数　学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$ ，集合 $A=\{1,2\}$ ，则 $\complement_U A=$

（A）$\{-2,-1,0,1\}$　　（B）$\{-2,-1,0\}$

（C）$\{-2,-1,1\}$　　（D）$\{-2,-1\}$

（2）抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程是

（A）$x=1$　　（B）$x=-1$

（C）$y=1$　　（D）$y=-1$

（3）已知 i 是虚数单位，若复数 $z=(m-\mathrm{i})\cdot(3+\mathrm{i})$ 是纯虚数，则实数 m 的值是

（A）-3　　（B）3

（C）$-\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{3}$

（4）已知角 α 的终边经过点 $(3,4)$，把角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，

则 $\sin\beta=$

（A）$-\frac{4}{5}$　　（B）$\frac{4}{5}$

（C）$-\frac{3}{5}$　　（D）$\frac{3}{5}$

（5）中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题:"三百七十八里关，初步健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还."其大意为:"有一个人走378里路，第一天健步行走，从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了6天后到达目的地."则该人第三天走的路程为

（A）12里　　（B）24里　　（C）48里　　（D）96里

（6）直线$l: x+y+2=0$截圆$M: x^2+y^2=r^2(r>0)$所得劣弧所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则r的值为

（A）$\sqrt{6}$　　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

（7）"$0<x<1$"是"$|x(x-1)|=x(1-x)$"的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知a，b，$c\in\mathbf{R}$，则下列命题为假命题的是

（A）若$a>b$，则$a+c>b+c$

（B）若$a>b$，则$a^{0.4}>b^{0.4}$

（C）若$a>b$，则$(\frac{1}{2})^{a+c}<(\frac{1}{2})^{b+c}$

（D）若$a>b>0$，$c>0$，则$\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$

（9）在平面直角坐标系中，已知$A(-1,0)$，$B(1,0)$两点.若曲线C上存在一点P，使$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$，则称曲线$C$为"合作曲线"，给出下列曲线：

①$2y^2-x^2=1$；②$2x^2+y^2=1$；③$2x+y=4$.

其中"合作曲线"是

（A）①②　　（B）②③　　（C）①　　（D）②

（10）若函数$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\in(-\infty,0],\\ \frac{1}{e^{|\ln x|}}, & x\in(0,+\infty).\end{cases}$则函数$g(x)=f(x)+x+c$零点的个数为

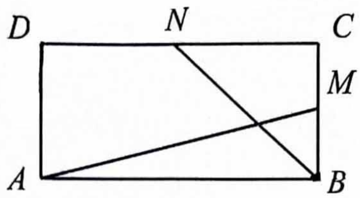
（A）1　　（B）2　　（C）1或2　　（D）1或3

第二部分（非选择题）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的离心率是____.

（12）如图，已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，M，N 分别是 BC，CD 的中点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=$ ____，



（13）设 $(1-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则 $a_0=$____；当 $a_8=-a_9$ 时，$n=$____.

（14）若对任意 $m,n\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 满足 $f(m)f(n)=f(m+n)$，且当 $m>n$ 时，都有 $f(m)<f(n)$，则函数 $f(x)$ 的一个解析式是____.

（15）如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是对角线 AC_1 上的动点（点 P 与点 A，C_1 不重合）．给出下列结论：

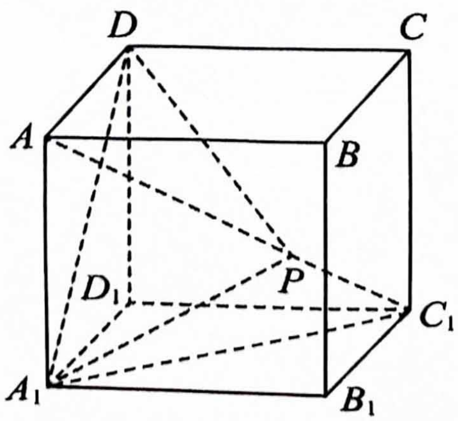
①存在点 P，使得平面 $A_1DP\perp$ 平面 AA_1C_1；

②对任意点 P，都有 $A_1P=DP$；

③ $\triangle A_1DP$ 面积的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；

④若 θ_1 是平面 A_1DP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的夹角，θ_2 是平面 A_1DP 与平面 BB_1C_1C 的夹角，则对任意点 P，都有 $\theta_1\neq\theta_2$.

其中所有正确结论的序号是____.



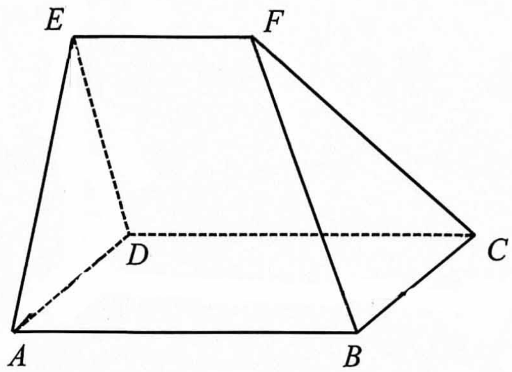
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)（本小题 13 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle ADE$ 是正三角形，$EF=2$，$AB=4$，$AD=2$.

（Ⅰ）求证：$EF \parallel AB$；

（Ⅱ）求二面角 $F-BC-D$ 的余弦值.



(17)（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos 2A=-\dfrac{1}{2}$，$a=7$，且 $a<c$.

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$c=8$，$\angle C$ 为锐角；

条件②：$\cos^2 C=\dfrac{1}{49}$；

条件③：$\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别作答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

《中华人民共和国体育法》规定，国家实行运动员技术等级制度.下表是我国现行《田径运动员技术等级标准》（单位：m）（部分摘抄）：

项目	国际级运动健将	运动健将	一级运动员	二级运动员	三级运动员
男子跳远	8.00	7.80	7.30	6.50	5.60
女子跳远	6.65	6.35	5.85	5.20	4.50

在某市组织的考级比赛中，甲、乙、丙三名同学参加了跳远考级比赛，其中甲、乙为男生、丙为女生. 为预测考级能达到国家二级及二级以上运动员的人数，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：6.60，6.67，6.55，6.44，6.48，6.42，6.40，6.35，6.75，6.25；

乙：6.38，6.56，6.45，6.36，6.82，7.38；

丙：5.16，5.65，5.18，5.86.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

（Ⅰ）估计甲在此次跳远考级比赛中成绩达到二级及二级以上运动员的概率；

（Ⅱ）设 X 是甲、乙、丙在此次跳远考级比赛中成绩达到二级及二级以上运动员的总人数，估计 X 的数学期望 EX；

（Ⅲ）在跳远考级比赛中，每位参加者按规则试跳 6 次，取 6 次试跳中的最好成绩作为其最终成绩.本次考级比赛中，甲已完成 6 次试跳，丙已完成 5 次试跳，成绩（单位：m）如下表：

	第1跳	第2跳	第3跳	第4跳	第5跳	第6跳
甲	6.50	6.48	6.47	6.51	6.46	6.49
丙	5.84	5.82	5.85	5.83	5.86	a

若丙第 6 次试跳的成绩为 a，用 s_1^2，s_2^2 分别表示甲、丙试跳 6 次成绩的方差，当 $s_1^2=s_2^2$ 时，写出 a 的值.（结论不要求证明）

（19）（本小题15分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，左焦点为$F_1(-1,0)$，过$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，点$M$为弦$AB$的中点，$O$是坐标原点，且$M$不与$O$，$F_1$重合.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）若P是OM延长线上一点，且OP的长度为2，求四边形$OAPB$面积的取值范围.

（20）（本小题15分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{ax}+\dfrac{1}{x}$.

（Ⅰ）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）设$g(x)=f'(x)\cdot x^2$，求函数$g(x)$的极大值；

（Ⅲ）若$a<-\mathrm{e}$，求函数$f(x)$的零点个数.

（21）（本小题15分）

已知无穷数列$\{a_n\}$是首项为1，各项均为正整数的递增数列，集合$A=\{k\in\mathbf{N}^*|a_n<k<a_{n+1},n\in\mathbf{N}^*\}$. 若对于集合$A$中的元素$k$，数列$\{a_n\}$中存在不相同的项$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$，使得$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=k$，则称数列$\{a_n\}$具有性质$N(k)$，记集合$B=\{k\,|\,数列\{a_n\}具有性质N(k)\}$.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}2n-1, n\leqslant 4,\\ n+6,\ \ n>4.\end{cases}$写出集合$A$与集合$B$；

（Ⅱ）若集合A与集合B都是非空集合，且集合A中的最小元素为t，集合B中的最小元素为s，当$t\geqslant 3$时，证明：$t=s$；

（Ⅲ）若$\{a_n\}$满足$2a_n\geqslant a_{n+1},n\in\mathbf{N}^*$，证明：$A=B$.