# 北京交大附中 2023—2024 学年第二学期期中练习

# 高 一 数 学 2024.04

说明：本试卷共 4 页，共 120 分。考试时长 90 分钟。

**一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1. $\sin 120°$ 的值等于（ ）

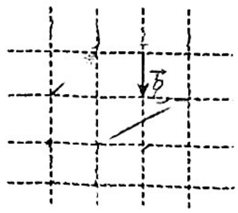
A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若角 $\alpha$ 的终边过点 $(4,3)$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$（ ）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

3. 已知扇形的弧长为 $4\text{cm}$，圆心角为 $2\text{rad}$，则此扇形的面积是（ ）

A. $2\text{cm}^2$　　B. $4\text{cm}^2$　　C. $6\text{cm}^2$　　D. $8\text{cm}^2$




4. 向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示.若 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\vec{b}$，则实数 $\lambda=$（ ）

A. $-1$　　B. $-2$　　C. $1$　　D. $2$

5. 下列四个函数中以 $\pi$ 为最小正周期且为奇函数的是（ ）

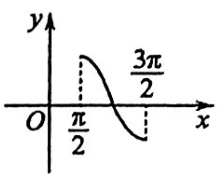
A. $f(x)=\cos 2x$　　B. $f(x)=\tan\frac{x}{2}$

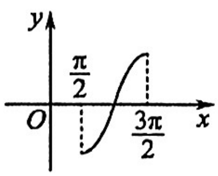
C. $f(x)=\tan(-x)$　　D. $f(x)=\sin|x|$

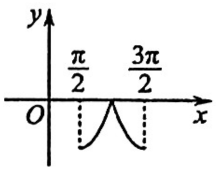
6. 在 $\Delta ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，且 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$（ ）

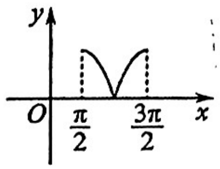
A. 16　　B. $-16$　　C. 20　　D. $-20$

7. 函数 $f(x)=\cos x\cdot|\tan x|$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 上的大致图象为（ ）

A. 


B. 


C. 


D. 

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则“$\alpha=\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in Z)$”是“$f(x+\alpha)$是偶函数，且$f(x-\alpha)$是奇函数”的（　　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

9. 已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，且均为单位向量，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$的最大值是（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{3}$

10. 窗花是贴在窗户玻璃上的贴纸，它是中国古老的传统民间艺术之一. 人们设计了一种由外围四个大小相等的半圆和中间正方形所构成的剪纸窗花（如图 1）. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，中心为 $O$，四个半圆的圆心均为正方形 $ABCD$ 各边的中点（如图 2），若 $P$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，则 $\overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)=$（　）

图1

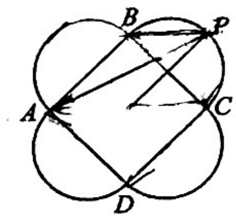


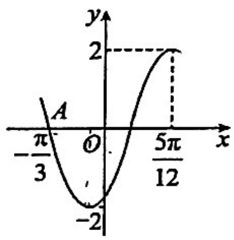

图2

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中横线上）

11. 写出一个与向量 $a=(-3,4)$ 平行的单位向量________.

12. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如右图，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$________.




13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象过点$(0,\frac{1}{2})$,则 $\varphi=$________，若将函数 $f(x)$ 图象仅向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度和仅向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度都能得到同一个函数的图象，则 $\omega$ 的最小值为________.

14. 已知边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，点 $E$ 满足 $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EC}$，点 $F$ 为线段 $BD$ 上一动点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值为________.

15. 声音是由物体振动产生的声波.我们听到的每个音都是由纯音合成的，纯音的数学模型是函数 $y=A\sin\omega t$.音有四要素：音调、响度、音长和音色.它们都与函数 $y=A\sin\omega t$ 及其参数有关，比如：响度与振幅有关，振幅越大响度越大，振幅越小响度越小；音调与频率有关，频率低的声音低沉，频率高的声音尖锐；我们平时听到的乐音不只是一个音在响，而是许多音的结合，称为复合音.我们听到的声音对应的函数是 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$. 给出下列四个结论：

①函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots+\frac{1}{10}\sin 10x$ 不具有奇偶性

②函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增

③若某声音甲的对应函数近似为 $g(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$，则声音甲的响度一定比纯音 $h(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 响度小

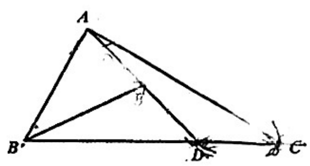
④若某声音乙的对应函数近似为 $\varphi(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，则声音乙一定比纯音 $h(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 更低沉

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. （本小题 10 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，E 是 AD 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.




（Ⅰ）试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$；

（Ⅱ）若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$.

17.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 内只有一个零点，直接写出实数 $a$ 的取值范围.

18.（本小题 12 分）

已知 $A(4,0),B(0,4),C(\cos\alpha,\sin\alpha),(0<\alpha<\pi)$.

（Ⅰ）若 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{21}$（$O$ 为坐标原点），求 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

19.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，则是否存在实数 $m$，使得对于任意 $x_1\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，存在 $x_2\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$m=g(x_1)-f(x_2)$ 成立？若存在，求实数 $m$ 的取值范围；若不存在，请说明理由.

条件①：$f(x)$ 的最小值为 $-2$；

条件②：$f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$；

条件③：$f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{5\pi}{6},-1\right)$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（本小题 14 分）

对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和正实数 $T$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)-f(x)=T$，则 $f(x)$ 为 $T-$阶梯函数.

（Ⅰ）分别判断下列函数是否为 $1-$阶梯函数（直接写出结论）：

① $f(x)=x^2$；

② $f(x)=x+1$.

（Ⅱ）若 $f(x)=x+\sin x$ 为 $T-$阶梯函数，求 $T$ 的所有可能取值；

（Ⅲ）已知 $f(x)$ 为 $T-$阶梯函数，满足 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{T}{2},T\right]$ 上单调递减，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(T-x)-f(x)=T-2x$.若函数 $F(x)=f(x)-x-b$ 有无穷多个零点，记其中正的零点从小到大依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots$.证明：存在 $b\in\mathbf{R}$，使得 $F(x)$ 在 $[0,2023T]$ 上有 4046 个零点，且 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_{4046}-x_{4045}$.