2024北京海淀高三一模

数　　学

本试卷共9页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集$U=\{x|-2\le x\le 2\}$，集合$A=\{x|-1\le x<2\}$，则$C_U A=$

A. $(-2,-1)$　B. $[-2,-1]$　C. $(-2,-1)\cup\{2\}$　D. $[-2,-1)\cup\{2\}$

2. 若复数z满足$\mathrm{i}\cdot z=1+\mathrm{i}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}=$

A. $1+\mathrm{i}$　B. $1-\mathrm{i}$　C. $-1+\mathrm{i}$　D. $-1-\mathrm{i}$

3. 已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和. 若$a_1=2a_2$，公差$d\ne 0$，$S_m=0$，则m的值为

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=(2,0)$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，则$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$上的一点到焦点$(-\sqrt{5},0)$的距离比到焦点$(\sqrt{5},0)$的距离大$b$，则该双曲线的方程为

A. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ B. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ C. $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ D. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

6. 设α,β是两个不同的平面，l,m是两条直线，且$m\subset\alpha$，$l\perp\alpha$. 则“$l\perp\beta$”是“$m//\beta$”的

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

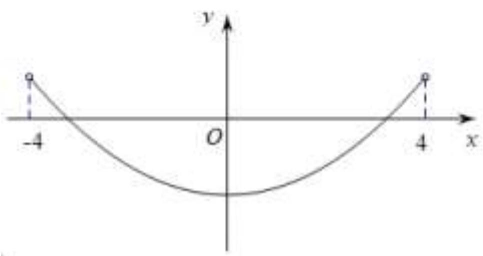
7. 已知$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0\\ \lg(x+1), & x>0\end{cases}$，函数$f(x)$的零点个数为$m$，过点$(0,2)$与曲线$y=f(x)$相切的直线的条数为$n$，则$m,n$的值分别为

A. 1,1　B. 1,2　C. 2,1　D. 2,2

8. 在平面直角坐标系xOy中，角α以Ox为始边，终边在第三象限. 则

A. $\sin\alpha-\cos\alpha\le\tan\alpha$　B. $\sin\alpha-\cos\alpha\ge\tan\alpha$

C. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<\tan\alpha$　D. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>\tan\alpha$



9. 函数$f(x)$是定义在$(-4,4)$上的偶函数，其图象如图所示，

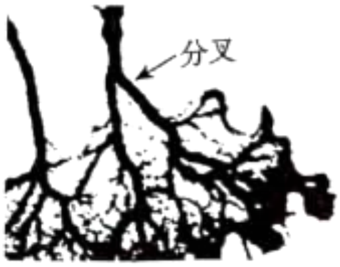
$f(3)=0$. 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则关于 x 的不等式 $f(x+1)\cdot f'(x)\geq 0$ 的解集是

A. $[0,2]$

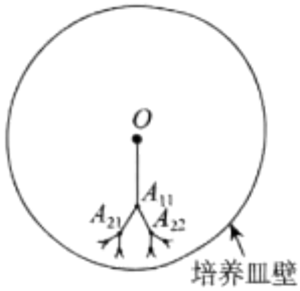
B. $[-3,0]\cup[3,4)$

C. $(-5,0]\cup[2,4)$

D. $(-4,0]\cup[2,3)$



10. 某生物兴趣小组在显微镜下拍摄到一种黏菌的繁殖轨迹，如图1. 通过观察发现，该黏菌繁殖符合如下规律：①黏菌沿直线繁殖一段距离后，就会以该直线为对称轴分叉（分叉的角度约为60°），再沿直线繁殖，…；②每次分叉后沿直线繁殖的距离约为前一段沿直线繁殖的距离的一半. 于是，该组同学将整个繁殖过程抽象为如图2所示的一个数学模型：黏菌从圆形培养皿的中心 O 开始，沿直线繁殖到 A_{11}，然后分叉向 A_{21} 与 A_{22} 方向继续繁殖，其中 $\angle A_{21}A_{11}A_{22}=60^\circ$，且 $A_{11}A_{21}$ 与 $A_{11}A_{22}$ 关于 OA_{11} 所在直线对称，$A_{11}A_{21}=A_{11}A_{22}=\frac{1}{2}OA_{11},\cdots$. 若 $OA_{11}=4\text{cm}$，为保证黏菌在繁殖过程中不会碰到培养皿壁，则培养皿的半径 r $(r\in\mathbf{N}^*$, 单位: cm$)$ 至少为



A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知 $\ln\frac{a}{b}=2$，则 $\ln a^2-\ln b^2=$_________.

12. 已知 $\odot C:(x-1)^2+y^2=3$，线段 AB 是过点 $(2,1)$ 的弦，则 $|AB|$ 的最小值为_________.

13. 若 $(x-2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0=$_________；$\frac{a_1+a_3}{a_0+a_2+a_4}=$_________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin 2x$，则 $f(\frac{5}{4}\pi)=$_________；函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心的坐标为_________.

15. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^3-x}$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 是奇函数；

② $\forall k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq 0$，关于 x 的方程 $f(x)-kx=0$ 恰有两个不相等的实数根；

③已知 P 是曲线 $y=f(x)$ 上任意一点，$A(-\frac{1}{2},0)$，则 $|AP|\geq\frac{1}{2}$；

④设 $M(x_1,y_1)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一点，$N(x_2,y_2)$ 为曲线 $y=-f(x)$ 上一点. 若 $|x_1+x_2|=1$，则 $|MN|\geq 1$.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$b\sin C+\sqrt{3}c\cos B=2c$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）若 $a=2\sqrt{3}$，$b+c=4$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17.（本小题 14 分）

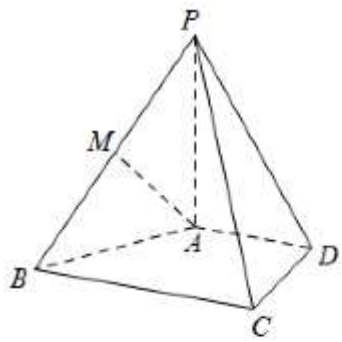
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$，M 为 BP 的中点，$AM\,//$ 平面 CDP.

（Ⅰ）求证：$BC=2AD$；

（Ⅱ）若 $PA\perp AB$，$AB=AP=AD=CD=1$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使四棱锥 $P-ABCD$ 存在且唯一确定.

（ⅰ）求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（ⅱ）设平面 $CDP\cap$ 平面 $BAP=l$，求二面角 $C-l-B$ 的余弦值.



条件①：$BP=DP$；

条件②：$AB\perp PC$；

条件③：$\angle CBM=\angle CPM$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（ⅰ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 13 分）

某学校为提升学生的科学素养，要求所有学生在学年中完成规定的学习任务，并获得相应过程性积分. 现从该校随机抽取100 名学生，获得其科普测试成绩（百分制，且均为整数）及相应过程性积分数据，整理如下表：

科普测试成绩 x	科普过程性积分	人数
$90\le x\le 100$	4	10
$80\le x<90$	3	a
$70\le x<80$	2	b
$60\le x<70$	1	23
$0\le x<60$	0	2

（Ⅰ）当 $a=35$ 时，

（ⅰ）从该校随机抽取一名学生，估计这名学生的科普过程性积分不少于3分的概率；

（Ⅱ）从该校科普测试成绩不低于80 分的学生中随机抽取 2 名，记 X 为这 2 名学生的科普过程性积分之和，估计 X 的数学期望 $E(X)$；

（Ⅱ）从该校科普过程性积分不高于1分的学生中随机抽取一名，其科普测试成绩记为 Y_1，上述100 名学生科普测试成绩的平均值记为 Y_2. 若根据表中信息能推断 $Y_1\le Y_2$ 恒成立，直接写出 a 的最小值.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆$G: x^2+my^2=m$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，A_1, A_2分别是G的左、右顶点，F是G的右焦点.

（Ⅰ）求m的值及点F的坐标；

（Ⅱ）设P是椭圆G上异于顶点的动点，点Q在直线$x=2$上，且$PF\perp FQ$，直线PQ与x轴交于点M. 比较$|MP|^2$与$|MA_1|\cdot|MA_2|$的大小.

20.（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=xe^{a-\frac{1}{2}x}$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若函数$g(x)=|f(x)+e^{-2}a|$，$x\in(0,+\infty)$存在最大值，求a的取值范围.

21.（本小题 15 分）

已知$Q: a_1, a_2, \cdots a_{m^2}$ $(m\geq 2, m\in\mathbf{N}^*)$为有穷正整数数列，其最大项的值为$m$，

且当$k=0,1,\cdots,m-1$时，均有$a_{km+i}\neq a_{km+j}$ $(1\leq i<j\leq m)$. 设$b_0=0$，对于$t\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，

定义$b_{t+1}=\min\{n \mid n>b_t, a_n>t\}$，其中，$\min M$表示数集$M$中最小的数.

（Ⅰ）若$Q: 3,1,2,2,3,1,2,3$，写出b_1, b_3的值；

（Ⅱ）若存在Q满足：$b_1+b_2+b_3=11$，求m的最小值；

（Ⅲ）当$m=2024$时，证明：对所有Q，$b_{2023}\leq 20240$.

海淀区 2023—2024 学年第二学期期中练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）A	（3）B	（4）C	（5）D
（6）A	（7）B	（8）C	（9）D	（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）4　　　　（12）2

（13）16　$-\dfrac{40}{41}$　　　　（14）-1　$(-\dfrac{\pi}{4},0)$（答案不唯一）

（15）②③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 及 $b\sin C+\sqrt{3}c\cos B=2c$，得

$\sin B\sin C+\sqrt{3}\sin C\cos B=2\sin C$.

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$.

所以 $\sin B+\sqrt{3}\cos B=2$.

所以 $\sin(B+\dfrac{\pi}{3})=1$.

因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $a=2\sqrt{3}$，

所以 $12+c^2-b^2=6c$.

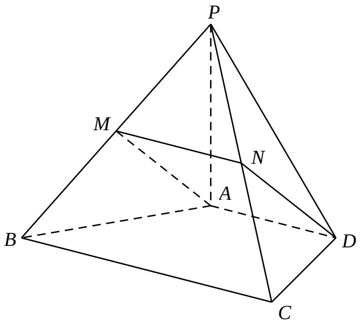
因为 $b+c=4$，

所以 $c=2$.

所以△ABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$.

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 PC 的中点 N，连接 MN， ND.



因为 M 为 BP 的中点，

所以 $MN=\frac{1}{2}BC$， $MN // BC$.

因为 $AD // BC$，

所以 $AD // MN$.

所以 M， N， D， A 四点共面.

因为 $AM //$ 平面 CDP，平面 $MNDA \cap$ 平面 $CDP = DN$，

所以 $AM // DN$.

所以 $MN = AD$.

所以 $BC = 2AD$.

（Ⅱ）取 BC 的中点 E，连接 AE， AC.

由（Ⅰ）知 $BC = 2AD$.

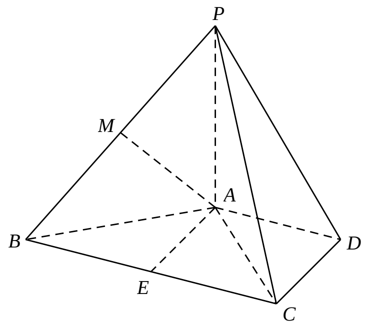
所以 $EC = AD$.

因为 $EC // AD$，

所以四边形 $AECD$ 是平行四边形.

所以 $EC = AD = 1$， $AE = CD$.

因为 $AB = CD = 1$，所以 $AE = 1 = \frac{1}{2}BC$.



所以 $\angle BAC = 90°$，即 $AB \perp AC$.

选条件①： $BP = DP$.

（ⅰ）因为 $AB = AD = 1$， $PA = PA$，

所以 $\triangle PAB \cong \triangle PAD$.

所以 $\angle PAB = \angle PAD$.

因为 $AB \perp PA$，所以 $\angle PAB = 90°$.

所以 $\angle PAD = 90°$，即 $AP \perp AD$.

所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$.

（ⅱ）由（ⅰ）知 $AP \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AP \perp AC$.

因为 $PA \perp AB$， $AP = 1$，

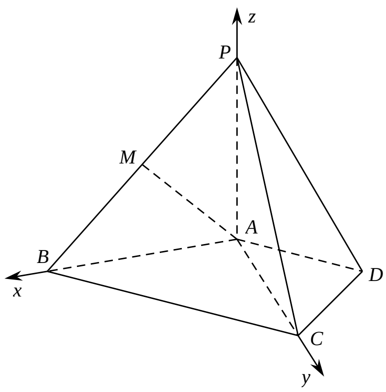
如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则

$P(0,0,1)$， $C(0,\sqrt{3},0)$， $D(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

所以 $\overrightarrow{CD} = (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$， $\overrightarrow{PD} = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$， $\overrightarrow{AC} = (0,\sqrt{3},0)$.

设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，则



$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - z = 0. \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}$， 则 $y = -1$， $z = -\sqrt{3}$. 于是

$\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.

因为 $\overrightarrow{AC}$ 为平面 PAB 的法向量，且

$\cos < \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{n} > = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角 $C-l-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

选条件③： $\angle CBM = \angle CPM$.

（ⅰ）所以 $CB = CP$.

因为 $AB = AP = 1$， $CA = CA$，

所以 $\triangle ABC \cong \triangle APC$.

所以 $\angle PAC = \angle BAC = 90°$， 即 $PA \perp AC$.

因为 $PA \perp AB$，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

（ⅱ）同选条件①.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=35$ 时，

（ⅰ）由表可知，科普过程性积分不少于 3 分的学生人数为 $10+35=45$.

所以从该校随机抽取一名学生，这名学生的科普过程性积分不少于 3 分的频率为 $\frac{45}{100}=0.45$.

所以从该校随机抽取一名学生，这名学生的科普过程性积分不少于 3 分的概率估计为 0.45.

（ⅱ）根据题意，从样本中成绩不低于 80 分的学生中随机抽取一名，这名学生的科普过程性积分为 3 分的频率为 $\frac{35}{35+10}=\frac{7}{9}$.

所以从该校学生活动成绩不低于 80 分的学生中随机抽取一名，这名学生的科普过程性积分为 3 分的概率估计为 $\frac{7}{9}$. 同理，从该校学生活动成绩不低于 80 分的学生中随机抽取一名，这名学生的科普过程性积分为 4 分的概率估计为 $\frac{2}{9}$.

由表可知 X 的所有可能取值为 $6,7,8$.

$P(X=6)=\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$， $P(X=7)=2\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{28}{81}$，

$P(X=8)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$.

所以 X 的数学期望 $E(X)=6\times\frac{49}{81}+7\times\frac{28}{81}+8\times\frac{4}{81}=\frac{58}{9}$.

（Ⅱ）7.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意知 $m>1$．设 $a^2=m$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=m-1$．

因为 G 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $a^2=2c^2$，即 $m=2(m-1)$．

所以 $m=2$，$c=1$．

所以 m 的值为 2，点 F 的坐标为 $(1,0)$．

（Ⅱ）由题意可设 $P(x_0,y_0)$（$x_0y_0\neq 0$），$Q(2,y_Q)$，$M(x_M,0)$，则 $x_0<2$，$x_0\neq x_M$，

$x_0^2+2y_0^2=2$．　①

因为 $PF\perp FQ$，

所以 $(x_0-1,y_0)\cdot(1,y_Q)=0$．

所以 $y_Q=\dfrac{1-x_0}{y_0}$．　②

因为 Q，P，M 三点共线，$x_0\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$，

所以 $\dfrac{y_Q-y_0}{2-x_0}=\dfrac{y_0}{x_0-x_M}$．　③

由①②③可得 $x_M=\dfrac{2}{x_0}$．

由（Ⅰ）可知 $A_1(-\sqrt{2},0)$，$A_2(\sqrt{2},0)$．

所以 $|MP|^2-|MA_1|\cdot|MA_2|=(x_0-\dfrac{2}{x_0})^2+y_0^2-(\dfrac{2}{x_0}+\sqrt{2})(\dfrac{2}{x_0}-\sqrt{2})$

$$=x_0^2-4+\frac{4}{x_0^2}+1-\frac{x_0^2}{2}-\frac{4}{x_0^2}+2=\frac{x_0^2}{2}-1.$$

所以 $|MP|^2-|MA_1|\cdot|MA_2|=\dfrac{x_0^2}{2}-1<0$，即 $|MP|^2<|MA_1|\cdot|MA_2|$．

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x\cdot e^{a-\frac{1}{2}x}$，

所以 $f'(x)=e^{a-\frac{1}{2}x}-\frac{x}{2}\cdot e^{a-\frac{1}{2}x}=e^{a-\frac{1}{2}x}(1-\frac{x}{2})$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,2)$；单调递减区间是 $(2,+\infty)$.

（Ⅱ）令 $h(x)=f(x)+e^{-2}a$，则 $h'(x)=f'(x)$.

由（Ⅰ）可得：函数 $h(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,2)$；单调递减区间是 $(2,+\infty)$.

所以 $h(x)$ 在 $x=2$ 时取得最大值 $h(2)=2\cdot e^{a-1}+e^{-2}a$.

所以当 $x>2$ 时，$h(x)=x\cdot e^{a-\frac{1}{2}x}+e^{-2}a>e^{-2}a=h(0)$；当 $0<x<2$ 时，$h(x)>h(0)$，

即当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\in(h(0),h(2)]$.

所以 $g(x)=|h(x)|$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值的充分必要条件是 $|2\cdot e^{a-1}+e^{-2}a|\geq|e^{-2}a|$，即 $\frac{2\cdot e^{a-1}+e^{-2}a+e^{-2}a}{2}=e^{a-1}+e^{-2}a\geq 0$.

令 $m(x)=e^{x-1}+e^{-2}x$，则 $m'(x)=e^{x-1}+e^{-2}$.

因为 $m'(x)=e^{x-1}+e^{-2}>0$，所以 $m(x)$ 是增函数.

因为 $m(-1)=e^{-2}-e^{-2}=0$，

所以 $m(a)=e^{a-1}+e^{-2}a\geq 0$ 的充要条件是 $a\geq -1$.

所以 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$b_1=1$，$b_3=6$．

（Ⅱ）由题意知 $m\geq 3$．

当 $m=3$ 时，因为 $a_1\geq 1$，$b_0=0$，所以 $b_1=1$．

因为 $a_2\neq a_3$，且 a_2，a_3 均为正整数，

所以 $a_2>1$，或 $a_3>1$．

所以 $b_2\leq 3$．

因为 a_4，a_5，a_6 是互不相等的正整数，所以必有一项大于 2．

所以 $b_3\leq 6$．

所以 $b_1+b_2+b_3\leq 10$，不合题意.

当 $m=4$ 时，对于数列 Q：$4,1,3,2,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4$ 有

$b_1+b_2+b_3=1+3+7=11$．

综上所述，m 的最小值为 4．

（Ⅲ）因为 $b_{t+1}=\min\{n\,|\,n>b_t,a_n>t\}$，$t=0,1,\cdots,2023$，

所以 $b_{t+1}>b_t$，$t=0,1,\cdots,2023$．

（ⅰ）若 $b_{t+1}\leq 2024$，则当 $n<b_{t+1}$ 时，至少以下情况之一成立：

①$a_n\leq t$，这样的 n 至多有 t 个；

②存在 $i\leq t$，$b_i=n$，这样的 n 至多有 t 个.

所以小于 b_{t+1} 的 n 至多有 $2t$ 个.

所以 $b_{t+1}\leq t+t+1=2t+1$．

令 $2t+1\le 2024$，解得 $t+1\le 1012$.

所以 $b_{1012}\le 2024$.

（ⅱ）对 $k\in \mathbf{N}^*$，若 $b_t\le 2024k<b_{t+1}$，且 $2024k<b_{t+l+1}\le 2024(k+1)$，因为 $b_{t+l+1}=\min\{n\,|\,n>b_{t+l},\ a_n>t+l\}$，所以当 $n\in(2024k,\ b_{t+l+1})$ 时，至少以下情况之一成立：

① $a_n\le t+l$，这样的 n 至多有 $t+l$ 个；

② 存在 i，$t<i\le t+l$ 且 $b_i=n$，这样的 n 至多有 l 个.

所以 $b_{t+l+1}\le 2024k+t+l+l+1=2024k+t+2l+1$.

令 $t+2l+1\le 2024$，解得 $l\le[\frac{2023-t}{2}]$，即 $t+l+1\le[\frac{2025+t}{2}]$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

所以当 $b_t\le 2024k<b_{t+1}$ 时，$b_{[\frac{2025+t}{2}]}\le 2024(k+1)$；

综上所述，定义 $C_1=1012$，$C_{k+1}=[\frac{2025+C_k}{2}]$，则 $b_{C_k}\le 2024k$.

依次可得：$C_2=1518$，$C_3=1771$，$C_4=1898$，$C_5=1961$，$C_6=1993$，$C_7=2009$，$C_8=2017$，$C_9=2021$，$C_{10}=2023$.

所以 $b_{2023}\le 2024\times 10=20240$.