2024 北京丰台高三二模

数　　学

2024.04

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$， $A=\{1,3\}$， $B=\{2,3\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$

（A）$\{3\}$　　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{4,5\}$　　（D）$\{1,2,3\}$

2．在复平面内，复数 z 对应的点为 $Z(1,-1)$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$1-\mathrm{i}$

（C）$-1+\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

3．已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 $p,q\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{p+q}=a_pa_q$，若 $a_1=\sqrt{2}$，则 $a_4=$

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）4　　（D）$4\sqrt{2}$

4．下列函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$f(x)=\dfrac{1}{|x|}$　　（B）$f(x)=2^x+2^{-x}$

（C）$f(x)=\sin x$　　（D）$f(x)=\tan x$

5．若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则

（A）$\dfrac{1}{a^2+1}<\dfrac{1}{b^2+1}$　　（B）$a^2b>ab^2$

（C）$a^2>ab>b^2$　　（D）$a>\dfrac{a+b}{2}>b$

6．已知 α,β 是两个不同的平面，m,n 是两条不同的直线，能使 $m\perp n$ 成立的一组条件是

（A）$\alpha//\beta,m\perp\alpha,n\perp\beta$　　（B）$\alpha//\beta,m\subset\alpha,n\perp\beta$

（C）$\alpha\perp\beta,m\perp\alpha,n//\beta$　　（D）$\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n//\beta$

7．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$

的导函数是 $f'(x)$，如果函数 $y=f(x)-f'(x)$

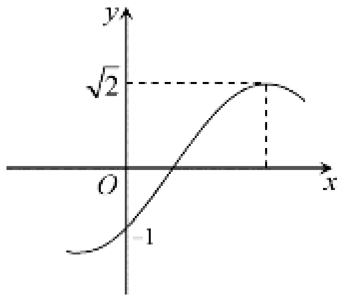
的图象如右图所示，那么 ω,φ 的值分别为

（A）$1,0$

（B）$1,-\dfrac{\pi}{4}$

（C）$1,\dfrac{\pi}{4}$

（D）$2,-\dfrac{\pi}{4}$



8．已知曲线$C:|y|=x^2+1$与直线$l:y=kx+b$，那么下列结论正确的是

（A）当$k=1$时，对于任意的$b\in\mathbf{R}$，曲线C与直线l恰有两个公共点

（B）当$k=1$时，存在$b\in\mathbf{R}$，曲线C与直线l恰有三个公共点

（C）当$k=2$时，对于任意的$b\in\mathbf{R}$，曲线C与直线l恰有两个公共点

（D）当$k=2$时，存在$b\in\mathbf{R}$，曲线C与直线l恰有三个公共点

9．已知等差数列$\{\alpha_n\}$的公差为d，首项$\alpha_1\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，那么“$d=\pi$”是“集合$S=\{x\,|\,x=\sin\alpha_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$恰有两个元素”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

10．“用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当圆锥的轴与截面所成的角不同时，可以得到不同的截口曲线”. 利用这个原理，小明在家里用两个射灯（射出的光锥视为圆锥）在墙上投影出两个相同的椭圆（图 1），光锥的一条母线恰好与墙面垂直. 图 2 是一个射灯投影的直观图，圆锥PO的轴截面APB是等边三角形，椭圆O_1所在平面为α，$PB\perp\alpha$，则椭圆O_1的离心率为


图 1

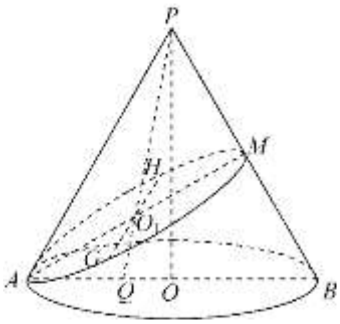


图 2

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

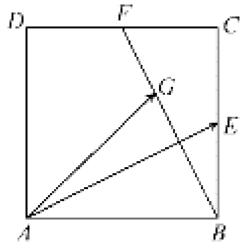
（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

第二部分　（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

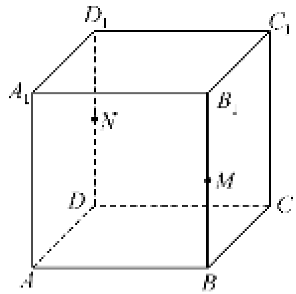
11．已知函数 $f(x)=2^x$， $g(x)=\log_2(x+1)$，那么 $f(g(0))=$____.

12．若 $(\sqrt{2}+1)^4=17+a\sqrt{2}$，则 $a=$____.



13．如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, 点 E,F 分别为 BC,CD 的中点， 点 G 在 BF 上，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=$____.

14．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， M,N 分别为 BB_1,DD_1 的中点， α 为过直线 MN 的平面．从下列结论①，②中选择一个，并判断该结论的真假. 你选的结论是____（填"①"或"②"），该结论是____命题（填"真"或"假"）.



①平面 α 截该正方体所得截面面积的最大值为 $3\sqrt{3}$；

②若正方体的 12 条棱所在直线与平面 α 所成的角都等于 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

15．设函数 $f(x)=\begin{cases}|x+m|, x<0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}m}{2}\sqrt{x}, x\geqslant 0.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

②若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则 $m>0$；

③当 $m<0$ 时，若存在实数 a,b，使得 $f(a)=f(b)$，则 $|a-b|$ 的取值范围为 $(2,+\infty)$；

④已知点 $P(-m,0)$，函数 $f(x)$ 的图象上存在两点 $Q_1(x_1,y_1),Q_2(x_2,y_2)(x_1<x_2<0)$， Q_1,Q_2 关于坐标原点 O 的对称点也在函数 $f(x)$ 的图象上．若 $|PQ_1|+|PQ_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $m=1$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（本小题 14 分）

已知△ABC 满足 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若△ABC 满足条件①、条件②、条件③中的两个，请选择一组这样的两个条件，并求△ABC 的面积.

条件①： $a-b=2$；条件②： $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$；条件③： $c=8$.

注：如果选择的一组条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多组符合要求的条件分别解

答，按第一组解答计分.

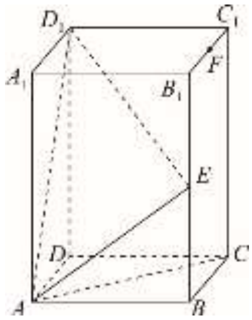
17.（本小题 14 分）

在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，E 为 BB_1 中点，直线 B_1C_1 与平面 AD_1E 交于点 F.

（Ⅰ）证明：F 为 B_1C_1 的中点；

（Ⅱ）若直线 AC 与平面 AD_1E 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，

求二面角 A_1-AD_1-F 的余弦值.



18.（本小题 13 分）

激光的单光子通讯过程可用如下模型表述：发送方将信息加密后选择某种特定偏振状态的单光子进行发送．在信息传输过程中，若存在窃听者，由于密码本的缺失，窃听者不一定能正确解密并获取准确信息.

某次实验中，假设原始信息的单光子的偏振状态 0，1，2，3 等可能地出现，原始信息的单光子的偏振状态与窃听者的解密信息的单光子的偏振状态有如下对应关系.

原始信息的单光子的偏振状态	0	1	2	3
解密信息的单光子的偏振状态	0，1，2	0，1，3	1，2，3	0，2，3

已知原始信息的任意一种单光子的偏振状态，对应的窃听者解密信息的单光子的偏振状态等可能地出现.

（Ⅰ）若发送者发送的原始信息的单光子的偏振状态为 1，求窃听者解密信息的单光子的偏振状态与原始信息的单光子的偏振状态相同的概率；

（Ⅱ）若发送者连续三次发送的原始信息的单光子的偏振状态均为 1，设窃听者解密信息的单光子的偏振状态为 1 的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）已知发送者连续三次发送信息，窃听者解密信息的单光子的偏振状态均为 1．设原始信息的单光子只有一种偏振状态的可能性为 a，有两种偏振状态的可能性为 b，有三种偏振状态的可能性为 c，试比较 a，b，c 的大小关系.（结论不要求证明）

19.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=a^2x+2a\sqrt{x}-2\ln x(a\neq 0)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

20．（本小题 15 分）

已知两点 $F_1(-1,0)$， $F_2(1,0)$，曲线 Ω 上的动点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=2|F_1F_2|$，直线 MF_2 与曲线 Ω 交于另一点 N．

（Ⅰ）求曲线 Ω 的方程；

（Ⅱ）设曲线 Ω 与 x 轴的交点分别为 A,B（点 A 在点 B 的左侧，且 M 不与 A,B 重合），直线 AM 与直线 BN 交于点 P．当点 B 为线段 NP 的中点时，求点 N 的横坐标．

21．（本小题 15 分）

将正整数数列 $N_0:1,2,3,4,\cdots$ 中项数为平方数的项依次选出构成数列 $A_1:1,4,9,16,\cdots$，此时数列 N_0 中剩下的项构成数列 $N_1:2,3,5,6,\cdots$；再将数列 N_1 中项数为平方数的项依次选出构成数列 $A_2:2,6,12,20,\cdots$，剩下的项构成数列 N_2；…，如此操作下去，将数列 $N_{k-1}(k\in\mathbf{N}^*)$ 中项数为平方数的项依次选出构成数列 A_k，剩下的项构成数列 N_k．

（Ⅰ）分别写出数列 A_3， A_4 的前 2 项；

（Ⅱ）记数列 A_m 的第 n 项为 $f(m,n)$．求证：当 $n\geqslant 2$ 时， $f(m,n)-f(m,n-1)=2n+m-2$；

（Ⅲ）若 $f(m,n)=108$，求 m,n 的值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	C	A	C	B	D	B	A	C	A	D

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）1　　（12）12　　（13）4

（14）①，假；或②，真　　（15）②③④

注：（15）题给出的结论中有多个符合题目要求．全部选对得 5 分，不选或错选得 0 分，其他得 3 分．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，

所以 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$．

因为 $0<A<\pi$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　　………………6分

（Ⅱ）若选择①②，

在 $\triangle ABC$ 中，$0<B<\pi$，

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$．

由（Ⅰ）知 $A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin A<\sin B$，

所以 $a<b$，与 $a-b=2$ 矛盾，此时不存在符合题意的 $\triangle ABC$．

若选择①③，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $a^2=(a-2)^2+64-16(a-2)\cos\frac{\pi}{3}$，

解得 $a=7$，

所以 $b=5$．

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$．　　………………14分若选择②③，

在 $\triangle ABC$ 中，$0<B<\pi$，

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$．

又因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$， $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos B+\cos\frac{\pi}{3}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

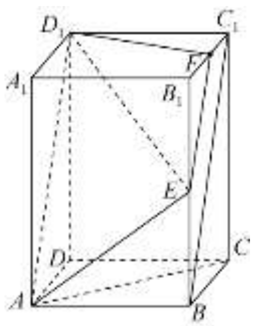
在△ABC中，由正弦定理可得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=4\sqrt{7}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{7}\times 8\times\dfrac{3\sqrt{21}}{14}=24\sqrt{3}$. ………………14分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）连结 D_1F, EF, BC_1.

在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



$AB \parallel C_1D_1$， $AB=C_1D_1$.

所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

所以 $AD_1 \parallel BC_1$.

因为 $AD_1 \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AD_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1.

因为 B_1C_1 与平面 AD_1E 交于点 F，

所以平面 $AD_1E \cap$ 平面 $BCC_1B_1=EF$.

因为 $AD_1 \subset$ 平面 AD_1E，

所以 $AD_1 \parallel EF$.

所以 $EF \parallel BC_1$.

在△ BB_1C_1 中，因为点 E 是 BB_1 的中点，

所以点 F 是 B_1C_1 的中点. ………………5 分

（Ⅱ）在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $DD_1=2t(t>0)$， 由 $AB=1$，得 $A(1,0,0), D_1(0,0,2t), E(1,1,t), C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,t), \overrightarrow{AD_1}=(-1,0,2t), \overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

设平面 AD_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

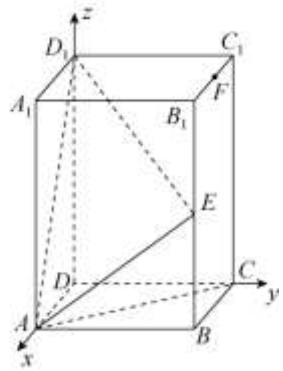
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$，

得 $\begin{cases}-x+2tz=0\\ y+tz=0\end{cases}$.

令 $z=1$，得 $x=2t$， $y=-t$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2t,-t,1)$.

所以 $\cos < \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{n} > = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{-2t-t}{\sqrt{2} \times \sqrt{4t^2+t^2+1}}$.



因为 AC 与平面 AD_1E 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\left|\dfrac{-2t-t}{\sqrt{4t^2+t^2+1} \times \sqrt{2}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $t=1$，

所以平面 AD_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

由题可知，平面 AA_1D_1 的法向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$.

因为 $\cos < \overrightarrow{DC}, \boldsymbol{n} > = \dfrac{\overrightarrow{DC} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DC}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{-1}{1 \times \sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

由题可知，二面角 A_1-AD_1-F 为锐二面角，

所以二面角 A_1-AD_1-F 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　　　　………………14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 A =“解密信息的单光子的偏振状态与原始信息的单光子的偏振状态相同”，则

$P(A)=\dfrac{1}{3}$.　　　　………………3 分

（Ⅱ）X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$，

$P(X=1)=C_3^1 \times \dfrac{1}{3} \times (\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2 \times (\dfrac{1}{3})^2 \times \dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，

$P(X=3)=C_3^3 \times (\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{1}{27}$，

所以，X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

$E(X)=0 \times \dfrac{8}{27}+1 \times \dfrac{4}{9}+2 \times \dfrac{2}{9}+3 \times \dfrac{1}{27}=1$.　　　　………………10 分

（Ⅲ）$a<c<b$.　　　　………………13 分

（19）（本小题 14 分）

解：（I）当 $a=1$ 时，$f(x)=x+2\sqrt{x}-2\ln x$，$f(1)=3$；

$f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}$，$f'(1)=0$；

故切线方程为 $y=3$.　　　　………………4 分

（II）函数 $f(x)=a^2x+2a\sqrt{x}-2\ln x(a \neq 0)$ 的定义域为 $\{x \mid x>0\}$；

$$f'(x)=a^2+\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}=\frac{a^2x+a\sqrt{x}-2}{x}=\frac{(a\sqrt{x}+2)(a\sqrt{x}-1)}{x}.$$

①当 $a>0$ 时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{a^2})$	$\frac{1}{a^2}$	$(\frac{1}{a^2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 极小值为 $f(\frac{1}{a^2})=a^2\cdot\frac{1}{a^2}+2a\cdot\frac{1}{a}-2\ln\frac{1}{a^2}=3+4\ln a$.

函数 $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $f(\frac{1}{a^2})=3+4\ln a<0$，解得 $0<a<e^{-\frac{3}{4}}$.

当 $x\to0$ 时， $a^2x+2a\sqrt{x}\to0$， $-2\ln x\to+\infty$，从而 $f(x)\to+\infty$；

当 $x\to+\infty$ 时， $a^2x+2a\sqrt{x}\to+\infty$， $-2\ln x\to-\infty$，当自变量 x 越来越大时，函数 $y=2\ln x$ 的增长速度相对函数 $y=a^2x+2a\sqrt{x}$ 的增长速度要慢，从而 $f(x)\to+\infty$.

所以 $0<a<e^{-\frac{3}{4}}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

②当 $a<0$ 时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{4}{a^2})$	$\frac{4}{a^2}$	$(\frac{4}{a^2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

$f(x)$ 极小值为 $f(\frac{4}{a^2})=a^2\cdot\frac{4}{a^2}+2a\cdot(-\frac{2}{a})-2\ln\frac{4}{a^2}=-2\ln\frac{4}{a^2}$.

函数 $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $f(\frac{4}{a^2})=-2\ln\frac{4}{a^2}<0$，解得 $-2<a<0$.

当 $x\to0$ 时， $a^2x+2a\sqrt{x}\to0$， $-2\ln x\to+\infty$，从而 $f(x)\to+\infty$；

当 $x\to+\infty$ 时， $a^2x\to+\infty$， $2a\sqrt{x}-2\ln x\to-\infty$，当自变量 x 越来越大时，函数 $y=-2a\sqrt{x}+2\ln x$ 的增长速度相对函数 $y=a^2x$ 的增长速度要慢，从而 $f(x)\to+\infty$.

所以 $-2<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；

综上所述， a 的取值范围为 $(-2,0)\cup(0,e^{-\frac{3}{4}})$. ………………14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（I）因为动点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=2|F_1F_2|=4>|F_1F_2|$，所以曲线 Ω 为以点 F_1， F_2 为焦点的椭圆，且 $2a=4$， $c=1$，即 $a=2$， $c=1$；

又因为 $a^2=b^2+c^2$，故 $b=\sqrt{3}$.

所以曲线 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………5 分

（II）**解法 1：**

当直线 MN 斜率不存在时， $M(1,\frac{3}{2})$， $N(1,-\frac{3}{2})$，可求得 $P(4,3)$，不符合题意；

当直线 MN 斜率存在时，设直线 MN 方程为 $y=k(x-1)$；

联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

设 $M\left(x_1,y_1\right)$， $N\left(x_2,y_2\right)$， $P\left(x_P,y_P\right)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$， $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$；

直线 AM 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$；直线 BN 方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$；

联立 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$

得 $\frac{x_P+2}{x_P-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{k(x_2-1)(x_1+2)}{k(x_1-1)(x_2-2)}=\frac{x_1x_2-x_1+2x_2-2}{x_1x_2-2x_1-x_2+2}$

$$=\frac{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}+2\frac{8k^2}{4k^2+3}-3x_1-2}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}-x_1+2}=\frac{\frac{12k^2-18}{4k^2+3}-3x_1}{\frac{4k^2-6}{4k^2+3}-x_1}=3.$$

解得 $x_P=4$， 可得 $x_2=0$，

所以点 N 的横坐标为 0.

………………15 分

解法 2：

设直线 MN 方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases} x=my+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$， 设 $M\left(x_1,y_1\right)$， $N\left(x_2,y_2\right)$， $P\left(x_P,y_P\right)$，

则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$， $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$；

直线 AM 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$；直线 BN 方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$；

联立 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$ 得 $y_P=\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)y_2-(x_2-2)y_1}$；

因为 $y_P=-y_2$， 所以 $\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)y_2-(x_2-2)y_1}=-y_2$；

所以

$4y_1=(x_2-2)y_1-(x_1+2)y_2=(my_2+1-2)y_1-(my_1+1+2)y_2=-y_1-3y_2$；

得 $5y_1=-3y_2$；即 $y_1=-\frac{3}{5}y_2$，代入 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，得 $y_2=-\frac{15m}{3m^2+4}$，

代入 $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，得 $-\frac{3}{5}y_2^2=-\frac{9}{3m^2+4}$；

即 $-\frac{3}{5}(-\frac{15m}{3m^2+4})^2=-\frac{9}{3m^2+4}$，得到 $m^2=\frac{1}{3}$， $y_2=\pm\sqrt{3}$；

得 $x_2=0$.

所以点 N 的横坐标为 0.

………………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）数列 A_3 的前 2 项为 3，8；数列 A_4 的前 2 项为 5，11； ………………4 分

（Ⅱ）首先 $f(1,n)=n^2$，当 $n\geq 2$ 时， $f(1,n)-f(1,n-1)=2n-1$ 结论成立；

当 $m\geqslant 2$ 时，对于相邻的两个数列：

A_{m-1}： $f(m-1,1)$， $f(m-1,2)$， $\cdots$， $f(m-1,n-1)$， $f(m-1,n)$， $\cdots$，

A_m： $f(m,1)$， $f(m,2)$， $\cdots$， $f(m,n-1)$， $f(m,n)$， $\cdots$，

1	4	9	16	25	36	49	64
2	6	12	20	30	42	56	72
3	8	15	24	35	48	63	80
5	11	19	29	41	55	71	89
7	14	23	34	47	62	79	98
10	18	28	40	54	70	88	108
13	22	33	46	61	78	97	118
17	27	39	53	69	87	107	129

因为 $f(m,n-1),f(m-1,n)$ 都在数列 N_{m-2} 中，

且 $f(m,n-1)$ 在 $f(m-1,n)$ 之前，

所以

$f(m,n-1)<f(m-1,n)$ 在数列 A_{m-1},A_m 中，

必有 $f(m-1,n)<f(m,n)$，

所以 $f(m,n-1)<f(m-1,n)<f(m,n)$，

所以

$f(m,n)-f(m,n-1)=f(m-1,n)-f(m-1,n-1)+1$

所以 $\{f(m,n)-f(m,n-1)\}$ 构成首项为 $f(1,n)-f(1,n-1)=2n-1$，

公差为 1 的等差数列，

所以 $f(m,n)-f(m,n-1)=(2n-1)+(m-1)=2n+m-2$.   ………………9 分

（Ⅲ）由各个数列生成的规则知，$\{n^2+1,n^2+2,\cdots,n^2+2n\}$ 中不可能有两个元素是同一数列的项．从上面的表格，我们猜想：集合 $\{n^2+1,n^2+2,\cdots,n^2+2n\}$ 中的每个元素，是且仅是数列 $A_2,A_3,\cdots,A_{2n+1}$ 中某个数列的项.具体地可概括成结论 P：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $i\in\mathbf{N}$, $i\leqslant n-1$，有

$f(2n-2i,i+1)=n^2+i+1,\ f(2n+1-2i,i+1)=n^2+n+i+1.$

下面用数学归纳法证明：

(1)当 $n=1$ 时， $f(2,1)=2,\ f(3,1)=3,$ 由题意数列 A_2,A_3 的首项分别是 2, 3，结论成立；

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，结论成立，即对 $\forall i\in N, i\leqslant k-1$，

$f(2k-2i,i+1)=k^2+i+1,\ f(2k+1-2i,i+1)=k^2+k+i+1$

那么由第（Ⅱ）问的结论知：当 $i\in\mathbf{N}, i\leqslant k-1$ 时，

$f(2k-2i,i+2)=f(2k-2i,i+1)+2(i+2)+(2k-2i)-2\ =(k^2+i+1)+2k+2=(k+1)^2+i+2$

$f(2k+1-2i,i+2)=f(2k+1-2i,i+1)+2(i+2)+[2k+1-2i]-2\qquad=(k^2+k+i+1)+(2k+3)$

$=(k+1)^2+(k+1)+i+2$

上式表明，集合$\{(k+1)^2+1,(k+1)^2+2,\cdots,(k+1)^2+2(k+1)\}$中除了

$(k+1)^2+1,(k+1)^2+(k+2)$的每一个元素都是数列$A_2,A_3,\cdots,A_{2k+1}$中的某个数列的项，还剩下两个元素：$(k+1)^2+1,(k+1)^2+(k+2)$，它们必是数列A_{2k+2},A_{2k+3}的首项，结果只有$f(2k+2,1)=(k+1)^2+1, f(2k+3,1)=(k+1)^2+(k+1)+1$.

根据(1)(2)知，结论P成立.

由结论P可得，数列A_{2k}的首项为k^2+1，A_{2k+1}的首项为k^2+k+1，

即$f(m,1)=\begin{cases}\dfrac{m^2}{4}+1, m为偶数,\\ \dfrac{(m-1)^2}{4}+\dfrac{m-1}{2}+1, m为奇数,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{m^2}{4}+1, m为偶数,\\ \dfrac{m^2-1}{4}+1, m为奇数,\end{cases}$

另一方面，由第（Ⅱ）问的结论：$f(m,n)-f(m,n-1)=2n+m-2$得：

$f(m,2)-f(m,1)=m+2$，

$f(m,3)-f(m,2)=m+4$，

…

$f(m,n)-f(m,n-1)=2n+m-2$，

相加得：$f(m,n)=2+4+\cdots+(2n-2)+(n-1)m=(n-1)(n+m)+f(m,1)$，

当$n=1$时，上式也成立.

所以$f(m,n)=\begin{cases}(\dfrac{m^2}{4}+1)+(n-1)(n+m), & m为偶数,\\ (\dfrac{m^2-1}{4}+1)+(n-1)(n+m), & m为奇数.\end{cases}=\begin{cases}(\dfrac{m}{2}+n-1)^2+n, & m为偶数,\\ (\dfrac{m}{2}+n-1)^2+n-\dfrac{1}{4}, & m为奇数.\end{cases}$

令$(\dfrac{m}{2}+n-1)^2+n=108$，则$(\dfrac{m}{2}+n-1)^2=108-n$, 所以$\dfrac{m}{2}=\sqrt{108-n}-(n-1)$.

由$\dfrac{m}{2}\geqslant 1$得$n^2+n\leqslant 108$，所以$n\leqslant 9$，所以$108-n\in[99,107)$，所以$\sqrt{108-n}=10$.

所以$n=8$，此时$\sqrt{108-8}-(8-1)=3$，所以$m=6$；

令$(\dfrac{m}{2}+n-1)^2+n-\dfrac{1}{4}=108$，有$(m+2n-2)^2=433-4n$，$m=\sqrt{433-4n}+2-2n$.

由$m\geqslant 1$得$n^2\leq 108$，所以$n\leq 10$.

所以$433-4n\in(393,429)$，所以$\sqrt{433-4n}\notin \mathbf{N}^*$, 无解.

综上，当$f(m,n)=108$时，$m=6,n=8$. ………………15分