人大附中2023~2024学年度第二学期高二年级数学期中练习

2024年4月23日

制卷人：吴文庆　审卷人：吴中才 杨良庆

说明：本试卷共六道大题，26道小题，共6页，满分150分，考试时间120分钟.

第I卷（共18题，满分100分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2+1$，则122是该数列的（　）

A．第9项　B．第10项　C．第11项　D．第12项

2．若函数$f(x)=x^2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　）

A．1　B．2　C．3　D．4

3．等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+a_3=3$，$a_4+a_5+a_6=21$，则其公差等于（　）

A．2　B．3　C．6　D．18

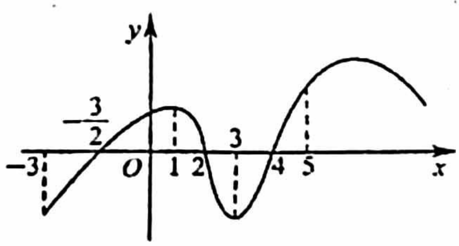
4．如图是函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$的图象，则下面判断正确的是（　）

A．$f(x)$是区间$[-3,1]$上的增函数

B．$f(x)$是区间$[1,2]$上的减函数

C．1是$f(x)$的极大值点

D．4是$f(x)$的极小值点



5．设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_8>S_n\left(n\neq 8,n\in\mathbf{N}^*\right)$，则（　）

A．$a_8\geq 0,a_9<0$　B．$a_8>0,a_9<0$

C．$a_8=0,a_9<0$　D．$a_8>0,a_9=0$

6．若函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+ax$有极值，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,1]$　B．$(-\infty,1)$　C．$(1,+\infty)$　D．$[1,+\infty)$

7．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1,a_2,a_4成等比数列，则$a_2=$（　）

A．-10　B．-6　C．4　D．-4

8．已知$f\left(x\right)$在$x=x_0$处可导，在x_0附近x的函数值$f\left(x\right)$，可以用“以直代曲”的方法求其近似代替值：$f\left(x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.对于函数$f\left(x\right)=\sqrt{x}$，利用这一方法，$m=f(4.001)$的近似代替值　　　（　　）

A．大于m　　　B．小于m　　　C．等于m　　　D．与m的大小关系无法确定

9．设S_n为无穷等比数列$\{a_n\}$的前n项和，则“$\{a_n\}$有最大值”是“$\{S_n\}$有最大值”的　　　（　　）

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　D．既不充分又不必要条件

10．函数$f\left(x\right)$定义域为D，若$f\left(x\right)$满足：对任意$c\in D$，存在$a,b\in D$，使得$f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$成立，则称$f\left(x\right)$满足性质$P$.下列函数中不满足性质$P$的是　　　（　　）

A．$f(x)=x^2$　　　B．$f(x)=x^3$　　　C．$f(x)=e^x$　　　D．$f(x)=\ln x$

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分.请把结果填在答题纸上的相应位置.）

11．函数$f(x)=\sin 2x$，则$f'(x)=$__________.

12．用数学归纳法证明命题“$\forall n\in \mathbf{N}^*,(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)$”时，假设$n=k$时成立，证明$n=k+1$时也成立，可在左边乘以一个代数式________.

13．函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$，若$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上单调递增，则实数$a$的取值范围是__________.

14．小杰想测量一个卷纸展开后的总长度，卷纸中的纸是单层的，且卷纸整体呈一个空心圆柱形，即大圆柱在其正中间挖去了一个小圆柱，测得小圆柱底面的直径为 5 厘米，大圆柱底面的直径为 11 厘米. 由于单层纸的厚度不易测量，小杰利用游标卡尺测得 10 层纸的总厚度为 0.3 厘米. 试估算这个卷纸的总长度（单位：米）为________.（结果精确到个位，取$\pi=3.14$）

15. 与曲线在某点处的切线垂直，且过该点的直线称为曲线在某点处的法线. 关于曲线的法线有下列四种说法：

①存在一类曲线，其法线恒过定点；

②若曲线 $y=x^4$ 的法线的纵截距存在，则其最小值为 $\frac{3}{4}$；

③存在两条直线既是曲线 $y=e^x$ 的法线，也是曲线 $y=\ln x$ 的法线；

④曲线 $y=\sin x$ 的任意法线与该曲线的公共点个数均为 1.

其中所有说法正确的序号是____________.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

16.（本题 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=x^2-ax$，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极值.

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[2023,2024\right]$ 上的平均变化率；

（Ⅱ）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅲ）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 过点 $(2,0)$ 的切线方程.

17.（本题 10 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_5=3$，$S_5=35$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_{10}.

18.（本题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ax^2-\left(a+2\right)x+\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

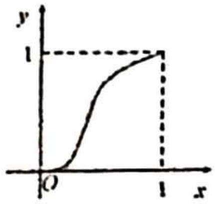
（Ⅱ）讨论当 $a>0$ 时函数 $y=f(x)$ 的单调性；

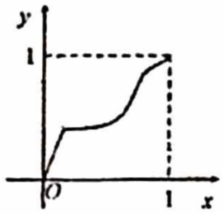
（Ⅲ）若函数 $g(x)=f(x)-ax^2$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，求实数 a 的取值范围.

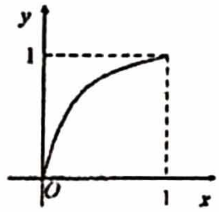
第II卷（共8道题，满分50分）

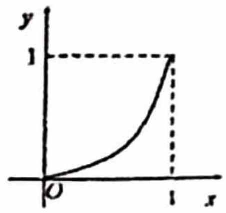
一、选择题（共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

19. 已知函数 $y=f(x)$ 满足：对任意 $a_1\in(0,1)$，由递推关系 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的，则该函数的图象可以是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，若 $S_n=n^2+n+3$，则（　　）

A. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$　　B. 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列

C. $a_n+\dfrac{S_n}{n}$ 的最小值为 $\dfrac{17}{2}$　　D. S_4-S_2，S_6-S_4，S_8-S_6 不成等差数列

21. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=3a_1$，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$\{a_n\}$ 是等差数列”是“$\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

22. 已知无穷数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$．性质 $s:\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$a_{m+n}>a_m+a_n$，

性质 $t:\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$2\leq m<n$，$a_{m-1}+a_{n+1}>a_m+a_n$，给出下列四个结论：

① 若 $a_n=3-2n$，则 $\{a_n\}$ 具有性质 s；

② 若 $a_n=n^2$，则 $\{a_n\}$ 具有性质 t；

③ 若 $\{a_n\}$ 具有性质 s，则 $a_n\geq n$；

④ 若等比数列 $\{a_n\}$ 既满足性质 s 又满足性质 t，则其公比的取值范围为 $(2,+\infty)$．

则所有正确结论的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分，把答案填在答题纸上的相应位置.）

23. 写出一个满足 $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ 的函数 $f(x)=$______________.

24. 已知函数 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(a>0)$，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_i,f(x_i))$ 处切线的斜率为 $k_i(i=1,2,3)$，若 x_1,x_2,x_3 均不相等，且 $k_2=-2$，则 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_3}=$____________.

25. 若曲线 $y=f(x)$ 上两个不同点处的切线重合，则称这条切线为曲线 $y=f(x)$ 的"自公切线"，则下列曲线 $y=f(x)$ 中，所有存在"自公切线"的序号为____________.

① $y=x^2-2|x|$; ② $y=3\sin x+4\cos x$;

③ $y=3x+\dfrac{1}{x}$; ④ $y=\sqrt{x+|x|+1-x^2}$.

三、解答题（本小题 15 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

26. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：

① $a_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=1,2,\cdots)$；

② $a_i+a_j\le a_{i+j}\le a_i+a_j+1$ $(i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,i+j\ge3)$.

设 a_i^* 为 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 所能取到的最大值，并记数列 $\{a_n^*\}$.

（I）若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_1=1$，直接写出其公差 d 的值；

（II）若 $a_1=a_2=1$，求 a_4^* 的值；

（III）若 $a_1=1$，$a_2=2$，求数列 $\{a_n^*\}$ 的前 100 项和.