

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | a \leq x < 3\}$. 若 $A \subseteq B$, 则 a 的最大值为

- (A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2

(2) 在 $(x - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为

- (A) -10 (B) -40 (C) 10 (D) 40

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0, \\ (\frac{1}{3})^x, & x > 0 \end{cases}$ 是

- (A) 偶函数, 且没有极值点 (B) 偶函数, 且有一个极值点
(C) 奇函数, 且没有极值点 (D) 奇函数, 且有一个极值点

(4) 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 点 A 在抛物线上, $|AF| = 6$. 则线段 AF 的中点的纵坐标为

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 3 (D) 4

(5) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 5$, $\cos C = \frac{3}{4}$, 则 BC 的长为

- (A) 6 或 $\frac{3}{2}$ (B) 6 (C) $3 + 3\sqrt{2}$ (D) 3

(6) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $ab \neq 0$, 且 $a > b$, 则

- (A) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$ (B) $|\frac{b}{a} + \frac{a}{b}| > 2$
(C) $\sin(a - b) < a - b$ (D) $3^a > 2^b$

(7) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $CA = CB = 2\sqrt{2}$, 点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CA} + (1-\lambda) \overrightarrow{CB}$, 且 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$,

则 $\lambda =$

- (A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

(8) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q ($q \neq -1$) 的无穷等比数列, S_n 为其前 n 项和, $a_1 > 0$. 则 “ $q > 0$ ” 是 “ S_n 存在最小值” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 对于函数 $f(x)$ 图象上一点 (x_0, y_0) , 若集合 $\{k \in \mathbf{R} | k(x-x_0) + y_0 \leq f(x), \forall x \in D\}$ 只有 1 个元素, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 P_{x_0} . 下列函数中具有性质 P_1 的是

- (A) $f(x) = |x-1|$ (B) $f(x) = \lg x$
(C) $f(x) = x^3$ (D) $f(x) = -\sin \frac{\pi}{2} x$

(10) 设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零的整数, 其前 n 项和为 S_n . 若 $j-i$ ($i, j \in \mathbf{N}^*$) 为正偶数, 均有 $a_j \geq 2a_i$, 且 $S_2 = 0$, 则 S_{10} 的最小值为

- (A) 0 (B) 22 (C) 26 (D) 31

第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 若 $(x+i)^2 = 2i$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $x =$ _____.

(12) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 则 C 的离心率为 _____; 以 C 的一个焦点为圆心, 且与双曲线 C 的渐近线相切的圆的方程为 _____ (写出一个即可)

(13) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + a \sin x$.

(i) 若 $a = 0$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 _____;

(ii) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的最小值为 -2 , 则实数 $a =$ _____.

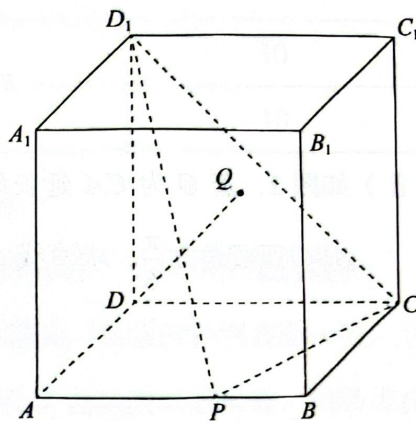
(14) 二维码是一种利用黑、白方块记录数据符号信息的平面图形. 某公司计划使用一款由 n^2 ($n \in \mathbf{N}^*$) 个黑白方块构成的 $n \times n$ 二维码门禁, 现用一款破译器对其进行安全性测试, 已知该破译器每秒能随机生成 2^{16} 个不重复的二维码, 为确保一个 $n \times n$ 二维码在 1 分钟内被破译的概率不高于 $\frac{1}{2^{15}}$, 则 n 的最小值为_____.

(15) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为棱 AB 上的动点, $DQ \perp$ 平面 D_1PC , Q 为垂足.

给出下列四个结论:

- ① $D_1Q = CQ$;
- ② 线段 DQ 的长随线段 AP 的长增大而增大;
- ③ 存在点 P , 使得 $AQ \perp BQ$;
- ④ 存在点 P , 使得 $PQ \parallel$ 平面 D_1DA .

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \omega x$ ($\omega > 0$), 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定.

(I) 求 ω 的值;

(II) 若不等式 $f(x) < 2$ 在区间 $(0, m)$ 内有解, 求 m 的取值范围.

条件①: $f(\frac{\pi}{3}) = 2$;

条件②: $y = f(x)$ 的图象可由 $y = 2\cos 2x$ 的图象平移得到;

条件③: $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 内无极值点, 且 $f(\frac{\pi}{6}) - 2 = f(-\frac{\pi}{3}) + 2$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=PB=2$, M 为 AP 的中点.

(I) 如图 1, 若 N 为棱 PC 上一点, 且 $MN \perp AP$, 求证: 平面 $BMN \perp$ 平面 PAC ;

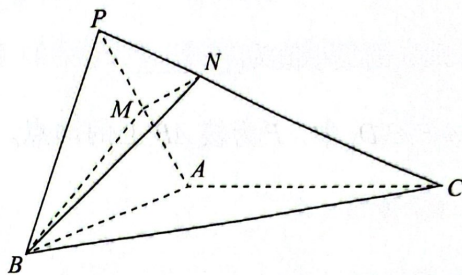


图 1

(II) 如图 2, 若 O 为 CA 延长线上一点, 且 $PO \perp$ 平面 ABC , $AC = \sqrt{2}PA = 2$, 直线 PB 与平面 ABC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 求直线 CM 与平面 PBC 所成角的正弦值.

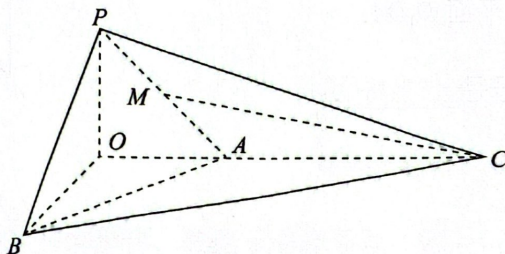


图 2

(18)(本小题 13 分)

图像识别是人工智能领域的一个重要研究方向. 某中学人工智能兴趣小组研发了一套根据人脸照片识别性别的程序. 在对该程序的一轮测试中, 小组同学输入了 200 张不同的人脸照片作为测试样本, 获得数据如下表 (单位: 张):

| 识别结果 真实性别 | 男 | 女 | 无法识别 |
|--------------|----|----|------|
| 男 | 90 | 20 | 10 |
| 女 | 10 | 60 | 10 |

假设用频率估计概率, 且该程序对每张照片的识别都是独立的.

- (I) 从这 200 张照片中随机抽取一张, 已知这张照片的识别结果为女性, 求识别正确的概率;
- (II) 在新一轮测试中, 小组同学对 3 张不同的男性人脸照片依次测试, 每张照片至多测一次, 当首次出现识别正确或 3 张照片全部测试完毕, 则停止测试. 设 X 表示测试的次数, 估计 X 的分布列和数学期望 EX ;
- (III) 为处理无法识别的照片, 该小组同学提出上述程序修改的三个方案:

方案一: 将无法识别的照片全部判定为女性;

方案二: 将无法识别的照片全部判定为男性;

方案三: 将无法识别的照片随机判定为男性或女性 (即判定为男性的概率为 50%, 判定为女性的概率为 50%).

现从若干张不同的人脸照片 (其中男性、女性照片的数量之比为 1:1) 中随机抽取一张, 分别用方案一、方案二、方案三进行识别, 其识别正确的概率估计值分别记为 p_1, p_2, p_3 . 试比较 p_1, p_2, p_3 的大小. (结论不要求证明)

(19)(本小题15分)

已知椭圆 E 的焦点在 x 轴上, 中心在坐标原点. 以 E 的一个顶点和两个焦点为顶点的三角形是等边三角形, 且其周长为 $6\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过点 $M(2, 0)$ 的直线 l (不与坐标轴垂直) 与椭圆 E 交于不同的两点 A, C , 与直线 $x=16$ 交于点 P . 点 B 在 y 轴上, D 为坐标平面内的一点, 四边形 $ABCD$ 是菱形. 求证: 直线 PD 过定点.

(20)(本小题15分)

已知函数 $f(x) = \ln(x-a) + 2\sqrt{3a-x}$ ($a > 0$).

(I) 若 $a=1$,

(i) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(ii) 求证: 函数 $f(x)$ 恰有一个零点;

(II) 若 $f(x) \leq \ln a + 2a$ 对 $x \in (a, 3a)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(21)(本小题15分)

设正整数 $n \geq 2$, $a_i \in \mathbb{N}^*$, $d_i \in \mathbb{N}^*$, $A_i = \{x | x = a_i + (k-1)d_i, k=1, 2, \dots\}$, $i=1, 2, \dots, n$. 若 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{N}^*$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq n$), 则称 A_1, A_2, \dots, A_n 具有性质 P .

(I) 当 $n=3$ 时, 若 A_1, A_2, A_3 具有性质 P , 且 $a_1=1, a_2=2, a_3=3$, 令 $m=d_1 d_2 d_3$, 写出 m 的所有可能值;

(II) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 具有性质 P ,

(i) 求证: $a_i \leq d_i$ ($i=1, 2, \dots, n$);

(ii) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_i}$ 的值.

海淀区 2023—2024 学年第二学期期末练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) C (2) D (3) B (4) C (5) A
(6) C (7) B (8) A (9) D (10) B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) 1 (12) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $(x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 1$ (或 $(x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 1$)
(13) π -2 (14) 7
(15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (共 13 分)

解：选择条件②： $y = f(x)$ 的图象可由 $y = 2\cos 2x$ 的图象平移得到.

(I) 因为 $f(x) = 2\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \omega x$,

$$\text{所以 } f(x) = \cos \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x + 1 = 2\cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) + 1.$$

因为 $y = f(x)$ 的图象可由 $y = 2\cos 2x$ 的图象平移得到,

所以 $y = f(x)$ 的最小正周期为 π .

因为 $\omega > 0$,

所以 $\omega = 2$.

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$.

因为 $x \in (0, m)$,

$$\text{所以 } 2x - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, 2m - \frac{\pi}{3}).$$

因为不等式 $f(x) < 2$ 在区间 $(0, m)$ 内有解, 即 $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) < \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, m)$ 内有解,

$$\text{所以 } 2m - \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } m > \frac{\pi}{3}.$$

所以 m 的取值范围是 $(\frac{\pi}{3}, +\infty)$.

选择条件③: $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 内无极值点, 且 $f(\frac{\pi}{6}) - 2 = f(-\frac{\pi}{3}) + 2$.

(I) 因为 $f(x) = 2\cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \omega x$,

所以 $f(x) = \cos \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x + 1 = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1$.

因为 $f(\frac{\pi}{6}) - 2 = f(-\frac{\pi}{3}) + 2$,

所以 $f(\frac{\pi}{6}) - f(-\frac{\pi}{3}) = 4$.

所以 $f(x)$ 分别在 $x = \frac{\pi}{6}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值、最小值.

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T \leq 2 \times [\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{3})] = \pi$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 内无极值点,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T \geq 2 \times [\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{3})] = \pi$.

所以 $T = \pi$.

因为 $\omega > 0$,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$.

因为 $x \in (0, m)$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6})$.

因为不等式 $f(x) < 2$ 在区间 $(0, m)$ 内有解, 即 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, m)$ 内有解,

所以 $2m + \frac{\pi}{6} > \frac{5\pi}{6}$, 即 $m > \frac{\pi}{3}$.

所以 m 的取值范围是 $(\frac{\pi}{3}, +\infty)$.

(17) (共 14 分)

解: (I) 连接 BM , MN , BN .

因为 $AB = PB$, M 为 AP 的中点,

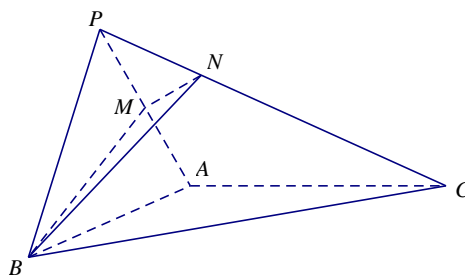
所以 $BM \perp AP$.

因为 $MN \perp AP$,

所以 $AP \perp$ 平面 BMN .

因为 $AP \subset$ 平面 PAC ,

所以平面 $BMN \perp$ 平面 PAC .



(II) 因为 $PO \perp$ 平面 ABC , $OB \subset$ 平面 ABC , $OC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PO \perp OB$, $PO \perp OC$, $\angle PBO$ 为直线 PB 与平面 ABC 所成的角.

因为直线 PB 与平面 ABC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,

所以 $\angle PBO = \frac{\pi}{6}$.

因为 $PB = 2$, 所以 $PO = 1$, $OB = \sqrt{3}$.

因为 $\sqrt{2}PA = 2$,

所以 $OA = 1$.

因为 $AB = 2$,

所以 $AB^2 = OB^2 + OA^2$.

所以 $OB \perp OA$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则

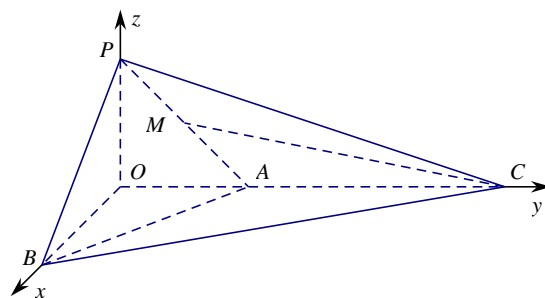
$A(0,1,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$,

$C(0,3,0)$, $P(0,0,1)$,

$M(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

所以 $\overrightarrow{PC} = (0,3,-1)$,

$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3},3,0)$,



$$\overrightarrow{MC} = (0, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}).$$

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 3y - z = 0, \\ -\sqrt{3}x + 3y = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $x = \sqrt{3}$, $z = 3$. 于是 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 3)$.

设 CM 与平面 PBC 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{MC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}}{13}.$$

所以直线 CM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{13}$.

(18) (共 13 分)

解: (I) 根据题中数据, 共有 $20 + 60 = 80$ 张照片被识别为女性, 其中确为女性的照片有

60 张, 所以该照片确为女性的概率为 $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$.

(II) 设事件 A : 输入男性照片且识别正确.

根据题中数据, $P(A)$ 可估计为 $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$.

由题意知 X 的所有可能取值为 1, 2, 3.

$$P(X=1) = \frac{3}{4}, \quad P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

所以 X 的分布列为

| | | | |
|-----|---------------|----------------|----------------|
| X | 1 | 2 | 3 |
| P | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{1}{16} = \frac{21}{16}.$$

(III) $P_2 < P_3 < P_1$.

(19) (共 15 分)

解: (I) 由题意可设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), $c^2 = a^2 - b^2$.

因为以 E 的一个顶点和两个焦点为顶点的三角形是等边三角形, 且其周长为

$$6\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } 2a + 2c = 6\sqrt{2}, \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } a = 2\sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } b^2 = 6.$$

$$\text{所以椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

(II) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 2$ ($t \neq 0$), 令 $x = 16$, 得 $y = \frac{14}{t}$, 即 $P(16, \frac{14}{t})$.

$$\text{由 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 24, \\ x = ty + 2 \end{cases} \text{ 得 } (3t^2 + 4)y^2 + 12ty - 12 = 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), C(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = -\frac{12t}{3t^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{12}{3t^2 + 4}.$$

$$\text{设 } AC \text{ 的中点为 } N(x_3, y_3), \text{ 则 } y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{6t}{3t^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } x_3 = ty_3 + 2 = \frac{8}{3t^2 + 4}.$$

因为四边形 $ABCD$ 为菱形,

所以 N 为 BD 的中点, $AC \perp BD$.

所以直线 BD 的斜率为 $-t$.

$$\text{所以直线 } BD \text{ 的方程为 } y + \frac{6t}{3t^2 + 4} = -t(x - \frac{8}{3t^2 + 4}).$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } y = \frac{8t}{3t^2 + 4} - \frac{6t}{3t^2 + 4} = \frac{2t}{3t^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } B(0, \frac{2t}{3t^2 + 4}).$$

设点 D 的坐标为 (x_4, y_4) , 则 $x_4 = 2x_3 = \frac{16}{3t^2 + 4}$, $y_4 = 2y_3 - \frac{2t}{3t^2 + 4} = -\frac{14t}{3t^2 + 4}$,
 即 $D(\frac{16}{3t^2 + 4}, -\frac{14t}{3t^2 + 4})$.

所以直线 PD 的方程为 $y - \frac{14}{t} = \frac{\frac{14}{t} + \frac{14t}{3t^2 + 4}}{16 - \frac{16}{3t^2 + 4}}(x - 16)$, 即 $y = \frac{7}{6t}(x - 4)$.

所以直线 PD 过定点 $(4, 0)$.

(20) (共 15 分)

解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln(x-1) + 2\sqrt{3-x}$.

$$(i) f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

所以 $f(2) = 2$, $f'(2) = 0$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = 2$.

$$(ii) \text{ 由 (i) 知 } f(x) = \ln(x-1) + 2\sqrt{3-x}, x \in (1, 3], f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{3-x}},$$

且 $f'(2) = 0$.

当 $x \in (1, 2)$ 时, 因为 $\frac{1}{x-1} > 1 > \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, 所以 $f'(x) > 0$;

当 $x \in (2, 3)$ 时, 因为 $\frac{1}{x-1} < 1 < \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, 所以 $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 在区间 $(2, 3)$ 上单调递减.

因为 $f(2) = 2$, $f(3) = \ln 2 > 0$, $f(1+e^{-3}) = -3 + 2\sqrt{2-e^{-3}} < -3 + 2\sqrt{2} < 0$.

所以函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

$$(II) \text{ 由 } f(x) = \ln(x-a) + 2\sqrt{3a-x} \text{ 得 } f'(x) = \frac{\sqrt{3a-x} - (x-a)}{(x-a)\sqrt{3a-x}}.$$

设 $g(x) = \sqrt{3a-x} - (x-a)$, $x \in (a, 3a)$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3a-x}} - 1 < 0$.

所以 $g(x)$ 是 $(a, 3a)$ 上的减函数.

因为 $g(a) = \sqrt{2a} > 0$, $g(3a) = -2a < 0$,

所以存在唯一 $x_0 \in (a, 3a)$, $g(x_0) = \sqrt{3a-x_0} - (x_0-a) = 0$.

所以 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

| | | | |
|---------|------------|-------|-------------|
| x | (a, x_0) | x_0 | $(x_0, 3a)$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | 极大 | ↘ |

所以 $f(x)$ 在区间 $(a, 3a)$ 上的最大值是

$$f(x_0) = \ln(x_0 - a) + 2\sqrt{3a - x_0} = \ln(x_0 - a) + 2(x_0 - a).$$

当 $a \geq 1$ 时, 因为 $g(2a) = \sqrt{a} - a \leq 0$, 所以 $x_0 \leq 2a$.

$$\text{所以 } f(x_0) \leq \ln(2a - a) + 2(2a - a) = \ln a + 2a.$$

所以 $f(x) \leq f(x_0) \leq \ln a + 2a$, 符合题意.

当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $g(2a) = \sqrt{a} - a > 0$, 所以 $x_0 > 2a$.

$$\text{所以 } f(x_0) > \ln(2a - a) + 2(2a - a) = \ln a + 2a, \text{ 不合题意.}$$

综上所述, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

(21) (共 15 分)

解: (I) m 的值为 27 或 32.

(II) (i) 假设存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_i > d_i$.

记 $x = a_i - d_i$, 由 $a_i \in \mathbf{N}^*$, $d_i \in \mathbf{N}^*$ 得 $x \in \mathbf{N}^*$.

因为 $x = a_i - d_i < a_i$, 所以 $x \notin A_i$.

因为 A_1, A_2, \dots, A_n 具有性质 P ,

所以存在 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 且 $j \neq i$, 使得 $x \in A_j$.

不妨设 $x = a_j + (k_0 - 1)d_j$, $k_0 \in \mathbf{N}^*$.

记 $y = x + d_i d_j$, 则 $y = a_j + (d_i + k_0 - 1)d_j$, 由 $d_i + k_0 \in \mathbf{N}^*$, 所以 $y \in A_j$.

因为 $y = a_i - d_i + d_i d_j = a_i + (d_j - 1)d_i$, $d_j \in \mathbf{N}^*$,

所以 $y \in A_i$.

所以 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 与 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 矛盾.

所以 $a_i \leq d_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

(ii) 记 $M = d_1 d_2 \cdots d_n$, $A = \{1, 2, \dots, M\}$.

因为 $A_i = \{x \mid x = a_i + (k-1)d_i, k = 1, 2, \dots\}$, 且 $1 \leq a_i \leq d_i$,

所以 $A_i \cap A$ 中恰有 $\frac{M}{d_i}$ 个元素, $i = 1, 2, \dots, n$.

令 $B_i = A_i \cap A$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = A$, $B_i \cap B_j = \emptyset$

($1 \leq i < j \leq n$).

由 A 中元素的个数可得 $M = \sum_{i=1}^n \frac{M}{d_i}$, 即 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = 1$.

由 A 中所有元素之和可得 $\frac{M(M+1)}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M}{d_i} a_i + \frac{\frac{M}{d_i} (\frac{M}{d_i} - 1)}{2} d_i \right)$,

即 $\frac{M(M+1)}{2} = M \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M^2}{d_i} - M \right)$.

所以 $\frac{M+1}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_i} + \frac{M}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} - \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_i} + \frac{M}{2} - \frac{n}{2}$.

所以 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_i} = \frac{n+1}{2}$.