2024北京三十五中高一（下）期中

数　学

2024.4

行政班_____教学班____姓名_____学号

试卷说明：试卷分值150分，考试时间120分钟，I卷为选择题，包括第1至第10题，II卷为主观题，包括第11至第21题。

I卷

一．选择题（共10个小题，每小题4分，共40分.每小题只有一个正确选项，**请选择正确答案填在答题卡相应的题号处**）

1.下列各角中，与$27°$角终边相同的是（　）

A. $63°$　　B. $153°$　　C. $207°$　　D. $387°$

2.向量$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于（　）

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. -2　　D. 4

3.已知$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且$\sin\alpha<0$，则$\tan\alpha=$（　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

4.下列函数中，周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数为（　）

A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 2x$

C. $y=\tan 4x$　　D. $y=\sin^2 2x$

5.设向量$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则下列结论中正确的是（　）

A. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直　　D. $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

6.如果$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5},\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，那么$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值为（　）

A. $\frac{13}{18}$　　B. $\frac{13}{22}$

C. $\frac{3}{22}$　　D. $\frac{1}{6}$

7.设函数$f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，则下列结论正确的是（　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称

C. $f(x+\frac{\pi}{2})$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 的图象可以由 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 图像左移 $\frac{\pi}{4}$ 得到

8.在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边在第三象限．则（　）

A. $\sin\alpha-\cos\alpha\leqslant\tan\alpha$　　　　B. $\sin\alpha-\cos\alpha\geqslant\tan\alpha$

C. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<\tan\alpha$　　　　D. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>\tan\alpha$

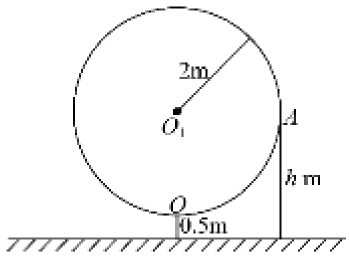
9.如图所示，某风车的半径为 2 m，每 12 s 旋转一周，它的最低点 O 距离地面 0.5 m．风车圆周上一点 A 从最低点 O 开始，运动 t（s）后与地面的距离为 h（m）．则 h 与 t 满足的函数关系为（　　）

A． $h=\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{3\pi}{2})+2.5$

B． $h=2\sin(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2})+1.5$

C． $h=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5$

D． $h=2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5$



10.在菱形 $ABCD$ 中， $AB=2,\angle BAD=60^{\circ},E$ 是 BC 的中点， F 是 CD 上一点（不与 C ， D 重合）， DE 与 AF 交于 G ，则 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的取值范围是（　）

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　　　B. $\left(0,\frac{4}{3}\right)$　　　　C. $(0,2)$　　　　D. $(0,3)$

二．填空题（共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分.请将正确答案填在答题卡相应的题号处）

11. $\cos\frac{4\pi}{3}=$________.

12.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，那么 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$____________.

13.已知 $f(x)=2\cos^2x-\sin x$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$_____， $f(x)$ 的最小值为_____.

14.在近期学校组织的论文展示大赛中，同学们发现数学在音乐欣赏中起着重要的作用.纯音的数学模型是三角函数.如音叉发出的纯音振动可表示为 $y=A\sin\omega x$ ，其中 x 表示时间， y 表示纯音振动时音叉的位移.我们听到的每个音是由纯音合成的，若某合音的数学模型为函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin nx,$ 且声音的质感与 $y=f(x)$ 的参数有关，比如：音调与声波的振动频率有关，频率低的声音低沉，频率高的声音尖利.

（1）当 $n=1$ 时，函数 $f(x)$ 的对称中心坐标为_____；

（2）当 $n=50$ 时，合音 $f(x)$ 的音调比纯音 $\varphi(x)=\frac{1}{49}\sin 49x$ ___（填写“高”或“低”）.

15.已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$），$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$，$f\left(x\right)\le\left|f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right|$ 恒成立，且 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上单调，给出下列命题：

① $f\left(x\right)$ 是偶函数；② $f\left(0\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$；③ ω 是奇数；④ ω 的最大值为 3.

其中正确的命题有_______.

II 卷

三．解答题（共 6 个小题，共 85 分。**请将解题过程和答案写在答题卡相应的题号处**）

16.（本小题 13 分）

已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

（I）求 $\sin\left(\alpha+\pi\right)$ 与 $\cos 2\alpha$ 的值；

（II）若角 β 满足 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，且角 β 为第三象限角，求 $\cos\left(\alpha+\beta\right)$ 的值.

17.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期.

（II）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

18.（本小题 15 分）

某同学用“五点法”作函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，见下表：

x		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$	
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$	0		0	-2	

（I）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（II）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值；

（III）若 $x\in\left(0,\pi\right)$，且 $f\left(x\right)>-1$，求 x 的取值范围.

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0,m\in\mathbf{R})$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择能确定函数 $f\left(x\right)$ 的解析式的两个作为已知.

（I）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（II）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,t\right]$ $(t>0)$ 上有且仅有 1 个零点，求 t 的取值范围.

条件①：函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π；

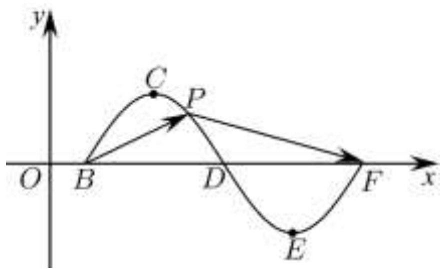
条件②：函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；

条件③：函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组符合要求得条件分别解答，按第一组解答计分.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\ \omega>0,\left|\varphi\right|<\pi\right)$ 的图象如图所示，点 B，D，F 为 $f\left(x\right)$ 与 x 轴的交点，点 C，E 分别为 $f\left(x\right)$ 的最高点和最低点，而函数 $f\left(x\right)$ 的相邻两条对称轴之间的距离为 2，且其在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 处取得最小值.



（I）求参数 ω 和 φ 的值;

（II）若 $A=1$，求向量 $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$ 与向量 $\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}$ 夹角的余弦值;

（III）若点 P 为 $f\left(x\right)$ 函数图象上的动点，当点 P 在 C，E 之间运动时，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PF}\geq 1$ 恒成立，求 A 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，$n\ge 2$，定义向量集 $Y=\{\vec{a}|\ \vec{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$，若对任意 $\overrightarrow{a_1}\in Y$，存在 $\overrightarrow{a_2}\in Y$，使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，则称 X 具有性质 P．

（I）直接写出 $\{-1,1,2\}$ 是否具有性质 P；

（II）若 $x>2$，且 $\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 P，求 x 的值；

（III）若 X 具有性质 P，求证：$1\in X$，且当 $x_n>1$ 时，$x_1=1$．