2024 北京东城高三一模

数　　学

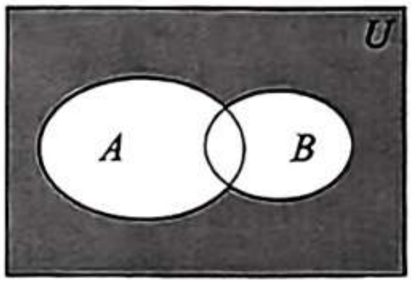
2024.4

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．如图所示，U 是全集，A,B 是U 的子集，则阴影部分所表示的集合是（　）



A．$A\cap B$　B．$A\cup B$　C．$\complement_U(A\cap B)$　D．$\complement_U(A\cup B)$

2．已知$a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0$，且$a<b$，则（　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　B．$ab<b^2$　C．$a^3<b^3$　D．$\lg|a|<\lg|b|$

3．已知双曲线$x^2-my^2=1$的离心率为 2，则$m=$（　）

A．3　B．$\frac{1}{3}$　C．-3　D．$-\frac{1}{3}$

4．设函数$f(x)=\frac{1}{\ln x}+1$，则（　）

A．$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$　B．$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=2$

C．$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=2$　D．$f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)$

5．已知函数$f(x)=t\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0,t>0)$的最小正周期为$\pi$，最大值为$\sqrt{2}$，则函数$f(x)$的图象（　）

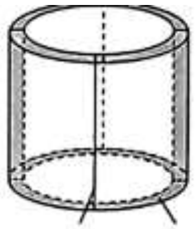
A．关于直线$x=-\frac{\pi}{4}$对称　B．关于点$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$对称

C．关于直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 对称　　　D．关于点 $\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$ 对称

6．已知 $(x+m)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，若 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=81$，则 m 的取值可以为（　）

A．2　B．1　C．-1　D．-2

7．《天工开物》是我国明代科学家宋应星所著的一部综合性科学技术著作，书中记载了一种制造瓦片的方法．某校高一年级计划实践这种方法，为同学们准备了制瓦用的粘土和圆柱形的木质圆桶，圆桶底面外圆的直径为 20cm，高为 20cm．首先，在圆桶的外侧面均匀包上一层厚度为 2cm 的粘土，然后，沿圆桶母线方向将粘土层分割成四等份（如图），等粘土干后，即可得到大小相同的四片瓦．每位同学制作四片瓦，全年级共 500 人，需要准备的粘土量（不计损耗）与下列哪个数字最接近．（参考数据：$\pi\approx 3.14$）（　）



A．0.8m^3　B．1.4m^3　C．1.8m^3　D．2.2m^3

8．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则“$0<a_1<d$”是“$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 为递增数列”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

9．如图 1，正三角形 ABD 与以 BD 为直径的半圆拼在一起，C 是 BD 的中点，O 为 $\triangle ABD$ 的中心．现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折为 $\triangle A_1BD$，记 $\triangle A_1BD$ 的中心为 O_1，如图 2．设直线 CO_1 与平面 BCD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta$ 的最大值为（　）

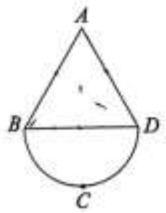


图 1

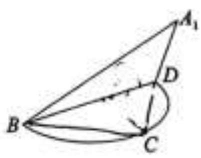


图 2

A．$\dfrac{1}{3}$　B．$\dfrac{1}{2}$　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

10．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图像是一条连续不断的曲线，设函数 $g_a(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(a\in\mathbf{R})$，下列说法正确的是（　）

A．若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则存在实数 a，使得 $g_a(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增

B．对于任意实数a，若$g_a\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$上单调递增，则$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增

C．对于任意实数a，若存在实数$M_1>0$，使得$\left|f\left(x\right)\right|<M_1$，则存在实数$M_2>0$，使得$\left|g_a\left(x\right)\right|<M_2$

D．若函数$g_a\left(x\right)$满足：当$x\in\left(a,+\infty\right)$时，$g_a\left(x\right)\geq 0$，当$x\in\left(-\infty,a\right)$时，$g_a\left(x\right)\leq 0$，则$f\left(a\right)$为$f\left(x\right)$的最小值

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

11．若复数$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则$|z|=$______.

12．设向量$\vec{a}=\left(1,m\right).\vec{b}=\left(3,-4\right)$，且$z\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$，则$m=$______.

13．已知角α,β的终边关于直线$y=x$对称，且$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{1}{2}$，则$\alpha,\beta$的一组取值可以是$\alpha=$______，$\beta=$______.

14．已知抛物线$C_1:y^2=4x$的焦点为F_1，则F_1的坐标为______；抛物线$C_2:y^2=8x$的焦点为F_2，若直线$y=m\left(m\neq 0\right)$分别与C_1,C_2交于P,Q两点；且$|PF_1|-|QF_2|=1$，则$|PQ|=$______.

15．已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，满足$a_{n+1}=ca_n^2+a_n$，其中常数$c\in\mathbf{R}$．给出下列四个判断：

①若$a_1=1,c<0$，则$a_n<\dfrac{1}{n+1}\left(n\geq 2\right)$；

②若$c=-1$，则$a_n<\dfrac{1}{n+1}\left(n\geq 2\right)$；

③若$c=1,a_n>n\left(n\geq 2\right)$，则$a_1>1$；

④$a_1=1$，存在实数c，使得$a_n>n\left(n\geq 2\right)$.

其中所有正确判断的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

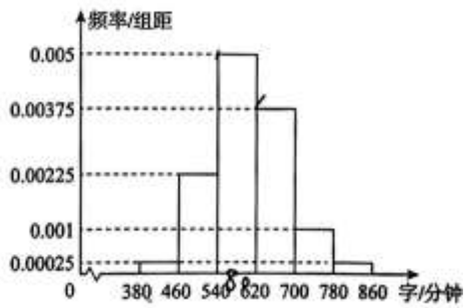
在$\triangle ABC$中，$a\cos C+c\cos A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b\cos B$.

（Ⅰ）求$\angle B$；

（Ⅱ）若$a=12, D$为BC边的中点，且$AD=3$，求b的值.

17.（本小题 13 分）

某中学为了解本校高二年级学生阅读水平现状，从该年级学生中随机抽取 100 人进行一般现代文阅读速度的测试，以每位学生平均每分钟阅读的字数作为该学生的阅读速度，将测试结果整理得到如下频率分布直方图：



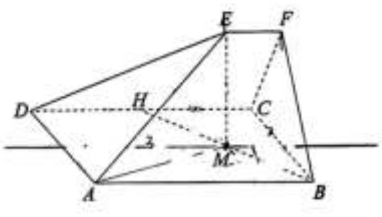
（Ⅰ）若该校高二年级有 1500 人，试估计阅读速度达到 620 字/分钟及以上的人数；

（Ⅱ）用频率估计概率，从该校高二学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中阅读速度达到 540 字/分钟及以上的人数为X，求X的分布列与数学期望$E(X)$；

（Ⅲ）若某班有 10 名学生参加测试，他们的阅读速度如下：506，516，553，592，617，632，667，693，723，776，从这 10 名学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中阅读速度达到 540 字/分钟及以上的人数为Y，试判断数学期望$E(Y)$与（Ⅱ）中的$E(X)$的大小.（结论不要求证明）

18.（本小题 14 分）

如图，在五面体$ABCDEF$中，底面$ABCD$为正方形，$AB=4, EF=1$.



（Ⅰ）求证：$AB /\!/ EF$；

（Ⅱ）若H为CD的中点，M为BH的中点，$EM\perp BH, EM=2\sqrt{3}$，再从条件①、条件②这两个条

件中选择一个作为已知，求直线 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值.

条件①：$ED = EA$；

条件②：$AE = 5$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分，

19．（本小题 15 分）已知函数 $f\left(x\right)=x\ln\left(x-1\right)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，求函数 $g\left(x\right)$ 的最小值；

（Ⅲ）若 $\dfrac{f\left(x\right)}{x-a}>2$，求实数 a 的值.

20．（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为坐标原点，直线 l 是圆 $x^2+y^2=1$ 的一条切线，且直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，若平行四边形 $OMPN$ 的顶点 P 恰好在椭圆 C 上，求平行四边形 $OMPN$ 的面积.

21．（本小题 15 分）

有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>2)$ 中，令

$S\left(p,q\right)=a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q\left(1\le p\le q\le n,p,q\in\mathbf{N}^*\right)$，

当 $p=q$ 时，规定 $S\left(p,q\right)=a_p$.

（Ⅰ）已知数列 $-3,2,-1,3$，写出所有的有序数对 $\left(p,q\right)$，且 $p<q$，使得 $S\left(p,q\right)>0$；

（Ⅱ）已知整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，n 为偶数，若 $S\left(i,n-i+1\right)\left(i=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}\right)$，满足：当 i 为奇数时，$S\left(i,n-i+1\right)>0$；当 i 为偶数时，$S\left(i,n-i+1\right)<0$．求 $\left|a_1\right|+\left|a_2\right|+\cdots+\left|a_n\right|$ 的最小值；

（Ⅲ）已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $S\left(1,n\right)>0$，定义集合 $A=\left\{i\left|S\left(i+1,n\right)>0,i=1,2,\cdots,n-1\right.\right\}$．若 $A=\left\{i_1,i_2,\cdots,i_k\right\}\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 且为非空集合，求证：$S\left(1,n\right)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_2}$.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D （2）C （3）B （4） A （5）C

（6）A （7）B （8）A （9） C （10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11） $\sqrt{2}$ （12） $-\dfrac{4}{3}$ （13） $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$， $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ (答案不唯一)

（14） $(1,0)$， 2 （15）②③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a\cos C+c\cos A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b\cos B$，

根据正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\cos B$.

所以 $\sin(A+C)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\cos B$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)$，

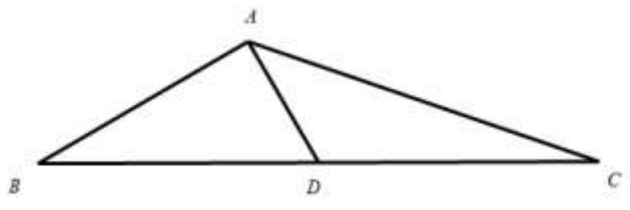
从而得 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\cos B$.

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，

所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $B=\dfrac{\pi}{6}$. ....5 分

（Ⅱ）在 ΔABD 中， $AD=3$， $BD=\dfrac{1}{2}BC=6$， $B=\dfrac{\pi}{6}$.

由正弦定理得 $\dfrac{6}{\sin\angle BAD}=\dfrac{3}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$，



所以 $\sin\angle BAD=1$， $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\angle ADC=\angle BAD+\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$.

在 ΔADC 中，由余弦定理得

$$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\frac{2\pi}{3}=3^2+6^2-2\times3\times6\cos\frac{2\pi}{3}=63.$$

所以 $b=AC=3\sqrt{7}$. ....13 分

（17）（共 13 分）

解:（I）由频率分布直方图可得，100 人的样本中阅读速度达到 620 字/分钟及以上的频率为 $(0.00375+0.001+0.00025)\times 80=0.4$，估计该校高二学生阅读速度达到 620 字/分钟及以上的频率为 0.4,故人数的估计值为 1500×0.4=600 人.　　..........4 分

（II）从该校高二学生中随机抽取 1 人，则此人阅读速度达到 540 字/分钟及以上的概率为

$1-(0.00025+0.00225)\times 80=0.8$.

又 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，

由题意可得 $X\sim B(3,0.8)$，则

$P(X=0)=C_3^0\times 0.2^3\times 0.8^0=0.008$，

$P(X=1)=C_3^1\times 0.2^2\times 0.8^1=0.096$，

$P(X=2)=C_3^2\times 0.2^1\times 0.8^2=0.384$，

$P(X=3)=C_3^3\times 0.2^0\times 0.8^3=0.512$.

所以 X 的分布列为

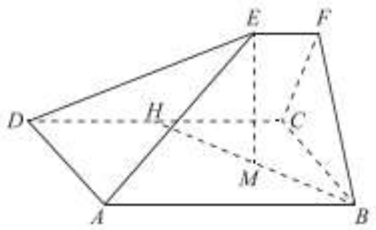
X	0	1	2	3
P	0.008	0.096	0.384	0.512

X 的数学期望为 $EX=3\times 0.8=2.4$.　　.........10 分

（III）$E(X)=E(Y)$.　　.........13 分

（18）（共 14 分）

解:（I）因为四边形 $ABCD$ 是正方形，



所以 $AB//CD$.

又 $AB\not\subset$ 平面$CDEF$, $CD\subset$ 平面$CDEF$，

所以 $AB//$平面$CDEF$.

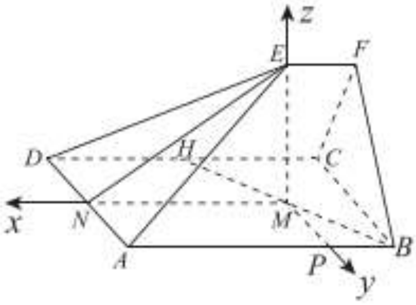
又平面 $ABFE\cap$ 平面 $CDEF=EF$， $AB\subset$ 平面$ABFE$，

所以 $AB//EF$.　　..6 分

（II）选取条件①: $ED=EA$.

取 AD 的中点 N， AB 的靠近点 B 的四等分点 P，

连接 MN, MP, NE，



因为 N 是 AD 中点， M 是 HB 中点，

所以 $MN//AB$， $MP//AD$.

因为 $ED=EA$，所以 $AD\perp NE$.

又 $AD\perp NM$，且 $NM\cap NE=N$，

所以 $AD\perp$ 平面NME.

又因为 $ME\subset$ 平面NME ,所以 $AD\perp ME$.

又 $EM \perp BH$ 且 BH与AD是相交线，所以 $ME \perp$ 平面$ABCD$.

又 $NM, MP \subset$ 平面$ABCD$,

所以 $ME \perp NM, ME \perp MP$.

如图，建立空间直角坐标系 $M-xyz$，

由题意得，$A(3,2,0), C(-1,-2,0), D(3,-2,0),\ F(0,0,2\sqrt{3}), F(-1,0,2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CF}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DA}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{DE}=(-3,2,2\sqrt{3})$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}4y=0,\\ -3x+2y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$

令 $x=2$，则 $y=0, z=\sqrt{3}$.于是 $\boldsymbol{n}=(2,0,\sqrt{3})$.

设直线 CF 与平面 ADE 所成角为 α，则

$$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CF}|}=\frac{6}{4\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

所以 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$. ....14 分

选取条件②: $AE=5$.

在 ΔMAB 中，$MB=\dfrac{1}{2}HB=\sqrt{5}$，$AB=4$，

$\tan\angle MBA=2$, 则 $\cos\angle MBA=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

于是，$MA=\sqrt{MB^2+AB^2-2MB\cdot AB\cos\angle MBA}=\sqrt{13}$.

因为 $ME=2\sqrt{3}, AE=5$，于是，$AE^2=ME^2+AM^2$，所以 $ME\perp AM$.

又 $ME\perp BH$，$BH\cap AM=M$ 且 $BH, AM\subset$ 平面$ABCD$，

所以 $ME\perp$ 平面$ABCD$.

取 AD 的中点 N，取 AB 的靠近点 B 的四等分点 P，

连接 MN, MP，如图建系,

下同条件①，可得 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$. ....14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}=\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+1(x>1)$.

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率 $k=f'(2)=2$.

又因为 $f(2)=0$，所以切点为 $(2,0)$.

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=2x-4$ . ...5 分

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+1(x>1)$,

$$g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

当 x 变化时，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化如下表：

x	（1，2）	2	（2，+∞）
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

当 $x=2$ 时，$f'(x)_{\min}=2$ . ...10 分

（Ⅲ）若 $a\neq 2$，则 $\dfrac{f(2)}{2-a}=0$，不合题意；

若 $a=2$， 设 $\varphi(x)=f(x)-2(x-2)$,

由（II）知，$\varphi'(x)=f'(x)-2\geq 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(2)=0$，所以

当 $x\in(1,2)$ 时，$\varphi(x)<0,\ x-2<0,\ \dfrac{\varphi(x)}{x-2}>0,\ \dfrac{f(x)}{x-2}>2$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0,\ x-2>0,\ \dfrac{\varphi(x)}{x-2}>0,\ \dfrac{f(x)}{x-2}>2$.

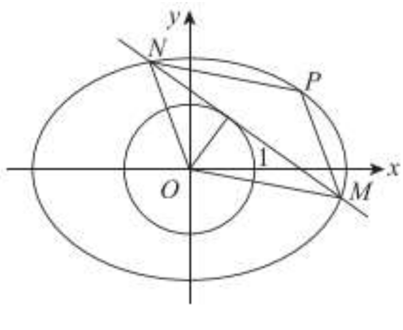
所以 $a=2$ 符合题意.

综上所述 $a=2$ . ...15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由已知可得 $\begin{cases}2b=2\sqrt{3}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{6}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ . ...5 分



（II）当直线 l 斜率存在时，设直线 $l:y=kx+m$,

由直线与圆相切得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，化简得 $m^2=k^2+1$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $P(x_1+x_2,y_1+y_2)$,

$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+2y^2=6 \end{cases} \Rightarrow \left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$， $y_1+y_2=\dfrac{2m}{2k^2+1}$.

因为 $P(-\dfrac{4km}{2k^2+1},\dfrac{2m}{2k^2+1})$ 在椭圆 C 上，

所以 $\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)^2+2\left(\dfrac{2m}{2k^2+1}\right)^2=6$，即 $8k^2m^2+4m^2=3\left(4k^4+4k^2+1\right)$，

即 $8k^2\left(k^2+1\right)+4\left(k^2+1\right)=12k^4+12k^2+3$，解得 $k^4=\dfrac{1}{4}$， $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $m^2=k^2+1=\dfrac{3}{2}$.

此时弦长 $|MN|=\sqrt{k^2+1}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times 3=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，

因为 O 到直线 l 的距离 $d=1$，

所以平行四边形 $OMPN$ 的面积 $S=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

当直线 l 斜率不存在时，不妨设直线 $l: x=1$，则 $M(1,-\dfrac{\sqrt{10}}{2})$， $N(1,\dfrac{\sqrt{10}}{2})$，

所以 $P\left(2,0\right)$ 不在椭圆上,不合题意. ....15 分

(21)（共 15 分）

解:（Ⅰ） $(1,4)$,$(2,3)$,$(2,4)$,$(3,4)$. ....4 分

（II）由已知得 $S(k,n-k+1)$ 与 $S(k+1,n-k)$ 异号，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，$k\le\dfrac{n}{2}-1$.

由于 $|a_k+a_{n-k+1}|=|S(k,n-k+1)-S(k+1,n-k)|=|S(k,n-k+1)|+|S(k+1,n-k)|\ge 2$.

因此 $|a_k|+|a_{n-k+1}|\ge 2$，$k=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$.

而 $\left|a_{\frac{n}{2}}\right|+\left|a_{\frac{n}{2}+1}\right|\ge 1$，$k=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$，所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\ge n-1$.

令 $n=2m$. 当 m 为奇数时，取 $a_1=a_3=\cdots=a_m=1$，$a_2=a_4=\cdots=a_{m-1}=-1$，

$a_{m+3}=a_{m+5}=\cdots=a_{2m}=1$，$a_{m+2}=a_{m+4}=\cdots=a_{2m-1}=-1$，$a_{m+1}=0$ 时，

有 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=n-1$.

当 m 为偶数时，取 $a_1=a_3=\cdots=a_{m-1}=1$， $a_2=a_4=\cdots=a_m=-1$，

$a_{m+3}=a_{m+5}=\cdots=a_{2m-1}=-1$，$a_{m+2}=a_{m+4}=\cdots=a_{2m}=1$，$a_{m+1}=0$ 时， $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=n-1$.

综上， $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ 的最小值为 $n-1$. ....9 分

（III）对于数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$， $A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，不妨设 $i_1<i_2<\cdots<i_k$.

因此要证： $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$，

（1）首先考虑 $i_{m+1}-i_m\ge 2(m=1,2,\cdots,k-1)$，$2\le i_1\le i_k\le n-1$ 的情况.

由于 $S(i_1,n)\le 0, S(i_1+1,n)>0$，所以 $a_{i_1}<0$. 同理 $a_{i_2}<0,\cdots a_{i_k}<0$.

由已知 $S(1,n)>0$，所以 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

（2）下面考虑 $i_1, i_2, \cdots, i_k (i_1\ge 2)$ 中有一段是连续的正整数的情况，即

$i_p-1\notin A$, $i_q+1\notin A$，$i_{m+1}-i_m=1, m=p, p+1, \cdots, q-1(1\le p\le q-1\le k-1)$，

由于 $S(i_p,n)-S(i_q+1,n)=a_{i_p+1}+a_{i_p+2}+\cdots+a_{i_q}$，由已知 $S(i_p,n)-S(i_q+1,n)<0$,

这说明此连续的 $q-p$ 项的和为负.

同理，当含有多段的连续正整数的情况时，每段的和为负.

再由（1）的结论可得：$S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

（2）若在（1），（2）中 $i_1=1, i_2=2,\cdots,i_m=m, i_m+1\notin A$，由于 $S(i_m+1,n)>0$,

此时去掉前 m 项，则可转化为（1），（2）的情况. 所以有 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

（4）若 $A=\{1,2,\cdots m\}(m\le n-1)$，则 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n>0$，所以此时有 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$

综上所述，结论成立.............15 分