2024 北京八十中初二（下）期中

数　学

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 以下列各组数为边长，不能构成直角三角形的是（　）

A. 5，12，13　　B. 1，2，$\sqrt{5}$　　C. 1，$\sqrt{3}$，2　　D. 4，5，6

2. 下列二次根式为最简二次根式的是（　）

A. $\sqrt{12}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{a^2+1}$　　D. $\sqrt{3x^2}$

3. 矩形、正方形、菱形都具有的性质是（　）

A. 对角线互相垂直　　B. 对角线互相平分

C. 对角线长度相等　　D. 一组对角线平分一组对角

4. 下列说法正确的是（　）

A. $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{30}$ 可以合并　　B. $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{45}$ 可以合并

C. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{24}$ 可以合并　　D. $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{28}$ 可以合并

5. 下列命题的逆命题不成立的是(　　)

A. 如果两个数互为相反数，那么它们的和等于 0

B. 如果两个角相等，那么这两个角的补角也相等

C. 如果两个数相等，那么它们的平方相等

D. 如果|a|＝|b|，那么 a＝b

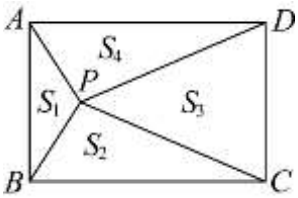
6. 下列计算正确的是（　）

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$　　C. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{10}\div\sqrt{5}=2$

7. 已知四边形 ABCD 是平行四边形，再从①AB=BC，②∠ABC=90°，③AC=BD，④AC⊥BD 四个条件中，选两个作为补充条件后，使得四边形 ABCD 是正方形，现有下列四种选法，其中错误的是（　　）

A. 选①②　　B. 选②③　　C. 选①③　　D. 选②④

8. 如图，P 是矩形 $ABCD$ 内的任意一点，连接 PA, PB, PC, PD，得到 $\triangle PAB$，$\triangle$PBC，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$，设它们的面积分别是 S_1, S_2, S_3, S_4．给出以下结论：①$S_1+S_4=S_2+S_3$；②$S_2+S_4=S_1+S_3$；③若 S_3=2S_1，则 S_4=2S_2；④若 $S_1=S_2$，则 P 点在矩形的对角线上其中正确结论的序号是（　）



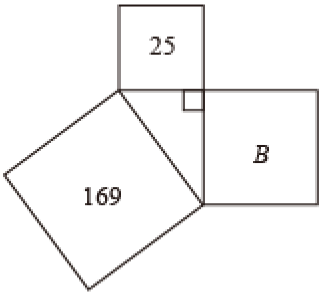
A. ①④　　B. ②④

C. ②③④　　　　　　　　　　　　　　　　D. 以上选项均不对

二、填空题（本题共 24 分，每题 3 分）

9. 若 $|x-3|+\sqrt{y+1}=0$，则 $x-y=$______.

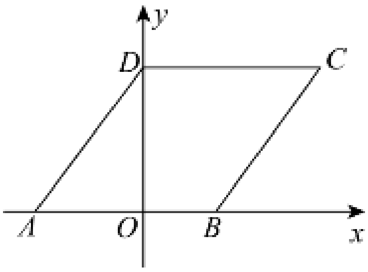
10. 如图，字母 B 所代表的正方形的面积是______.



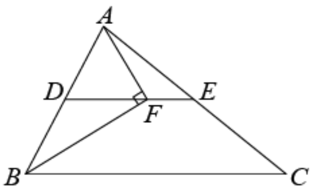
11. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，若 $a=\sqrt{6}$，$\angle A=45^\circ$，则 c 边长为_____.

12. 比较大小 $3\sqrt{7}$ ______ $4\sqrt{6}$.

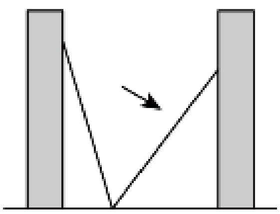
13. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，若菱形 $ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别为（﹣3，0)，(2，0)，点 D 在 y 轴上，则点 C 的坐标是_______.



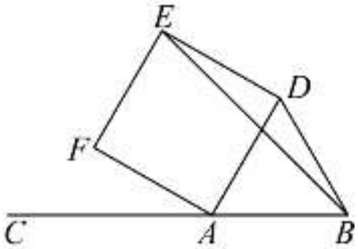
14. 如图，DE 为△ABC 的中位线，点 F 在 DE 上，且∠AFB＝90°，若 AB＝5，BC＝8，则 EF 的长为______.



15. 如图，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙角的距离为 0.7 米，顶端距离地面 2.4 米．如果保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面 2 米，则小巷的宽度为______米.



16. 如图：点 A 在线段 BC 上，$AB=4$，$AC=6$，$\triangle DAB$ 是等边三角形，四边形 $ADEF$ 是正方形，点 P 是 BE 上一个动点，连接 PA, PC 则 $PA+PC$ 的最小值为______.



三、解答题（本题共52分，第17、21、22、24题，每小题6分，第18题，3分，第19题，4分，第20题，5分，第23、25题，每题8分）

17. 计算：

（1）$2\sqrt{12}+\sqrt{27}-3\sqrt{48}$；

（2）$\left(\sqrt{18}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$.

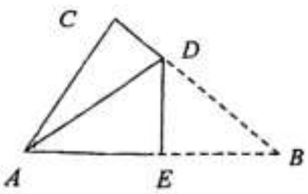
18. 若$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+2024$，求$x+y$的值.

19. 设直角三角形的两条直角边长分别为a和b，斜边长为c

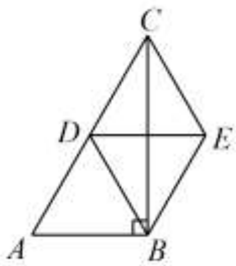
（1）已知$a=12$，$b=5$，求c;

（2）已知$c=10$，$b=9$，求a.

20. 如图是一张直角三角形纸片，直角边$AC=6$，斜边$AB=10$，现将$\triangle ABC$折叠，使点B与点A重合，折痕为DE，求线段AD的长.



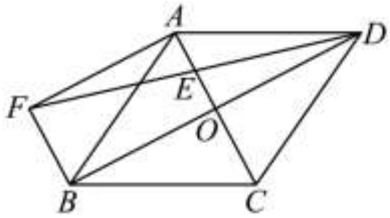
21. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，点D为AC的中点，连接DB，过点C作$CE\parallel DB$，且$CE=DB$，连接BE，DE.



（1）求证：四边形$BECD$是菱形;

（2）连接AE，当$\angle ACB=30°$，$AB=2$时，求AE的长.

22. 如图，平行四边形$ABCD$的对角线AC，BD交于点O，E为OA的中点．连接DE并延长至点F，使得$EF=DE$．连接AF，BF.



（1）求证：四边形 $AFBO$ 为平行四边形；

（2）若 $\angle BDA=\angle BDC$，求证：四边形 $AFBO$ 为矩形.

23. 小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$，善于思考的小明进行了以下的探索：

设 $a+b\sqrt{2}=\left(m+n\sqrt{2}\right)^2$（其中 a,b,m,n 均为正整数），

则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，

$\therefore a=m^2+2n^2$，$b=2mn$.

这样小明就找到了一种把部分 $a+b\sqrt{2}$ 化为平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

（1）当 a,b,m,n 均为正整数时，若 $a+b\sqrt{3}=\left(m+n\sqrt{3}\right)^2$，用含 m,n 的式子分别表示 a,b，得 $a=$ ______，$b=$ ______；

（2）利用所探索的结论，找一组正整数 a,b,m,n 填空：______ + ______ $\sqrt{3}=\left(\text{\_\_\_\_\_\_}+\text{\_\_\_\_\_\_}\sqrt{3}\right)^2$；

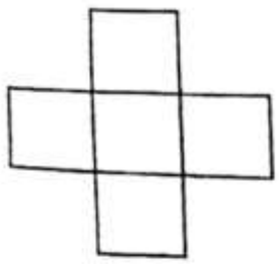
（3）若 $a+4\sqrt{5}=\left(m+n\sqrt{5}\right)^2$，且 a,m,n 均为正整数，求 a 的值.

24. 阅读下列材料：

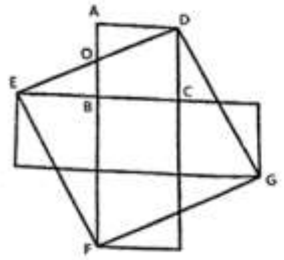
小明遇到了一个问题：5 个同样大小的正方形纸片排列形式如图 1 所示，将它们分割后拼接成一个新的正方形.

他的做法是：按照图 2 所示的方法分割后，将三角形纸片 ADO 绕 AB 的中点 O 旋转至三角形纸片 BEO 处，依此法继续操作，即可拼接成一个新的正方形 $DEFG$.

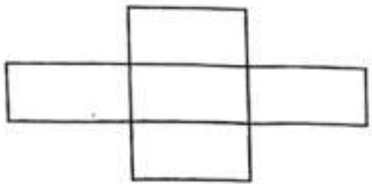
请你参考小明的做法解决下列问题：



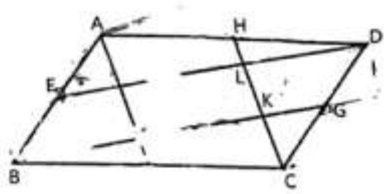
（图1）



（图2）



（图3）

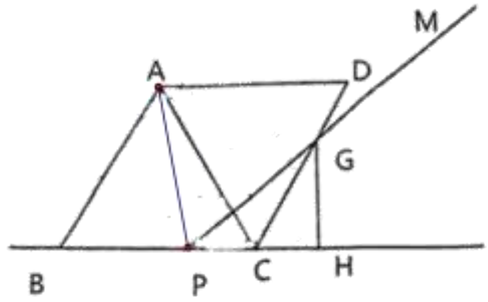


（图4）

（1）现有 5 个形状、大小相同的矩形纸片，排列形式如图 3 所示．请将其分割后拼接成一个平行四边形．要求：在图 3 中画出并指明拼接成的平行四边形（画出一个符合条件的平行四边形即可）．

（2）如图 4，在面积为 $\sqrt{2}$ 的平行四边形 $ABCD$ 中，点 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点，分别连接 AF,BG,CH,DE 得到一个新的平行四边形 $IJKL$．请在图 4 中探究平行四边形 $IJKL$ 面积的大小（画图并直接写出结果）．

25. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，动点 P 在直线 BC 上运动，作 $\angle APM=60°$，且直线 PM 与直线 CD 相交于点 G，G 点到直线 BC 的距离为 GH．



（1）证明：$\angle BAP=\angle GPC$；

（2）若 P 在线段 BC 上运动，求证：$CP=DG$；

（3）若 P 在线段 BC 上运动，探求线段 AC,CP,CH 的一个数量关系，并证明你的结论．

参考答案

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 【答案】D

【分析】根据勾股定理的逆定理逐项分析解题即可．

【详解】解：A.$\because 5^2+12^2=169, 13^2=169$

$\therefore 5^2+12^2=13^2$

$\therefore$5，12，13 能构成直角三角形，

故 A 不符合题意；

B. $\because 1^2+2^2=5, (\sqrt{5})^2=5$

$\therefore 1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$

$\therefore$1，2，$\sqrt{5}$ 能构成直角三角形，

故 B 不符合题意；

C. $\because 1^2+(\sqrt{3})^2=4, 2^2=4$

$\therefore 1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$

1，$\sqrt{3}$，2 能构成直角三角形，

故 C 不符合题意；

D. $\because 4^2+5^2=41, 6^2=36$，$41\neq 36$

$\therefore$4，5，6 不能构成直角三角形，

故 D 符合题意，

故选：D．

【点睛】本题考查勾股定理的逆定理，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键．

2. 【答案】C

【分析】直接利用最简二次根式需要满足的两个条件逐项分析即可．

【详解】解：A、$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}$，含有开得尽方的因数，故不是最简二次根式，不符合题意；

B、$\dfrac{1}{3}$ 是分数，故不是最简二次根式，不符合题意；

C、$\sqrt{a^2+1}$ 不能开方，因式是整式，故是最简二次根式，符合题意；

D、$\sqrt{3x^2}$，含有开得尽方的因式，故不是最简二次根式，不符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查最简二次根式的判定条件：①被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；②被开方数的因数是整数，因式是整式．

3. 【答案】B

【分析】本题主要考查了矩形，菱形，正方形的性质，熟知矩形，菱形，正方形的性质是解题的关键．

【详解】解：A、只有正方形和菱形的对角线垂直，矩形的对角线不一定垂直，不符合题意；

B、矩形、正方形、菱形的对角线都互相平分，符合题意；

C、只有矩形和正方形的对角线长度相等，菱形的对角线长度不一定相等，不符合题意；

D、只有正方形和菱形的对角线平分一组对角，矩形的对角线不一定平分一组对角，不符合题意；

故选；B．

4. 【答案】B

【分析】本题主要考查了二次根式的性质，同类二次根式，根据二次根式的性质逐项判断即可解答．

【详解】解：A. $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{30}$ 不可以合并，故该选项不正确，不符合题意；

B. $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ 可以合并，故该选项正确，符合题意；

C. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 不可以合并，故该选项不正确，不符合题意；

D. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ 不可以合并，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B．

5. 【答案】C

【分析】首先理解逆命题的含义：一般的，在数学中把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题．对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件，那么这两个命题叫做互逆命题，其中一个命题叫做原命题，另外一个命题叫做原命题的逆命题．根据原命题写出各个命题的逆命题，再进一步判断真假．

【详解】A 选项：逆命题是如果两个数的和是 0，那么这两个数互为相反数，本选项正确；

B 选项：逆命题是如果两个角的补角相等，那么这两个角相等，本选项正确；

C 选项：逆命题是如果两个数的平方相等，这两个数相等，我们可以举个例子说明，$(2)^2=(-2)^2$，但 $2\neq-2$，正确的是这两个数也相等或互为相反数，本选项错误；

D 选项：逆命题是如果 a=b,那么|a|＝|b|，本选项正确；

故选 C.

【点睛】本题考查命题与逆命题的意义，关建是要写出逆命题后再判断命题真假,

6. 【答案】C

【分析】本题主要考查二次根式的加减乘除运算．利用二次根式的加减法的法则对 A 项和 B 项进行运算即可，利用二次根式的乘法和除法法则对 C 项和 D 项进行运算即可．

【详解】解：A、$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$，不是同类二次根式，不能合并，故此选项不符合题意；

B、$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}\neq3$，故此选项不符合题意；

C、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，故此选项符合题意；

D、$\sqrt{10}\div\sqrt{5}=\sqrt{2}\neq2$，故此选项不符合题意；

故选：C．

7.【答案】B

【详解】解：A、由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意；

B、由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以不能得出平行四边形 ABCD 是正方形，错误，故本选项符合题意；

C、由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意；

D、由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由④得对角线互相垂直的平行四边形是菱形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意.

故选 B.

8.【答案】B

【分析】本题考查了矩形的性质，根据矩形的对边相等可得 $AB=CD$， $AD=BC$，设点 P 到 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的距离分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4，然后利用三角形的面积公式列式整理即可判断出①②；根据三角形的面积公式即可判断③；根据已知进行变形，求出 $S_1+S_4=S_2+S_3=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$，即可判断④.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=CD$， $AD=BC$，

设点 P 到 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的距离分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4，

$$S_1=\frac{1}{2}ABh_1,S_2=\frac{1}{2}BCh_2,S_3=\frac{1}{2}CDh_3,S_4=\frac{1}{2}ADh_4$$

$$\because \frac{1}{2}ABh_1+\frac{1}{2}CDh_3=\frac{1}{2}AB\cdot BC,\frac{1}{2}BCh_2+\frac{1}{2}ADh_4=\frac{1}{2}AB\times BC,$$

$\therefore S_2+S_4=S_1+S_3$，

不能得出 $S_1+S_2=S_3+S_4$，

故①错误，②正确；

根据 $S_3=2S_1$，能得出 $h_3=2h_1$，不能推出 $h_4=2h_2$，即不能推出 $S_4=2S_2$，故③错误；

$\because S_1=S_2$， $S_2+S_4=S_1+S_3$，

$\therefore S_4=S_3$，

$$\therefore S_1+S_4=S_2+S_3=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$$

$\therefore P$ 点一定在对角线上，故④正确.

故选：B.

二、填空题（本题共 24 分，每题 3 分）

9. 【答案】4

【分析】本题考查了绝对值的非负性，二次根式的非负性，根据题意可得 $x=3, y=-1$，代入代数式，即可求解.

【详解】解：$\because \left|x-3\right|+\sqrt{y+1}=0$，

$\therefore x-3=0$，$y+1=0$，

解得：$x=3, y=-1$，

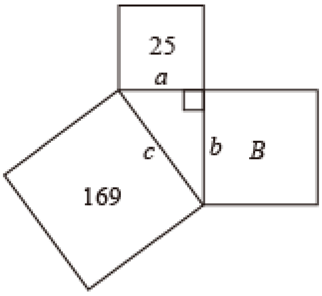
$\therefore x-y=3-\left(-1\right)=4$，

故答案为：4.

10. 【答案】144

【分析】根据勾股定理求出 b^2 的值，即可求出字母 B 所代表的正方形的面积.

【详解】如图所示：



$\because a^2=25$，$c^2=169$，

根据勾股定理得：$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore b^2=c^2-a^2=169-25=144$，

故字母 B 所代表的正方形的面积是 144，

故答案为 144.

【点睛】本题考查了勾股定理，最快的方法就是直接 $169-25$，也可以将 a，b，c 的长度全部求出来，解题的关键是正确使用勾股定理.

11. 【答案】$2\sqrt{3}$.

【分析】根据题意画出图形，由 $\angle A=45°$ 可知 Rt△ABC 为等腰直角三角形，根据勾股定理即可求 c 的值.

【详解】解：Rt△ABC 中，$\because \angle C=90°$，$a=\sqrt{6}$，$\angle A=45°$，

$\therefore a=b=\sqrt{6}$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$.

故答案为 $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了勾股定理，熟记公式即可.

12. 【答案】<

【分析】本题考查了实数的大小比较，二次根式的性质，根据 $3\sqrt{7}=\sqrt{63}, 4\sqrt{6}=\sqrt{96}$，即可求解.

【详解】解：$\because 3\sqrt{7}=\sqrt{63}, 4\sqrt{6}=\sqrt{96}$， $63<96$

$\therefore 3\sqrt{7}<4\sqrt{6}$

故答案为：<．

13. 【答案】（5，4）

【分析】利用菱形的性质以及勾股定理得出DO的长，进而求出C点坐标．

【详解】解：∵菱形ABCD的顶点A，B的坐标分别为（－3，0），（2，0），点D在y轴上，

∴AB=5，

∴DO=4，

∴点C的坐标是：（5，4）．

故答案为：（5，4）．

14. 【答案】1.5

【详解】解：∵$\angle AFB$=90°，D为AB的中点，

∴$DF=\frac{1}{2}AB$=2.5．

∵DE为$\triangle ABC$的中位线，

∴$DE=\frac{1}{2}BC$=4．

∴$EF=DE-DF$=1.5．

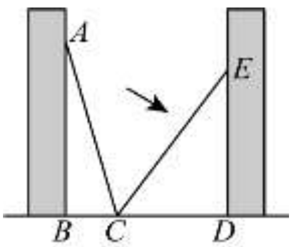
故答案为1.5．

【点睛】直角三角形斜边上的中线性质：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，和三角形的中位线性质：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半．

15. 【答案】$2.2\#\#2\frac{1}{5}\#\#\frac{11}{5}$

【分析】本题考查勾股定理，将图形进行标注，利用勾股定理算出AC，再利用勾股定理算出CD，根据$BD=BC+CD$计算求解，即可解题．

【详解】解：根据上图，进行如下标注：



由题知，$AB=2.4\text{m}$，$BC=0.7\text{m}$，$DE=2\text{m}$，$\angle ABC=90°$，$\angle EDC=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2.4^2+0.7^2}=2.5\text{m}$，

∵梯子长度不变，

$\therefore EC=AC=2.5\text{m}$，

$\therefore CD=\sqrt{EC^2-DE^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5\text{m}$，

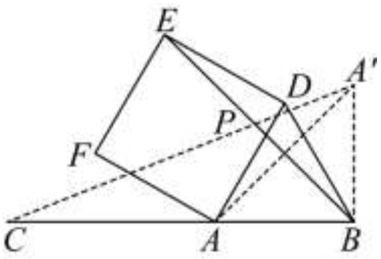
$\therefore BD = BC + CD = 0.7 + 1.5 = 2.2\text{m}$，

故答案为：2.2．

16. 【答案】$2\sqrt{29}$

【分析】本题考查轴对称求最短距离，正方形的性质，等边三角形的性质，勾股定理；作 A 点关于 BE 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与 BE 交点为 P，则 $PA + PC = BC'$ 求得 $\angle EBD = 15°$，进而得出 $\angle EBC = 45°$，在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中，勾股定理即可求解.

【详解】解：作 A 点关于 BE 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与 BE 交点为 P，



$\therefore PA = PA'$

$\therefore PA + PC = PA' + PC \geq CA'$，

$\because \triangle DAB$ 是等边三角形，四边形 $ADEF$ 是正方形，

$\therefore BD = AD = DE$，$\angle BDE = \angle BDC + \angle ADE = 150°$，$\angle DBC = 60°$，

$\therefore \angle EBD = 15°$，

$\therefore \angle EBC = 45°$，

由轴对称的性质可得 $\angle A'BE = \angle EBC = 45°$，

$\therefore \angle A'BC = 90°$，

$\therefore AB = A'B = 4$，

在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中，$BC = AB + AC = 4 + 6 = 10$，$A'B = 4$

$\therefore A'C = \sqrt{A'B^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$，

$\therefore PA + PC$ 的最小值为 $2\sqrt{29}$，

故答案为：$2\sqrt{29}$．

三、解答题（本题共 52 分，第 17、21、22、24 题，每小题 6 分，第 18 题，3 分，第 19 题，4 分，第 20 题，5 分，第 23、25 题，每题 8 分）

17. 【答案】（1）$-5\sqrt{3}$

（2）$4 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【分析】本题考查了二次根式的混合运算；

（1）根据二次根式的加减运算法则进行计算即可求解；

（2）根据二次根式的混合运算法则进行计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：$2\sqrt{12}+\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$=-5\sqrt{3}$；

【小问 2 详解】

解：$\left(\sqrt{18}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

$=\left(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\div\sqrt{2}+\left(2-1\right)$

$=3-\frac{\sqrt{6}}{3}+1$

$=4-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18. 【答案】2025

【分析】首先根据二次根式有意义的条件可以确定 x 的值，进而求出 y 的值，再将 x、y 的值代入要求的式子即可.

【详解】解：由题意得：$x-1\geq 0$，$1-x\geq 0$，

$\therefore 1-x=0$，$x=1$，

$\therefore y=2024$，

$\therefore x+y=1+2024=2025$.

19. 【答案】（1）13　（2）$\sqrt{19}$

【分析】（1）根据 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 即可得出结论；

（2）根据 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ 即可得出结论.

【小问 1 详解】

$\because$ 直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c，a=12，b=5，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$；

【小问 2 详解】

$\because$ 直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c，c=10，b=9，

$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$

【点睛】本题考查的是勾股定理，熟知在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方是解答此题的关键.

20. 【答案】$\frac{25}{4}$

【分析】此题主要考查勾股定理的应用，折叠的性质，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中勾股定理求得 $BC=8$，进而由翻折

得 $DB=AD$，利用直角三角形 ACD，勾股定理即可求得 CD 长.

【详解】解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$AB=10$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$

由题意得 $DB=AD$；

设 $CD=x$，则 $AD=DB=(8-x)$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$AD^2-CD^2=AC^2$，即 $(8-x)^2-x^2=36$，

解得 $x=\frac{7}{4}$；

即 $CD=\frac{7}{4}$.

$\therefore AD=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$

21.【答案】（1）证明见解析；

（2）$2\sqrt{3}$

【分析】（1）先证明四边形 $BECD$ 是平行四边形，再利用直角三角形斜边中线等于斜边一半，得到 $BD=CD$，即可证明四边形 $BECD$ 是菱形；

（2）根据菱形的性质，证明四边形 $ADEB$ 是平行四边形，再根据 30 度角所对的直角边等于斜边一半，推出 $AD=AB$，进而证明四边形 $ADEB$ 是菱形，然后利用勾股定理，求得 OA 的长，即可求出 AE 的长.

【小问 1 详解】

证明：$\because CE\parallel DB$，$CE=DB$，

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形，

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，点 D 为 AC 的中点，

$\therefore BD=AD=CD=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：$\because$ 四边形 $BECD$ 是菱形，

$\therefore CD\parallel BE$，$BC\perp DE$，

$\therefore AD\parallel BE$，

$\because AB\perp BC$，

$\therefore DE\parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $ADEB$ 是平行四边形，

$\because \angle ACB=30°$，$AB=2$，

$\therefore AC=4$，

$\therefore AD=BD=\frac{1}{2}AC=2$，

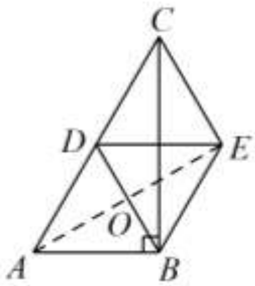
$\therefore AD=AB$，

$\therefore$四边形 $ADEB$ 是菱形，

$\therefore AE\perp BD$，$OB=\frac{1}{2}BD=1$，$OA=\frac{1}{2}AE$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore AE=2OA=2\sqrt{3}$．



【点睛】本题考查了菱形的判定和性质，直角三角形的特征，勾股定理等知识，熟练掌握菱形的判定和性质是解题关键．

22.【答案】（1）见解析　（2）见解析

【分析】（1）证明 OE 为 $\triangle DFB$ 的中位线，则 $OE\,/\!/\,FB$，且 $OE=\frac{1}{2}BF$，又 $OE=\frac{1}{2}AO$，则 $OA=BF, OA\,/\!/\,BF$，即可得证；

（2）根据平行四边形的性质得出 $AD\,/\!/\,BC$，则 $\angle ADB=\angle DBC$，根据已知的 $\angle CBD=\angle CDB$，可得 $CB=CD$，则四边形 $ABCD$ 是菱形，可得 $\angle BOA=90°$，结合（1）的结论，即可得证．

【小问1详解】

证明：$\because$平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，

$\therefore BO=DO$，

又 $EF=DE$，

$\therefore OE$ 为 $\triangle DFB$ 的中位线，

$\therefore OE\,/\!/\,FB$，且 $OE=\frac{1}{2}BF$，

又 E 为 OA 的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}AO$，

$\therefore OA=BF, OA\,/\!/\,BF$，

$\therefore$四边形 $AFBO$ 为平行四边形；

【小问2详解】

$\because$平行四边形 $ABCD$，

$\therefore AD // BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle DBC$，

$\because \angle BDA=\angle BDC$，

$\therefore \angle CBD=\angle CDB$，

$\therefore CB=CD$，

∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，

$\therefore \angle BOA=90^{\circ}$，

∴平行四边形 $AFBO$ 是矩形.

【点睛】本题考查了中位线的性质与判定，平行四边形的性质，菱形的性质与判定，矩形的判定，熟练掌握特殊四边形的判定定理是解题的关键.

23. 【答案】（1） $m^2+3n^2,2mn$

（2）13， 4， 1， 2 （答案不唯一）

（3） 21或9

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，完全平方公式，

（1）根据上面的例子，将 $\left(m+n\sqrt{3}\right)^2$，按完全平方展开，可得出答案；

（2）由（1）可写出一组答案，不唯一；

（3）将 $\left(m+n\sqrt{5}\right)^2$ 展开得出 $m^2+5n^2+2mn\sqrt{5}$，由题意得 $mn=2$， $m^2+3n^2=a$，再由 a、m、n 均为正整数，可得出答案.

【小问 1 详解】

解：$\because a+b\sqrt{3}=\left(m+n\sqrt{3}\right)^2$，

$\therefore a+b\sqrt{3}=m^2+3n^2+2mn\sqrt{3}$，

$\therefore a=m^2+3n^2$， $b=2mn$；

故答案为： m^2+3n^2， $2mn$.

【小问 2 详解】

设 $a+b\sqrt{3}=\left(m+n\sqrt{3}\right)^2$，

$\because \left(m+n\sqrt{3}\right)^2=m^2+3n^2+2mn\sqrt{3}$，

$\therefore 2mn=b$， $a=m^2+3n^2$，

取 $m=1$， $n=2$，则 $b=4$， $a=1+12=13$，

故答案为：13， 4， 1， 2 .

【小问 3 详解】

解：$\because a+4\sqrt{5}=\left(m+n\sqrt{5}\right)^2$，

$\therefore a+4\sqrt{5}=m^2+5n^2+2mn\sqrt{5}$，

$\therefore mn=2$，$m^2+5n^2=a$，

$\because a$、m、n 均为正整数，

$\therefore m=1$，$n=2$，$a=21$ 或 $m=2$，$n=1$，$a=9$；

$\therefore a$ 的值为 21 或 9.

24.【答案】（1）画图见解析

（2）画图见解析，平行四边形 $IJKL$ 面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

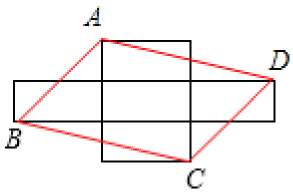
【分析】本题考查了旋转的性质，平行四边形的性质，正方形的性质；

（1）同小明的做法分割和拼接即可.

（2）将平行四边形 $ABCD$ 分割和拼接成 5 个与平行四边形 $IJKL$ 同样的平行四边形，故平行四边形 $IJKL$ 的面积是平行四边形 $ABCD$ 面积的 $\dfrac{1}{5}$.

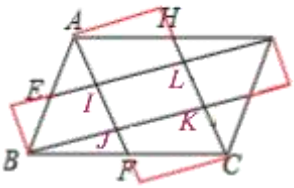
【小问 1 详解】

如图，拼接成的平行四边形为平行四边形 $ABCD$.



【小问 2 详解】

如图，平行四边形 $IJKL$ 面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.



25.【答案】（1）见解析　（2）见解析

（3）$AC=CP+2CH$，理由见解析

【分析】此题考查了等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，菱形的性质，含 $30°$ 角的直角三角形的性质；

（1）根据菱形的性质得到 $\angle ABC=60°$，进而根据三角形的外角的性质，即可得到结论；

（2）过点 P 作 $PE\parallel CD$ 交 AC 于点 E，连接 AG 先证明 $\triangle AEP\cong\triangle GCP$，再证明 $\triangle APG$ 是等边三角形．从而得到 $\triangle APC\cong\triangle AGD$，进而即可得到结论；

（3）根据等边三角形的性质可知 $AC=CD$，结合 $PC=DG$，以及直角三角形的性质即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明：$\because ABCD$ 为菱形，$\angle BAD = 120^\circ$，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$，

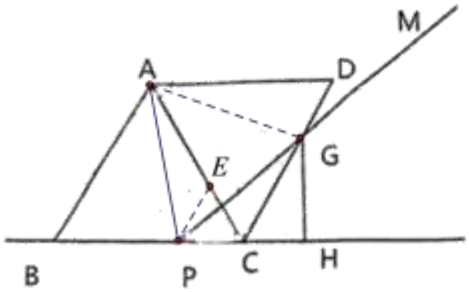
$\because \angle APM = 60^\circ$，

$\therefore \angle APC = \angle APM + \angle GPC = \angle ABP + \angle BAP$，

$\therefore \angle BAP = \angle GPC$；

【小问 2 详解】

过点 P 作 $PE /\!/ CD$ 交 AC 于点 E，连接 AG



$\because ABCD$ 为菱形，$\angle BAD = 120^\circ$，

$\therefore \angle ACB = \angle ACD = 60^\circ$.

$\because PE /\!/ CD$，

$\therefore \angle EPC = \angle ACD = 60^\circ$.

$\therefore \triangle CPE$ 是等边三角形.

$\therefore EP = PC, \angle PEC = 60^\circ$.

$\because \angle AEP = \angle PCG = 120^\circ$，$\angle BAP = \angle GPC$

$\therefore \triangle AEP \cong \triangle GCP$.

$\therefore AP = PG$.

$\because \angle APM = 60^\circ$，

$\therefore \triangle APG$ 是等边三角形.

$\therefore AP = AG$.

$\because \angle PAC + \angle CAG = 60^\circ, \angle CAG + \angle GAD = 60^\circ$，

$\therefore \angle PAC = \angle GAD$.

$\because AC = AD$，

$\therefore \triangle APC \cong \triangle AGD$

$\therefore PC = DG$.

【小问 3 详解】

$AC = CP + 2CH$，理由如下：

$\because AC = CD, CD = CG + DG$，

$\therefore AC = CG + DG$．

$\because PC = DG$，

$\therefore AC = CG + CP$．

$\because \angle GHC = 90^\circ, \angle GCH = 60^\circ$，

$\therefore \angle CGH = 30^\circ$，

$\therefore CG = 2CH$，

$\therefore AC = 2CH + CP$．