x + b_1$  和直线  $y = k_2x + b_2$  相交于点  $M\left(\frac{2}{3}, -2\right)$  得  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了一次函数与二元一次方程组的关系，熟练掌握两者之间的关系：函数图像的交点坐标就是联立函数解析式构成的方程组的解是解题的关键.

6. 【答案】A

【分析】求出  $a^2+b^2=c^2$ ，根据勾股定理即可判断选项 A；根据勾股定理的逆定理即可判断选项 B；根据直角三角形的判定即可判断选项 C；求出最大角  $\angle C$  的度数，即可判断选项 D.

【详解】解：A、根据选项  $a^2=(c-b)(c+b)$ ，化简得  $a^2=c^2-b^2$ ，即  $a^2+b^2=c^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形，故本选项符合题意；

B、根据选项中  $a=1, b=2, c=3$ ，可得  $a^2=1, b^2=4, c^2=9$ ，

$\therefore 1^2+2^2 \neq 3^2$ ，即  $a^2+b^2 \neq c^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$  不是直角三角形，故本选项不符合题意；

C、根据选项  $\angle A=\angle C$ ，

$\therefore \triangle ABC$  是等腰三角形，不一定是直角三角形，故本选项不符合题意；

D、根据选项中  $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$ ，设  $\angle A=3x, \angle B=4x, \angle C=5x$ ，则由三角形内角和定理  $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$  得  $3x+4x+5x=180^\circ$ ，解得  $x=15^\circ$ ，

$\therefore$  最大角  $\angle C=5 \times 15^\circ=75^\circ < 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$  不是直角三角形，故本选项不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理和三角形内角和定理，能熟记勾股定理的逆定理是解此题的关键，注意：如果一个三角形的两边  $a、b$  的平方和等于第三边  $c$  的平方，那么这个三角形是直角三角形.

7. 【答案】C

【分析】根据一次函数的性质逐项进行分析即可.

【详解】解：A、由于一次函数  $y=-x+2$  的  $k=-1 < 0$ ，所以  $y$  的值随  $x$  的值增大而减小，故该选项不符合题意；

B、一次函数  $y=-x+2$  的  $k=-1 < 0, b=2 > 0$ ，所以该函数过一、二、四象限，故该选项不符合题意；

C、将  $(0,2)$  代入  $y=-x+2$  中得  $2=0+2$ ，等式成立，所以  $(0,2)$  在  $y=-x+2$  上，故该选项符合题意；

D、一次函数  $y=-x+2$  的  $k=-1 < 0$ ，所以  $y$  的值随  $x$  的值增大而减小，所以当  $x < 2$  时， $y > 0$ ，故该选项不符合题意.

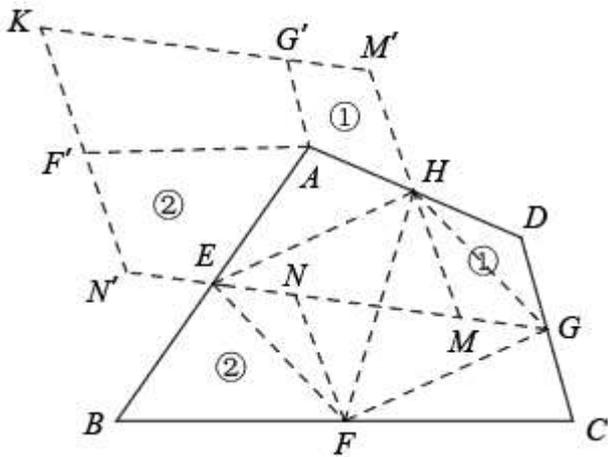
故选：C.

【点睛】本题考查了一次函数的图象和性质，熟练掌握一次函数的相关知识是解题的关键.

8. 【答案】D

【分析】 $S_{\text{四边形}CGNF} \cong S_{\text{四边形}AG'KF'}$ ，从而 A 正确；根据对称或全等得出 B 正确；根据  $KN' // MM'$ ， $KM' // MN'$  得出 C 正确； $\angle K = \angle NMH \neq \angle AHM'$  得出 D 错误.

【详解】解：如图，



$\because$  四边形  $CGNF \cong$  四边形  $AG'KF'$ ，四边形  $AEN'F' \cong$  四边形  $BFNE$ ，四边形  $GDHM \cong$  四边形  $G'AHM'$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}CGNF} \cong S_{\text{四边形}AG'KF'}$ ，

故 A 正确；

顺次连接  $EFGH$ ，连接  $HF$ ，得  $\square EFGH$ ，于是  $OH = OF$ ，

可得  $\triangle NOF \cong \triangle MOH$ ，所以  $NF = GH$ ，

故 B 正确；

由对称性可得： $\angle M' = \angle MHG$ ，

$\therefore MN' \parallel KM'$ ，

$\because NF' \parallel NF \parallel HM$ ，

$\therefore$  四边形  $MM'KN'$  是平行四边形，

故 C 正确；

$\because$  四边形  $MM'KN'$  是平行四边形，

$\therefore \angle K = \angle HMN$ ，

$\because AD$  不一定平行于  $MN$ ，

$\therefore \angle HMN$  不一定等于  $\angle AHM'$ ，

$\therefore \angle K$  不一定等于  $\angle AHM'$ ，

故 D 不正确，

故答案为：D.

**【点睛】** 本题考查了平行四边形的判定和性质，中心对称及其性质的，全等图形判定等知识，解决问题的关键是掌握有关知识.

## 二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. **【答案】**  $x \geq 6$ .

**【分析】** 求函数自变量的取值范围，就是求函数解析式有意义的条件，根据二次根式被开方数必须是非负数的条件，即可解答.

**【详解】**  $\because$  要使  $\sqrt{x-6}$  在实数范围内有意义，必须  $x-6 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 6$ .

故答案为： $x \geq 6$ 。

考点：1.函数自变量的取值范围；2.二次根式有意义的条件。

10. 【答案】  $y = 2x + 3$ （答案不唯一）

【分析】 本题考查了一次函数的性质，能够根据直线所经过的象限正确判断  $k$ ， $b$  的符号是解题的关键。根据经过二、三、四象限的一次函数  $k > 0$ ， $b \geq 0$  即可求解。

【详解】 解： $\because$  一次函数的图象不经过第四象限，

$\therefore k > 0$ ， $b \geq 0$ ，

$\therefore$  一次函数关系式可写为：如  $y = 2x + 3$ （答案不唯一）

故答案为： $y = 2x + 3$ （答案不唯一）

11. 【答案】  $AC \perp BD$ （答案不唯一）

【分析】 根据正方形的判定定理可直接进行求解。

【详解】 解： $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形，

$\therefore$  根据“一组邻边相等的矩形是正方形”可添加： $AB = AD$  或  $AB = CB$  或  $BC = CD$  或  $AD = CD$ ，

根据“对角线互相垂直的矩形是正方形”可添加： $AC \perp BD$ ，

故答案为  $AC \perp BD$ （答案不唯一）。

【点睛】 本题主要考查正方形的判定定理，熟练掌握正方形的判定是解题的关键。

12. 【答案】 8

【分析】 由菱形面积公式即可得出结论。

【详解】 解： $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore$  菱形  $ABCD$  的面积  $= \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24 \text{cm}^2$ ，

即  $AC \cdot BD = 6AC = 48$ ，

$\therefore AC = 8$ ，

即  $AC$  的长为  $8 \text{cm}$ ，

故答案为：8。

【点睛】 本题考查了菱形的性质，熟记菱形面积等于两条对角线长的乘积的一半是解题的关键。

13. 【答案】  $-1$ （答案不唯一）

【分析】 根据一次函数图象上点的特征由当  $x_1 < x_2$  时，则  $y_1 > y_2$ ，可判定  $k < 0$ ，即可求解。

【详解】 解： $\because A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$  是一次函数  $y = kx + 3$  的图象上两点，

当  $x_1 < x_2$  时，则  $y_1 > y_2$ ，

$\therefore k < 0$ ，

$\therefore k$  取  $-1$ （答案不唯一）。

故答案为  $-1$ 。

【点睛】 本题主要考查一次函数图象上点的特征，由当  $x_1 < x_2$  时，则  $y_1 > y_2$  确定  $k$  的符号是解题的关键。

14. 【答案】 5

【分析】 本题考查了矩形的性质、折叠变换的性质、等腰三角形的判定以及勾股定理；熟练掌握折叠变换

的性质，由勾股定理得出方程是解题的关键．先根据折叠的性质得到  $\angle DBC = \angle DBE$ ，再由  $AD \parallel BC$  得到  $\angle DBC = \angle BDE$ ，则  $\angle DBE = \angle BDE$ ，可判断  $BE = DE$ ，设  $AE = x$ ，则  $DE = AD - AE = 8 - x$ ，然后在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中利用勾股定理得到  $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ ，再解方程即可得出  $AE$  以及  $DE$  的长．

**【详解】**解：∵ 四边形  $ABCD$  是矩形，

∴  $AD = BC = 8$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = CD = 4$ ，

∵  $\triangle BDC'$  是由  $\triangle BDC$  折叠得到，

∴  $\angle DBC = \angle DBE$ ，

∵  $AD \parallel BC$ ，

∴  $\angle DBC = \angle BDE$ ，

∴  $\angle DBE = \angle BDE$ ，

∴  $BE = DE$ ，

设  $AE = x$ ，则  $DE = AD - AE = 8 - x$ ， $BE = 8 - x$ ，

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中， $AE^2 + AB^2 = BE^2$ ，

即  $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ ，

解得  $x = 3$ ，

∴  $DE = 8 - 3 = 5$ ，

故答案为：5．

15. **【答案】** 10

**【详解】**  $(14 \times 14 - 2 \times 2) \div 8 = (196 - 4) \div 8 = 192 \div 8 = 24$

$24 \times 4 + 2 \times 2 = 96 + 4 = 100$

$\sqrt{100} = 10$ ．

即正方形  $EFGH$  的边长为 10．

故答案为 10．

16. **【答案】** ①②③

**【分析】**由图 1 可知乙车先到达目的地，由此结合图 2 可知甲货车从  $A$  地到  $B$  地耗时 6 小时，即  $a = 6$ ，即可判断①；根据当出发后 2.4 小时后，甲、乙两车的距离为 0，即此时两车相遇，即可判断②；求出甲车的速度，进而根据当出发后 2.4 小时后两车相距为 0 求出乙车的速度即可判断③；求出乙车到达目的地的时间，进而求出此时甲车的路程即可判断④．

**【详解】**解：由图 1 可知乙比甲先到达目的地，

∴ 由图 2 可知，甲货车从  $A$  地到  $B$  地耗时 6 小时，即  $a = 6$ ，故①正确；

由图 2 可知，当出发后 2.4 小时后，甲、乙两车的距离为 0，即此时两车相遇，

∴  $b = 2.4$ ，故②正确；

∴ 甲车的速度为  $240 \div 6 = 40 \text{ km/h}$ ，

∴乙车的速度为  $240 \div 2.4 - 40 = 60 \text{ km/h}$ ，故③正确；

乙车到达A地的时间为  $240 \div 6 = 4 \text{ h}$ ，

∴此时甲车行驶的路程为  $4 \times 40 = 160 \text{ km}$ ，

∴点P的坐标是  $(4, 160)$ ，故④错误；

故答案为：①②③.

【点睛】本题主要考查了从函数图象获取信息，正确读懂函数图象是解题的关键.

### 三、解答题（共68分）

17. 【答案】(1)  $-\sqrt{3}$

(2) 1

(3)  $-2\sqrt{5}$

(4) 2

【分析】本题考查的是二次根式的加减运算，二次根式的混合运算，掌握运算顺序是解本题的关键；

(1) 先化简二次根式，再合并即可；

(2) 先计算二次根式的乘法运算，再合并即可；

(3) 先计算二次根式的乘法运算，再合并即可；

(4) 先把  $x^2 + 2x + 1$  化为  $(x+1)^2$ ，再代入计算即可.

【小问1详解】

$$\begin{aligned} & \sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{48} \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}; \end{aligned}$$

【小问2详解】

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \times \sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27} \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{9} \\ &= 4 - 3 \\ &= 1; \end{aligned}$$

【小问3详解】

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5}-1)^2 - (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \\ &= 5 - 2\sqrt{5} + 1 - (18 - 12) \\ &= 6 - 2\sqrt{5} - 6 \\ &= -2\sqrt{5}; \end{aligned}$$

【小问4详解】

解：∵  $x = \sqrt{2} - 1$ ,

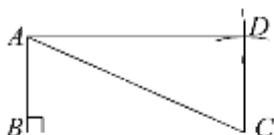
$$\therefore x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (\sqrt{2}-1+1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2;$$

18. 【答案】(1) 见解析；(2) 平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；有一个角是直角的平行四边形是矩形

【分析】(1) 利用直尺和圆规作图即可；

(2) 根据平行四边形的判定定理及矩形的判定定理证明即可.

【详解】解：(1) 使用直尺和圆规，补全图形如图所示：



(2) 证明：∵  $AD = BC$ ,  $CD = AB$ ,

∴ 四边形  $ABCD$  是平行四边形 (两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

∵  $\angle ABC = 90^\circ$ ,

∴ 四边形  $ABCD$  是矩形 (有一个角是直角的平行四边形是矩形)

故答案为：平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

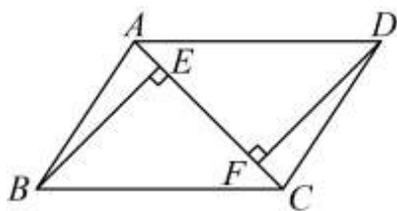
有一个角是直角的平行四边形是矩形.

【点睛】此题考查尺规作图，平行四边形的判定定理，矩形的判定定理，熟记各定理是正确解答此题的关键.

19. 【答案】证明见解析.

【分析】由全等三角形的判定定理  $AAS$  证得  $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ , 则对应边相等:  $AE = CF$ .

【详解】如图,



∵ 四边形  $ABCD$  是平行四边形,

∴  $AB = CD$ ,  $AB \parallel CD$ ,

∴  $\angle BAE = \angle DCF$ .

又  $BE \perp AC$ ,  $DF \perp AC$ ,

∴  $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ .

在  $\triangle ABE$  与  $\triangle CDF$  中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle CFD \\ \angle BAE = \angle DCF, \\ AB = CD \end{cases}$$

$\therefore$ 得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$  (AAS),

$\therefore AE = CF$ .

**【点睛】** 本题考查了全等三角形的判定与性质, 熟练掌握三角形全等的判定方法并准确识图是解题的关键.

20. **【答案】** (1)  $y = 2x + 5$

(2)  $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ ,  $(0, 5)$ , 画图见解析

(3)  $x > -\frac{5}{2}$

(4)  $P\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$  或  $P\left(-\frac{9}{2}, -4\right)$ .

**【分析】** 本题考查的是一次函数图象的平移, 画一次函数的图象, 利用图象与坐标轴的交点坐标解不等式, 坐标与图形面积, 熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

(1) 由平移的性质可得  $k = 2$ , 再代入  $(-1, 3)$  即可得到解析式;

(2) 当  $x = 0$  时,  $y = 5$ , 当  $y = 0$  时,  $x = -\frac{5}{2}$ , 可得交点坐标, 再画图即可;

(3) 直接根据函数图象可得答案;

(4) 由  $P(x, 2x + 5)$ ,  $A(-3, 0)$ , 再利用  $\triangle OPA$  的面积为 6, 建立方程求解  $P$  的坐标即可.

**【小问 1 详解】**

解:  $\because$  一次函数  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) 的图象由函数  $y = 2x$  的图象平移得到,

$\therefore$  一次函数为  $y = 2x + b$ ,

$\because$  一次函数  $y = 2x + b$  经过点  $(-1, 3)$ ,

$\therefore -2 + b = 3$ ,

$\therefore b = 5$ ,

$\therefore$  一次函数为  $y = 2x + 5$ ;

**【小问 2 详解】**

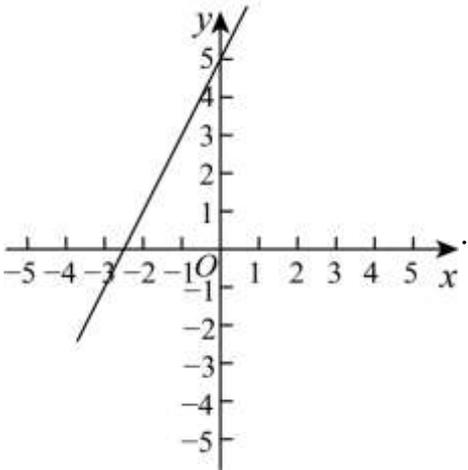
当  $x = 0$  时,  $y = 5$ ,

当  $y = 0$  时,  $2x + 5 = 0$ ,

$\therefore x = -\frac{5}{2}$ ,

∴ 图象与  $x$  轴、 $y$  轴的交点的坐标分别为  $(-\frac{5}{2}, 0)$ ,  $(0, 5)$ ,

画图如下:

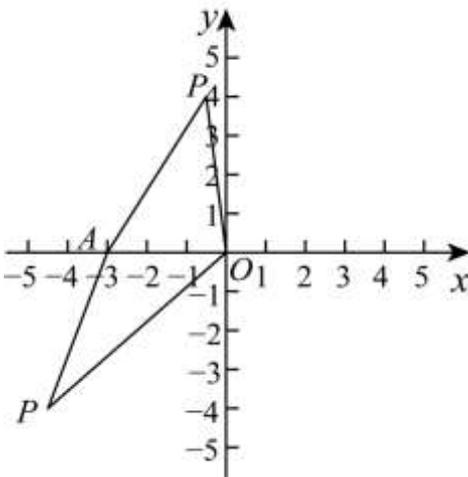


【小问 3 详解】

由函数图象可得: 当  $y > 0$  时,  $x > -\frac{5}{2}$ ;

【小问 4 详解】

如图, ∵  $P(x, y)$ ,  $A(-3, 0)$ ,



∴  $P(x, 2x+5)$ ,

∴  $S_{\triangle OPA} = 6$ ,

∴  $\frac{1}{2} \times 3 \times |2x+5| = 6$ ,

解得:  $x = -\frac{1}{2}$  或  $x = -\frac{9}{2}$ ,

当  $x = -\frac{1}{2}$  时,  $y = 2x+5 = 4$ ,

当  $x = -\frac{9}{2}$  时,  $y = 2x + 5 = -4$ ,

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, 4\right) \text{ 或 } P\left(-\frac{9}{2}, -4\right).$$

21. 【答案】见解析

【分析】方法一：证明四边形  $ACDE$  为矩形，即可得证；方法二：利用是三角形的中位线定理，推出  $DE$  是  $BC$  的中垂线，即可得证.

【详解】证明：（法一） $\because$  点  $D$  是  $AB$  的中点，

$$\therefore AD = BD.$$

$$\therefore DE = CD,$$

$\therefore$  四边形  $ACBE$  是平行四边形.

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore \square ACBE$  是矩形.

$$\therefore AB = CE.$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}CE,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB.$$

（法二） $\because$  点  $D$  是  $AB$  的中点，

$$\therefore AD = BD.$$

$\because$  点  $E$  是  $BC$  的中点，

$$\therefore CE = BE.$$

$$\therefore DE \parallel AC.$$

$$\therefore \angle DEB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ.$$

$\therefore DE$  是  $BC$  的垂直平分线.

$$\therefore CD = DB.$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB.$$

【点睛】本题考查矩形的判定和性质，三角形的中位线定理以及中垂线的判定和性质. 解题的关键是熟练掌握相关判定和性质.

22. 【答案】(1) 见详解；(2)  $DE = 2\sqrt{3}$

【分析】(1) 由题意易得  $BO \perp AC, AO = OC$ ，然后根据菱形的判定条件可进行求证；

(2) 由 (1) 可得  $\angle BAO = 30^\circ$ , 则有  $OB = 1, OA = \sqrt{3}$ , 然后易证四边形  $ACED$  是平行四边形, 进而问题可求解.

**【详解】**(1) 证明:  $\because AB = BC, BO$  平分  $\angle ABC$ ,

$\therefore BO \perp AC, AO = OC$ ,

$\because OD = BO$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\because BD \perp AC$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形;

(2) 由 (1) 可得四边形  $ABCD$  是菱形,

$\therefore AD \parallel CE$ ,

$\because \angle BAD = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$ ,

$\because AB = 2$ ,

$\therefore OB = \frac{1}{2} AB = 1$ ,

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3}$ ,

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$ ,

$\because DE \perp BD, BD \perp AC$ ,

$\therefore AC \parallel DE$ ,

$\therefore$  四边形  $ACED$  是平行四边形,

$\therefore DE = AC = 2\sqrt{3}$ .

**【点睛】** 本题主要考查菱形的性质与判定、平行四边形的性质与判定及勾股定理, 熟练掌握菱形的性质与判定、平行四边形的性质与判定及勾股定理是解题的关键.

23. **【答案】**(1)  $y = \frac{1}{2}x + 1$

(2)  $n \geq 2$

**【分析】** 本题考查了一次函数图像与几何变换, 一次函数与系数的关系, 数形结合是解题的关键.

(1) 先根据一次函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的图象经过点  $(-4, -1)$ ,  $(2, 2)$ , 利用待定系数法即可求得一次函数的解析式;

(2) 根据点  $(-2, 0)$  结合图象即可求得.

**【小问 1 详解】**

解:  $\because$  一次函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的图象经过点  $(-4, -1)$ ,  $(2, 2)$ .

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = -1 \\ 2k + b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

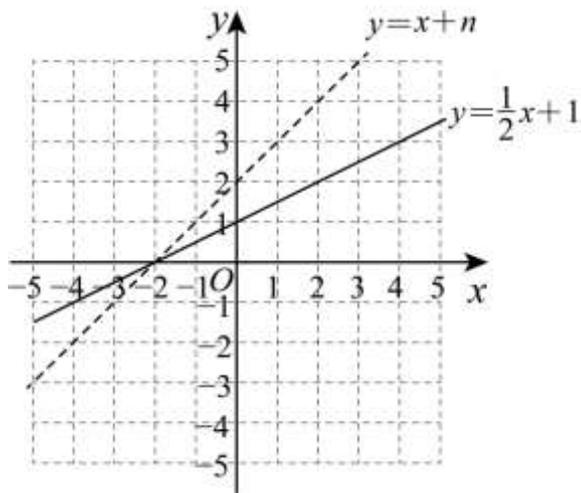
$\therefore$  一次函数为  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ,

【小问 2 详解】

将  $x = -2$  代入  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , 得  $y = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 = 0$

即直线  $y = \frac{1}{2}x + 1$  过点  $(-2, 0)$

把点  $(-2, 0)$  代入  $y = x + n$ , 可得  $n = 2$



$\therefore$  当  $x > -2$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y = x + n$  的值大于函数  $y = \frac{1}{2}x + 1$  的值,

$\therefore n \geq 2$ .

24. 【答案】(1) 见解析 (2)  $90^\circ - \alpha$ ,  $45^\circ$

(3)  $EC = (\sqrt{2} + 1)AE$ , 理由见解析

【分析】(1) 根据题意补全图形即可;

(2) 首先根据题意得到  $BP$  垂直平分  $AE$ , 然后利用等边对等角和三角形内角和定理求解即可;

(3) 过点  $E$  作  $EM \perp BC$  交  $CB$  的延长线于点  $M$ , 首先得到  $\triangle EHG$  是等腰直角三角形, 然后设

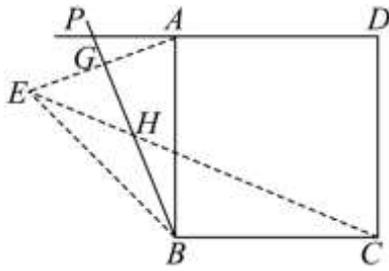
$EG = HG = AG = a$ , 则  $EH = \sqrt{2}a$ ,  $AE = 2a$ , 根据勾股定理表示出

$BC = BE = \sqrt{EG^2 + BG^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$ , 然后证明出  $\triangle EMB$  是等腰直角三角形, 利用勾股定理得到

$EC = \sqrt{ME^2 + MC^2} = (2\sqrt{2} + 2)a$ , 进而求解即可.

【小问 1 详解】

如图所示，



【小问 2 详解】

$\because$  点  $A$  关于直线  $BP$  的对称点为  $E$ ,

$\therefore BP$  垂直平分  $AE$

$\therefore BE = AB, AE \perp BP$

$\therefore \angle AEB = \angle BAE = 90^\circ - \alpha$ ;

$\therefore \angle EBG = \angle ABP = \alpha$

$\therefore \angle EBC = \angle EBP + \angle ABP + \angle ABC = 2\alpha + 90^\circ$

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形

$\therefore AB = BC$

$\because BE = AB$

$\therefore BE = BC$

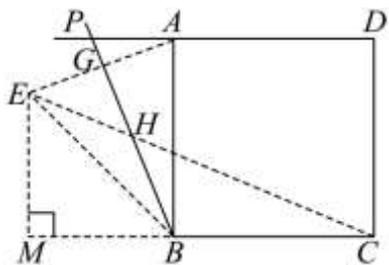
$\therefore \angle BEC = \angle BCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EBC) = 45^\circ - \alpha$

$\therefore \angle AEC = \angle AEB - \angle BEC = 45^\circ$ ;

故答案为:  $90^\circ - \alpha, 45$ ;

【小问 3 详解】

如图所示，过点  $E$  作  $EM \perp BC$  交  $CB$  的延长线于点  $M$ ,



$\because \angle AEH = 45^\circ, \angle EGH = 45^\circ$

$\therefore \angle EHG = 45^\circ$

$\therefore \triangle EHG$  是等腰直角三角形

$\therefore$  设  $EG = HG = AG = a$ , 则  $EH = \sqrt{2}a, AE = 2a$

$\therefore EH = BH = \sqrt{2}a$

$\therefore GB = GH + BH = a + \sqrt{2}a$

$\therefore BE = \sqrt{EG^2 + BG^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$

$$\therefore BC = BE = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$$

$$\therefore \angle EHG = 45^\circ, EH = BH$$

$$\therefore \angle HBE = \angle HEB = \frac{1}{2}\angle EHG = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle ABG = \angle EBG = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = 45^\circ$$

$$\therefore \angle MBE = 45^\circ$$

$$\therefore EM \perp BC$$

$$\therefore \angle MEB = 45^\circ$$

$\therefore \triangle EMB$  是等腰直角三角形

$$\therefore EM = BM = \frac{\sqrt{2}}{2}BE = \sqrt{2 + \sqrt{2}}a$$

$$\therefore MC = BM + BC = \sqrt{2 + \sqrt{2}}a + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$$

$$\therefore EC = \sqrt{ME^2 + MC^2} = (2\sqrt{2} + 2)a$$

$$\therefore AE = 2a$$

$$\therefore \frac{EC}{AE} = \frac{(2\sqrt{2} + 2)a}{2a} = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore EC = (\sqrt{2} + 1)AE.$$

**【点睛】** 此题考查了正方形的性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质和判定等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

#### 四、附加题（共 10 分）

25. **【答案】**  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ; (1) 5; (2) 最小值为  $4\sqrt{2}$ ,  $P(3,0)$

**【分析】** 本题考查的是新定义运算的含义，勾股定理的应用，轴对称的性质，利用待定系数法求解一次函数的解析式，理解题意是关键.

(1) 直接利用两点之间的距离公式计算即可;

(2) 如图，作  $A(0,3)$  关于  $x$  轴的对称点  $A'(0,-3)$ ，连接  $A'B$  交  $x$  轴于  $P$ ，

$PA + PB = PA' + PB = A'B$ ，此时  $PA + PB$  最小，再利用两点之间的距离公式计算即可；求解  $A'B$  为  $y = x - 3$ ，可得  $P(3,0)$ .

**【详解】** 解：  $\because AB^2 = AQ^2 + BQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

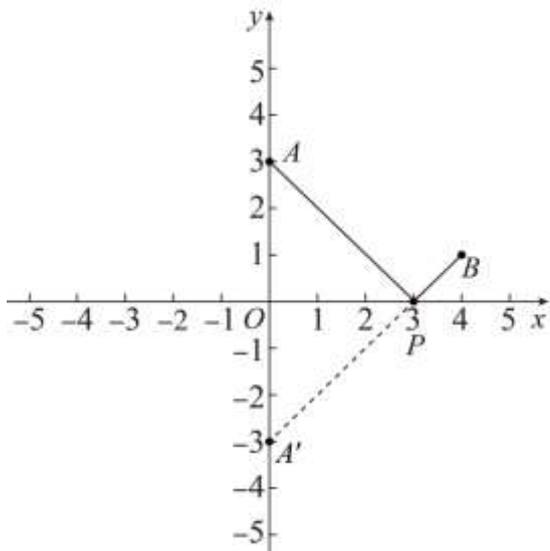
故答案为:  $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ;

(1) 点  $A(1,-3)$ ,  $B(-2,1)$  之间的距离为:  $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ;

故答案为: 5;

(2) 如图, 作  $A(0,3)$  关于  $x$  轴的对称点  $A'(0,-3)$ , 连接  $A'B$  交  $x$  轴于  $P$ ,

$\therefore PA+PB = PA'+PB = A'B$ , 此时  $PA+PB$  最小,



最小值为  $A'B = \sqrt{(4-0)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ,

设  $A'B$  为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} b = -3 \\ 4k + b = 1 \end{cases}$$

解得:  $\begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ ,

$\therefore A'B$  为  $y = x - 3$ ,

当  $y = 0$ , 则  $x = 3$ ,

$\therefore P(3,0)$ .

26. 【答案】(1) ①  $F, G$  ②  $N(0,4)$  或  $(4,0)$

(2)  $-\sqrt{5}-1 \leq a \leq \sqrt{5}-1$ , 且  $a \neq -1, 1$

【分析】(1) ①根据“关联菱形”的定义即可求解;

②设  $PM$  的中点为  $H$ , 则  $H(2,2)$ , 由①可知点  $M, N$  在直线  $y = -x + 4$  上, 由菱形的性质可得

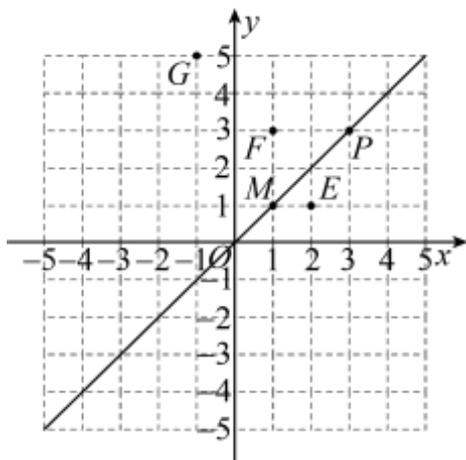
$S_{\triangle MHN} = \frac{1}{4} S_{\text{菱形}MNPQ} = \frac{1}{2} MH \cdot HN = 2$ , 进而求出  $HN$  的长, 设  $N(t, -t+4)$ , 最后利用两点间距离公式建立方

程求解即可;

(2) 由题意可得  $A(\frac{b}{2}, 0)$ ,  $B(0, b)$ , 于是得到  $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}|b| \leq 5$ , 求得  $-2\sqrt{5} \leq b \leq 2\sqrt{5}$ , 设点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + c$  上, 要使“关联菱形”存在, 则点  $A$  不在直线  $y = -x + 4$  和  $y = x$  上, 以此可得,  $b \neq 0, 4$ , 设  $PM$  的中点为  $Q$ , 则  $Q(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ , 求得点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + a + 1$  上, 再将点  $A(\frac{b}{2}, 0)$  代入得到  $a = \frac{b}{2} - 1$ , 以此即可得  $a$  的取值范围.

**【小问 1 详解】**

①如图,



$\therefore M(1,1), P(3,3)$ .

$\therefore PM$  中点的坐标为  $(2,2)$ ,

由菱形的对角线互相垂直平分可知, 能够成为点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + k$  上, 且过点  $(2,2)$ ,

$$\therefore 2 = -2 + k,$$

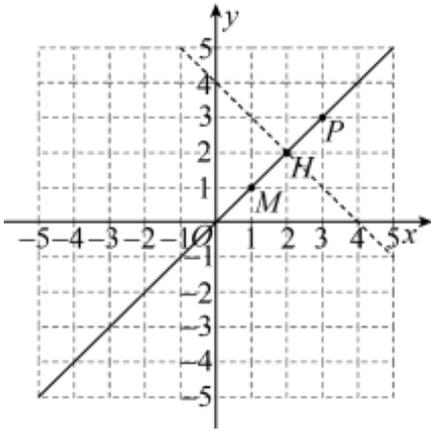
解得:  $k = 4$ ,

$\therefore$  能够成为点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + 4$  上,

故满足该条件点为  $F, G$ ;

故答案为:  $F, G$ ;

②如图, 设  $PM$  的中点为  $H$ , 则  $H(2,2)$ ,



$$\therefore MH = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2},$$

结合①可知，点  $M$ ， $N$  在直线  $y = -x + 4$  上，

$\therefore$  点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”  $MNPQ$  的面积为 8，

$$\therefore S_{\triangle MHN} = \frac{1}{4} S_{\text{菱形}MNPQ} = \frac{1}{2} MH \cdot HN = 2, \text{ 即 } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot HN = 2,$$

$$\therefore HN = 2\sqrt{2},$$

设  $N(t, -t + 4)$ ,

$$\therefore HN^2 = (t-2)^2 + (-t+4-2)^2 = (2\sqrt{2})^2,$$

解得：  $t_1 = 0$ ，  $t_2 = 4$ ，

$\therefore N(0, 4)$  或  $(4, 0)$ ；

**【小问 2 详解】**

$\therefore$  直线  $y = -2x + b$  与  $x$  轴交于点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $B$ ，

$\therefore A(\frac{b}{2}, 0)$ ，  $B(0, b)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(\frac{b}{2}-0)^2 + (0-b)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} |b|,$$

$\therefore AB \leq 5$ ，

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2} |b| \leq 5,$$

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq b \leq 2\sqrt{5},$$

设点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + c$  上，

当直线过点  $M(1, 1)$  时，则  $y = -x + 2$ ，

$\therefore$  点  $A(\frac{b}{2}, 0)$  是点  $M$ ， $P$  的“关联菱形”的顶点，

$$\therefore 0 = -\frac{b}{2} + 2,$$

解得：  $b = 4$ ，此时无法构成菱形，

当  $b=0$  时,  $A(0,0)$  在直线  $y=x$  上, 此时也无法构成菱形,

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq b \leq 2\sqrt{5}, \text{ 且 } b \neq 0, 4,$$

设  $PM$  的中点为  $Q$ , 则  $Q(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ ,

$$\text{则 } \frac{a+1}{2} = -\frac{a+1}{2} + c,$$

解得:  $c = a+1$ ,

$\therefore$  点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点在直线  $y = -x + a + 1$  上,

$\therefore$  点  $A(\frac{b}{2}, 0)$  是点  $M, P$  的“关联菱形”的顶点,

$$\therefore \frac{b}{2} = a+1,$$

$$\therefore a = \frac{b}{2} - 1,$$

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq b \leq 2\sqrt{5}, \text{ 且 } b \neq 0, 4,$$

$$\therefore -\sqrt{5} - 1 \leq a \leq \sqrt{5} - 1, \text{ 且 } a \neq -1, 1.$$

**【点睛】** 本题主要考查函数中的新定义问题、菱形的性质、两点间的距离公式、两直线垂直在函数中的应用, 熟练掌握菱形的性质, 利用菱形的对角线互相垂直平分正确设出“关联菱形”的顶点所在直线的解析式是解题关键.