



北京十一学校 2023~2024 学年第 3 学段高一年级数学 1 教与学诊断 (2024.4)

考试时间: 120 分钟 满分: 150 分

一、选择题 (共 12 道小题, 每题 5 分, 共 60 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

1. 已知 $\tan \theta = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = (\quad)$

- A. $\frac{9+10\sqrt{2}}{17}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=45^\circ$, $C=60^\circ$, $a=10$, 则 $c = (\quad)$

- A. $5\sqrt{6}$ B. 5 C. $5\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{3}{5}$, 则 $\cos \frac{A}{2} = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

4. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\sin 2\alpha + \sin^2 \alpha = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=120^\circ$, $AC=2\sqrt{3}$, $AB=2$, 则 $BC = (\quad)$

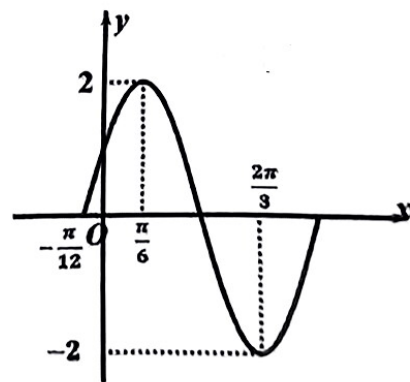
- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

6. 函数① $f(x) = \sin x + \cos x$, ② $f(x) = \sin x \cos x$, ③ $f(x) = 2\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) - 1$ 中, 周期是 π 且为奇函数的所有函数的序号是 ()

- A. ①② B. ② C. ③ D. ②③

7. 如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像, 则该函数解析式为 ()

- A. $y = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ B. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$
C. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{12})$ D. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$





8. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{4}$, 则 $C = (\quad)$

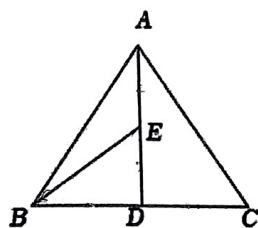
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

9. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$. 若 $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, 则 ω 的最小值为 (\quad)

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} = (\quad)$

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



11. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{4}$, 则 “ $\sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 是钝角三角形” 的 (\quad)

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 已知 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi) (\varphi \in R)$ 既不是奇函数也不是偶函数, 若 $y = f(x+m)$ 为奇函数, $y = f(x+n)$ 为偶函数, 则 $|m| + |n|$ 的最小值为 (\quad)

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

二、填空题 (共 6 个小题, 每题 5 分, 共 30 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

13. 函数 $y = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$ 的递增区间为 _____.

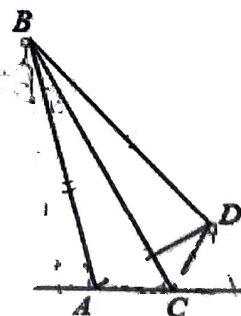
14. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 共线, 且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 2$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

15. 写出使得 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ 成立的一组 α, β 的取值 _____.

16. 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi) (-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值为 _____.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

18. 如图, A, B, C, D 都在同一个与水平面垂直的平面内, B, D 为两岛上的两座灯塔的塔顶. 测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分





别为 75° , 30° , 于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 60° , $AC = 1\text{km}$. 则 B, D 的距离为 _____ km .

三、解答题 (五个大题, 一共 60 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

19. (本题 10 分) 已知 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}, \alpha \in (0, \pi), \sin \beta = -\frac{5}{13}, \beta$ 是第三象限角, 求:

- (1) (4 分) $\sin \alpha, \cos \beta$ 的值;
- (2) (6 分) $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\tan 2\alpha$ 的值.

20. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + m$ 过原点 $(0, 0)$.

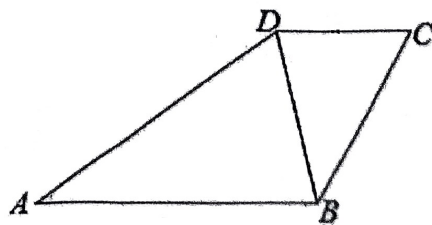
- (1) (3 分) 求 m 的值;
- (2) (4 分) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上的零点;
- (3) (5 分) 下表是应用“五点法”进行的列表, 请填写表中缺失的数据.

x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$2x - \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(2x - \frac{\pi}{6})$	0	1	0	-1	0
y	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

21. (本题 12 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

$$AB = 2\sqrt{6}, CD = \sqrt{6}, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \angle ADB = \frac{1}{3}.$$

- (1) (5 分) 求 $\cos \angle ABD$;
- (2) (7 分) 求 BC 的长.





22. (本题 14 分) 已知函数 $f(x) = \cos x(2\sqrt{3}\sin x + \cos x) - \sin^2 x$.

(1) (6 分) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和最小正周期;

(2) (4 分) 填写由函数 $y = 2\sin x$ 的图像变换得到 $f(x)$ 的图像的过程:

先将 $y = 2\sin x$ 图像上的所有点 _____, 得到 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图像;

再把 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图像上的所有点, 纵坐标不变, 横坐标 _____,

得到 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像.

(3) (4 分) 若当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq m$ _____, 求实数 m 的取值范围.

请选择①和②中的一个条件, 补全问题 (3), 并求解.

其中, ①有解; ②恒成立.

23. (本题 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $\angle C = \frac{2\pi}{3}$.

(1) (4 分) 求 $\angle B$;

(2) (8 分) 在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求 BC 边上的中线的长.

条件① $c = \sqrt{2}b$; 条件② $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; 条件③ $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (2) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.