

# 2024 北京首都师大附中初三零模



## 数 学

### 一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1. 2021 年 12 月 9 日 15 时 40 分，“天宫课堂”第一课开始，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，其中 6000 万用科学记数法表示为（ ）
- A.  $6000 \times 10^4$       B.  $6 \times 10^7$       C.  $0.6 \times 10^8$       D.  $6 \times 10^8$
2. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕.2022 年北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源；北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”是以熊猫为原型进行设计创作；北京冬季残奥会的吉祥物“雪容融”是以灯笼为原型进行设计创作. 下列冬奥元素图片中（ ）



A



B



C



D

3. 下列运算正确的是（ ）

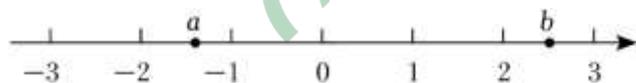
A.  $a \cdot a^2 = a^3$

B.  $a^6 \div a^2 = a^3$

C.  $2a^2 - a^2 = 2$

D.  $(3a^2)^2 = 6a^4$

4. 若实数  $a, b$  在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是（ ）



A.  $|a| < |b|$

B.  $ab > 0$

C.  $a < -b$

D.  $a - b > 0$

5. 若  $a+b=1$ ，则代数式  $(\frac{a}{b} - 1) \cdot \frac{b}{a^2 - b^2}$  的值为（ ）

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

6. 一个不透明的盒子中装有 15 个除颜色外无其他差别的小球，其中有 2 个黄球和 3 个绿球，其余都是红球，恰好是红球的概率为（ ）

A.  $\frac{2}{15}$

B.  $\frac{1}{5}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{2}{3}$

7. 一组数据 1, 2, 2, 3, 5，将这组数据中的每一个数都加上  $a$  ( $a \neq 0$ )，得到一组新数据  $1+a, 2+a, 3+a$ ，这两组数据的以下统计量相等的是（ ）

A. 平均数

B. 众数

C. 中位数

D. 方差

8. 某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压  $P$  (单位：千帕) (单位：立方米) 的变化而变化， $P$  随  $V$  的变化情况如下表所示，气球内气体的气压  $P$  与气球内气体的体积  $V$  的函数关系最可能是（ ）

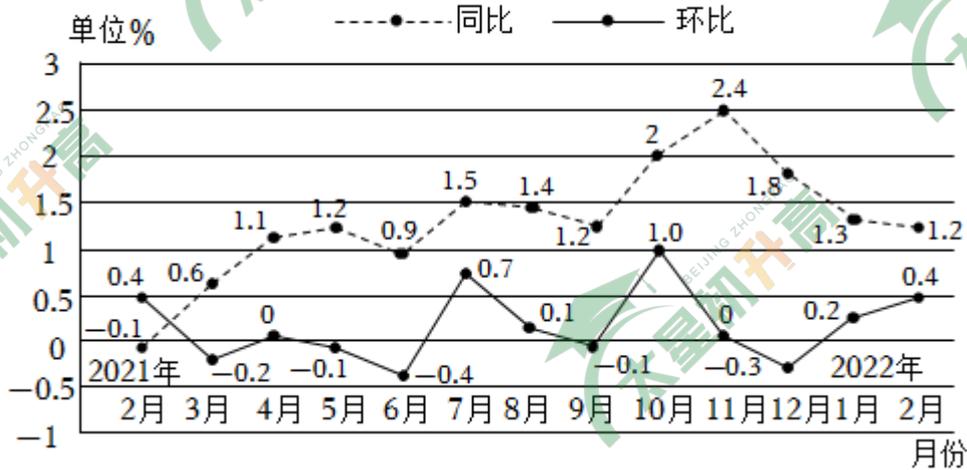




15. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若反比例函数  $y = \frac{6}{x}$  的图象经过点  $A(2, m)$   $(-2, n)$ , 则  $m$  \_\_\_\_\_  $n$  (填 “>” “=” 或 “<”).

16. 下图是国家统计局发布的 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格涨跌幅情况折线图 (注: 2022 年 2 月与 2021 年 2 月相比较成为同比, 2022 年 2 月与 2022 年 1 月相比较称为环比).

北京市居民消费价格涨跌情况折线图



根据图中信息, 有下面四个推断:

- ① 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比均上涨;
- ② 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比有涨有跌;
- ③ 在北京居民消费价格同比数据中, 2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差;
- ④ 在北京居民消费价格环比数据中, 2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数.

所有合理推断的序号是 \_\_\_\_\_.

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-22 题, 每小题 5 分, 第 23-26 题, 每小题 5 分, 第 27-28 题, 每小题 5 分) 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 计算:  $(1-\sqrt{3})^0 + |-2| - 2\cos 45^\circ + (\frac{1}{4})^{-1}$ .

18. 解方程:  $\frac{3x}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$ .

19. 已知  $x^2 - 3x - 1 = 0$ , 求代数式  $(x+2)(x-2) - x(3x-6)$

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4x + 2m - 1 = 0$  有两个不相等的实数根.

- (1) 求  $m$  的取值范围;
- (2) 若  $m$  为正整数, 且该方程的根都是整数, 求  $m$  的值.

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-1, 3)$ .

- (1) 求这个反比例函数的解析式;



(2) 当  $x < -1$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y = -x + n$  的值大于反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ), 直接写出  $n$  的取值范围.

22. 京剧脸谱是京剧艺术独特的表现形式. 京剧表演中, 经常用脸谱象征人物的性格, 品质, 黑脸代表强悍勇猛. 现有三张不透明的卡片, 其中两张卡片的正面图案为“红脸”, 卡片除正面图案不同外, 其余均相同, 从中随机抽取一张, 记录图案后放回



请用画树状图或列表的方法, 求抽出的两张卡片上的图案都是“红脸”的概率. (图案为“红脸”的两张卡片分别记为  $A_1$ 、 $A_2$ , 图案为“黑脸”的卡片记为  $B$ )

23. 2019 年 9 月 29 日, 中国女排以十一连胜的战绩夺得女排世界杯冠军, 成为世界三大赛的“十冠王”. 2019 年女排世界杯的参赛队伍为 12 支, 五局三胜, 积分规则如下: 比赛中以 3 - 0 或者 3 - 1 取胜的球队积 3 分; 而在比赛中以 3 - 2 取胜的球队积 2 分, 负队积 1 分

- (1) 中国队 11 场胜场中只有一场以 3 - 2 取胜, 请将中国队的总积分填在表格中;
- (2) 巴西队积 3 分取胜的场次比积 2 分取胜的场次多 5 场, 且负场积分为 1 分, 总积分见表格

名次	球队	场次	胜场	负场	总积分
1	中国	11	11	0	
2	美国	11	10	1	28
3	俄罗斯	11	8	3	23
4	巴西	11			21

24. 如图, 在一次学校组织的社会实践活动中, 小龙看到农田上安装了很多灌溉喷枪, 他发现这种喷枪射程是可调节的, 且喷射的水流越高射程越远, 水流的最高点与喷枪的水平距离记为  $x$ , 水流的最高点到地面的距离记为  $y$ .

$y$  与  $x$  的几组对应值如下表:

$x$ (单位: $m$ )	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	...
$y$ (单位: $m$ )	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	2	...

- (1) 该喷枪的出水口到地面的距离为 \_\_\_\_\_  $m$ ;
- (2) 如图 2, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 描出表中各组数值所对应的点;
- (3) 结合 (2) 中的图象 (图 2), 估算当水流的最高点与喷枪的水平距离为  $8m$  时 \_\_\_\_\_  $m$  (精确到



1m). 根据估算结果, 计算此时水流的射程约为 \_\_\_\_\_ m (精确到 1m).

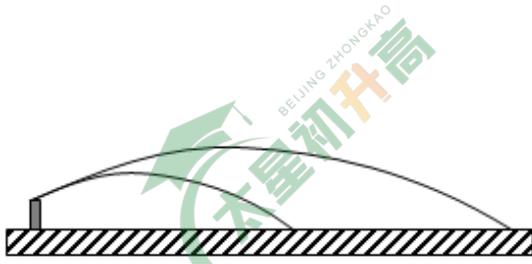


图1

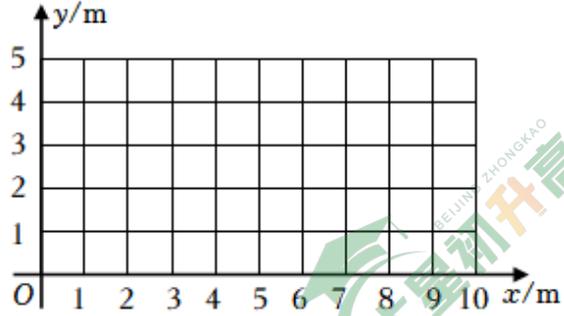


图2

25. 甲, 乙两个小区各有 300 户居民, 为了解两个小区 3 月份用户使用燃气量情况, 并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 甲小区用气量频数分布直方图如下 (数据分成 5 组:  $5 \leq x < 10$ ,  $10 \leq x < 15$ ,  $15 \leq x < 20$ ,  $20 \leq x < 25$ ,  $25 \leq x < 30$ )

b. 甲小区用气量的数据在  $15 \leq x < 20$  这一组的是:

15 &nbsp;&nbsp;&nbsp;

15 &nbsp;&nbsp;&nbsp; 16 &nbsp;&nbsp;&nbsp; 16 &nbsp;&nbsp;&nbsp;

16 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 16 &nbsp;&nbsp;&nbsp;

18 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 18 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 18 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 18 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 18 &nbsp;&nbsp;&nbsp; &nbsp;&nbsp;&nbsp; 19

c. 甲, 乙两小区用气量的平均数、中位数、众数如下:

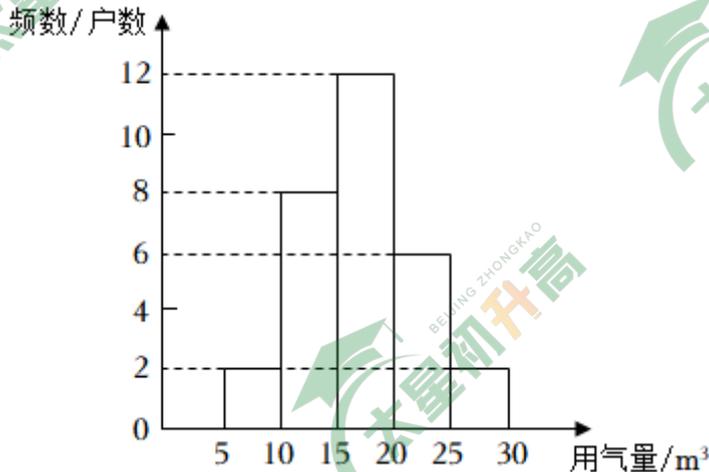
小区	平均数	中位数	众数
甲	17.2	$m$	18
乙	17.7	19	15

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 写出表中  $m$  的值;

(2) 在甲小区抽取的用户中, 记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为  $p_1$ . 在乙小区抽取的用户中, 记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为  $p_2$ . 比较  $p_1, p_2$  的大小, 并说明理由;

(3) 估计甲小区中用气量超过 15 立方米的户数.



26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 1$  ( $a > 0$ ).

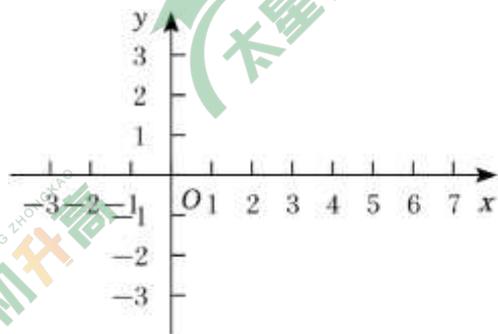
(1) 若抛物线过点  $(4, -1)$ .



①求抛物线的对称轴；

②当  $-1 < x < 0$  时，图象在  $x$  轴的下方，当  $5 < x < 6$  时，在平面直角坐标系中画出符合条件的图象，求出这个抛物线的表达式；

(2) 若  $(-4, y_1), (-2, y_2), (1, y_3)$  为抛物线上的三点且  $y_3 > y_1 > y_2$ ，设抛物线的对称轴为直线  $x = t$ ，直接写出  $t$  的取值范围。

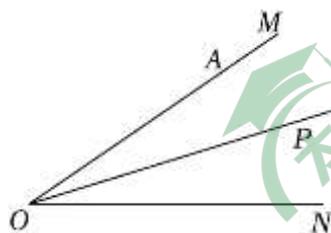


27. 如图，已知  $\angle MON = \alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )， $OP$  是  $\angle MON$  的平分线，点  $A$  关于  $OP$  对称点  $B$  在射线  $ON$  上，连接  $AB$  交  $OP$  于点  $C$ ，分别交  $OP, ON$  于点  $D, E$ ，射线  $AQ$  与  $OP, ON$  分别交于点  $F$

(1) ①依题意补全图形；

②求  $\angle BAE$  度数；(用含  $\alpha$  的式子表示)

(2) 写出一个  $\alpha$  的值，使得对于射线  $OM$  上任意的点  $A$  总有  $OD = \sqrt{2}AF$  (点  $A$  不与点  $O$  重合)



28. 在平面直角坐标系  $xOy$  中， $\odot O$  的半径为 1，对于  $\triangle ABC$  和直线  $l$  给出如下定义：

若  $\triangle ABC$  的一条边关于直线  $l$  的对称线段  $PQ$  是  $\odot O$  的弦，则称  $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的关于直线  $l$  的“关联三角形”，直线  $l$  是“关联轴”。

(1) 如图 1，若  $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的关于直线  $l$  的“关联三角形”，请画出  $\triangle ABC$  与  $\odot O$  的“关联轴  $l$ ” (至少画两条)；

(2) 若  $\triangle ABC$  中，点  $A$  坐标为  $(2, 3)$ ，点  $B$  坐标为  $(4, 1)$ ，存在“关联轴  $l$ ”使  $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的关联三角形，求点  $C$  横坐标的取值范围；

(3) 已知  $A(\sqrt{3}, 1)$ ，将点  $A$  向上平移 2 个单位得到点  $M$ ，以  $M$  为圆心  $MA$  为半径画圆  $B$ ，且  $AB = 2$  (点  $B$  在点  $A$  右侧)，若  $\triangle ABC$  与  $\odot O$  的关联轴至少有两，以及  $OC$  最大时  $AC$  的长。

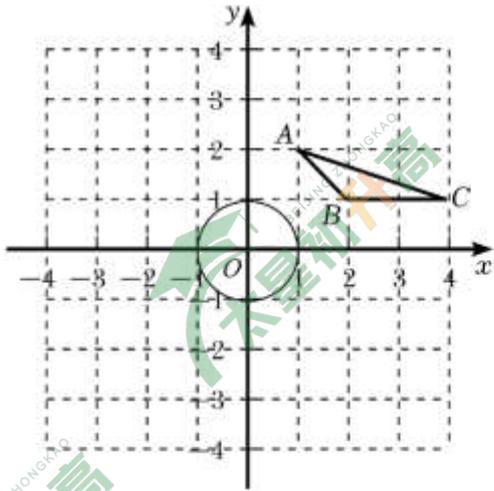
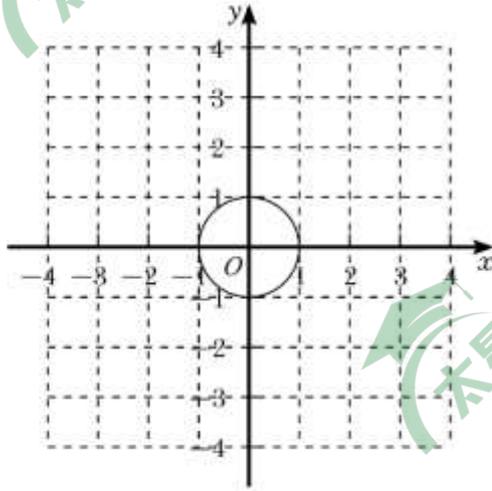


图1



备用图