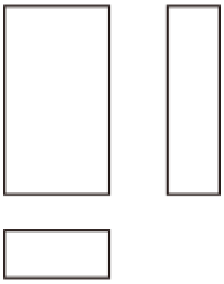
2024北京人大附中初三3月月考

数　　学

（时间：120分钟　　满分：100分）

一、选择题（共16分，每小题2分）

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（　）



A. 长方体　　B. 三棱柱　　C. 圆锥　　D. 圆柱

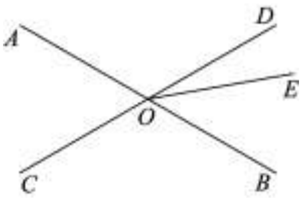
2. 2023年我国规模以上内容创作生产营业收入累计值前三个季度分别约为6500亿元13000亿元，20000亿元，合计约39500亿元．将39500用科学记数法表示应为（　）

A. 395×10^{2}　　B. 3.95×10^{4}　　C. 3.95×10^{3}　　D. 0.395×10^{5}

3. 不透明的袋子中装有2个红球和3个黄球，两种球除颜色外无其他差别，从中随机摸出一个小球，摸到黄球的概率是（　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

4. 如图，直线AB，CD相交于点O，若$\angle AOC=60°$，$\angle BOE=40°$，则$\angle DOE$的度数为（　）



A. $60°$　　B. $40°$　　C. $20°$　　D. $10°$

5. 正六边形的外角和是（　）

A. $180°$　　B. $360°$　　C. $540°$　　D. $720°$

6. 已知关于x的一元二次方程$x^2-2x+a=0$有两个相等的实数根，则实数a的值是（　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 如图1是变量y与变量x的函数关系的图象，图2是变量z与变量y的函数关系的图象，则z与x的函数关系的图象可能是（　）

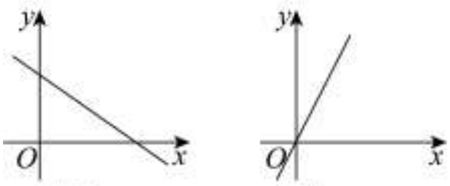
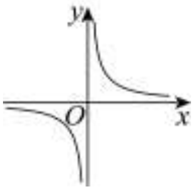
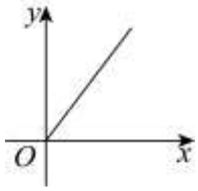
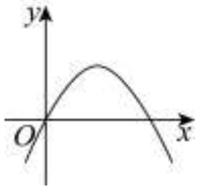
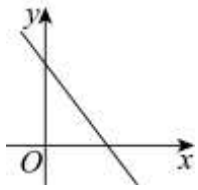


图1　　图2

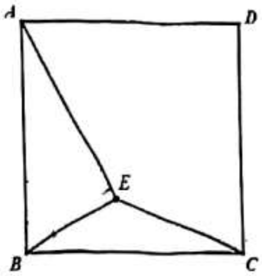
A. 

B. 

C. 

D. 

8. 如图，正方形边长为 a，点 E 是正方形 $ABCD$ 内一点，满足 $\angle AEB=90°$，连接 CE．给出下面四个结论：① $AE+CE\geqslant\sqrt{2}a$；② $CE\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$；③ $\angle BCE$ 的度数最大值为 $60°$；④当 $CE=a$ 时，$\tan\angle ABE=\frac{1}{2}$．上述结论中，所有正确结论的序号为（　）



A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ①③④

二、填空题（共 16 分，每小题 2 分）

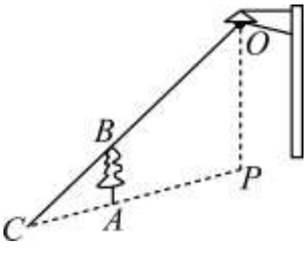
9. 若 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是__________.

10.分解因式：$3a^2-12$=___.

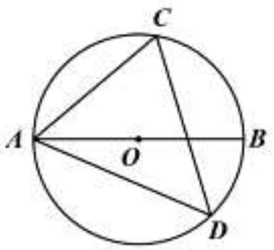
11. 方程 $\frac{3}{x+2}=\frac{2}{x}$ 的解为_______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象经过点 $A(2,m)$ 和点 $B(-2,n)$，则 $m+n=$ ______.

13. 如图，树 AB 在路灯 O 的照射下形成投影 AC，已知路灯高 $PO=5\text{m}$，树影 $AC=3\text{m}$，树 AB 与路灯 O 的水平距离 $AP=4.5\text{m}$，则树的高度 AB 长是______米.



14. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 的弦， $\angle BAC$=40°，则 $\angle ADC=$________°.



15. 用一组 a，b，m 的值说明“若 $a<b$，则 $ma>mb$”是错误的，这组数可以是 $a=$__________，$b=$__________，$m=$__________.

16. 从甲地到乙地有 A，B，C 三条不同的公交线路．为了解早高峰期间这三条线路上的公交车从甲地到乙地的用时情况，在每条线路上随机选取了 500 个班次的公交车，收集了这些班次的公交车用时（单位：分钟）的数据，统计如下：

公交车用时 公交车用时的频数 线路	$30\le t\le 35$	$35<t\le 40$	$40<t\le 45$	$45<t\le 50$	合计
A	59	151	166	124	500
B	50	50	122	278	500
C	45	265	167	23	500

早高峰期间，乘坐__________（填“A”，“B”或“C”）线路上的公交车，从甲地到乙地“用时不超过 45 分钟”的可能性最大．

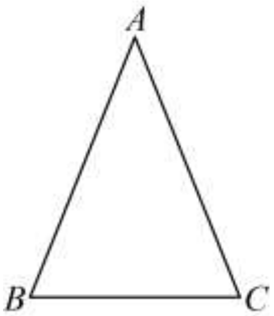
三、解答题（共 52 分）

17. 计算：$6\cos 45^\circ-\sqrt{18}+|-5|-(\pi-2)^0$．

18. 解不等式组：$\begin{cases} x+2<2x-1 \\ \dfrac{3x-5}{2}<x \end{cases}$．

19. 已知 $x^2-x-3=0$，求代数式 $(x+2)(x-2)-x(2-x)$ 的值．

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．



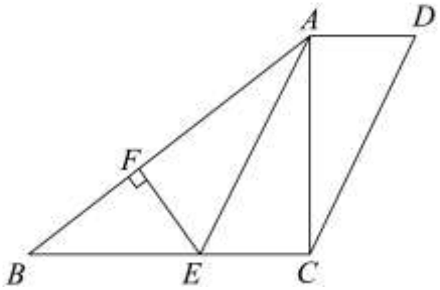
（1）使用直尺和圆规，作 $AD\perp BC$ 交 BC 于点 D（保留作图痕迹）；

（2）以 D 为圆心，DC 的长为半径作弧，交 AC 于点 E，连接 BE，DE．

①$\angle BEC=$______°；

②写出图中一个与$\angle CBE$相等的角______.

21. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ACB=\angle CAD=90^{\circ}$，点$E$在$BC$上，$AE//DC, EF\perp AB$，垂足为$F$.



（1）求证：四边形$AECD$是平行四边形；

（2）若AE平分$\angle BAC, BE=5, \cos B=\dfrac{4}{5}$，求$BF$和$AD$的长.

22. 在平面直角坐标系xOy中，一次函数$y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象经过点$(0,1)$，$(-2,2)$，与x轴交于点A.

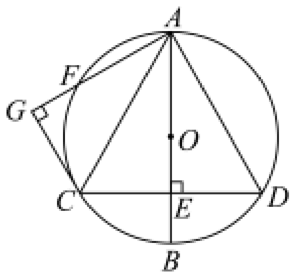
（1）求该一次函数的表达式及点A的坐标；

（2）当$x>2$时，对于x的每一个值，函数$y=2x+m$的值大于一次函数$y=kx+b$（$k\neq 0$）的值，直接写出m的取值范围.

23. 列方程解应用题

无人配送以其高效、安全、低成本等优势，正在成为物流运输行业的新趋势．某物流园区使用1辆无人配送车平均每天配送的包裹数量是1名快递员平均每天配送包裹数量的5倍．要配送6000件包裹，使用1辆无人配送车所需时间比4名快递员同时配送所需时间少2天，求1名快递员平均每天可配送包裹多少件？

24. 如图，AB是$\odot O$的直径，点E是OB的中点，过点E作弦$CD\perp AB$，连接AC，AD.



（1）求证：$\triangle ACD$是等边三角形；

（2）若点F是$\overset{\frown}{AC}$的中点，过点C作$CG\perp AF$，垂足为点G．若$\odot O$的半径为2，求CG的长.

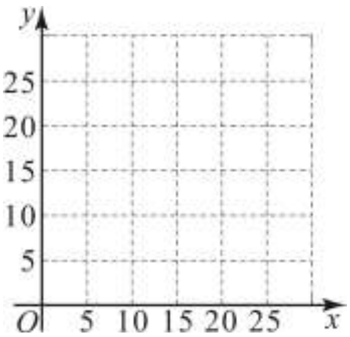
25. 学校组织九年级学生进行跨学科主题学习活动，利用函数的相关知识研究某种化学试剂的挥发情况．在两种不同的场景A和场景B下做对比实验，设实验过程中，该试剂挥发时间为x分钟时，在场景A，B中的剩余质量分别为y_1，y_2（单位：克）.

下面是某研究小组的探究过程，请补充完整：

记录 y_1， y_2 与 x 的几组对应值如下：

x（分钟）	0	5	10	15	20	…
y_1（克）	25	23.5	20	14.5	7	…
y_2（克）	25	20	15	10	5	…

（1）在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各组数值所对应的点 (x,y_1)，(x,y_2)，并画出函数 y_1， y_2 的图象；



（2）进一步探究发现，场景 A 的图象是抛物线的一部分， y_1 与 x 之间近似满足二次函数：$y_1=-0.04x^2+bx+c$．场景 B 的图象是直线的一部分， y_2 与 x 之间近似满足一次函数 $y_2=kx+c$（$k\neq 0$）．则 $b=$______， $c=$______， $k=$______；

（3）查阅文献可知，该化学试剂的质量不低于 4 克时，才能发挥作用，在上述实验中，记该化学试剂在场景 A，B 中发挥作用的时间分别为 x_A， x_B，则 x_A______x_B（填“>”，“=”或“<”）.

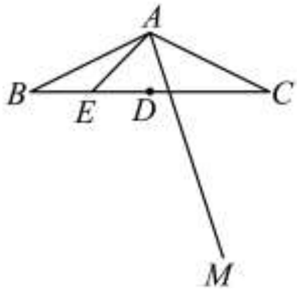
26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=ax^2-2ax+c$（$a>0$）上任意两点.

（1）直接写出抛物线的对称轴；

（2）若 $x_1=a+1$， $x_2=a+2$，比较 y_1 与 y_2 的大小，并说明理由；

（3）若对于 $m<x_1<m+1$， $m+1<x_2<m+2$，总有 $y_1<y_2$，求 m 的取值范围.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$， $\angle BAC=2\alpha(45^\circ<\alpha<90^\circ)$， D 是 BC 的中点， E 是 BD 的中点，连接 AE．将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 α 得到射线 AM，过点 E 作 $EF\perp AE$ 交射线 AM 于点 F．



（1）①依题意补全图形；

②求证：$\angle B=\angle AFE$；

（2）连接CF，DF，用等式表示线段CF，DF之间的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系xOy中，$\odot O$的半径为 1，P是$\odot O$外一点，给出如下的定义：若在$\odot O$上存在一点T，使得点P关于某条过点T的直线对称后的点Q在$\odot O$上，则称Q为点P关于$\odot O$的关联点.

（1）当点P在直线$y=2x$上时，

①若点$P\left(1,2\right)$，在点$Q_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$Q_2\left(0,1\right)$，$Q_3\left(1,0\right)$中，点$P$关于$\odot O$的关联点是______；

②若P关于$\odot O$的关联点Q存在，求点P的横坐标p的取值范围；

（2）已知点$A\left(2,\frac{3}{2}\right)$，动点$M$满足$AM\le 1$，若$M$关于$\odot O$的关联点$N$存在，直接写出$MN$的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 16 分，每小题 2 分）

1.【答案】A

【分析】结合长方体的三视图特征判断即可.

【详解】解：∵长方体的三视图都是长方形，三棱柱的三视图中有三角形，圆锥和圆柱的三视图中有圆，

∴该几何体符合长方体的三视图特征，

故选 A.

【点睛】本题考查了三视图：在正面内得到的由前向后观察物体的视图，叫做主视图；在水平面内得到的由上向下观察物体的视图，叫做俯视图；在侧面内得到的由左向右观察物体的视图，叫做左视图；掌握常见几何体的三视图特征是解题的关键.

2.【答案】B

【分析】本题主要考查了科学记数法．科学记数法的表现形式为$a\times10^n$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数，确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：将 39500 用科学记数法表示应为3.95×10^4.

故选：B.

3.【答案】D

【分析】根据概率计算公式进行求解即可.

【详解】解：∵不透明的袋子里装有 2 个红球，3 个黄球，

∴从袋子中随机摸出一个，摸到黄球的概率为$\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}$；

故选：D.

【点睛】本题考查的是概率公式，熟知随机事件A的概率P（A）＝事件A可能出现的结果数与所有可能出现的结果数的商是解答此题的关键.

4.【答案】C

【分析】根据对顶角相等可得$\angle BOD=60^\circ$，再根据角的和差关系可得答案.

【详解】解：$\because\angle AOC=60^\circ$，

$\therefore\angle BOD=60^\circ$，

$\because\angle BOE=40^\circ$，

$\therefore\angle DOE=\angle BOD-\angle BOE=60^\circ-40^\circ=20^\circ$，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了对顶角的性质，解题的关键是掌握对顶角相等.

5.【答案】B

【分析】根据任何多边形的外角和是360°即可求出答案.

【详解】解：正六边形的外角和是$360°$．

故选：B．

【点睛】本题考查了多边形的外角和定理，关键是掌握任何多边形的外角和是$360°$，外角和与多边形的边数无关．

6.【答案】B

【分析】本题考查一元二次方程根与判别式的关系，根据方程有两个相等的实数根，判别式等于 0 列式求解即可得到答案；

【详解】解：∵一元二次方程$x^2-2x+a=0$有两个相等的实数根，

$\therefore (-2)^2-4\times1\times a=0$，

解得：$a=1$，

故选：B．

7.【答案】D

【分析】本题主要考查函数的图象，一次函数的图象与性质，根据图象正确设出函数解析式，学会利用整体思想解决问题是解题关键．

由图 1 可设$y=kx+b$（k，b 为常数，且$k<0,b>0$，由图 2 可设$z=my$（m 为常数，$m>0$），将$y=kx+b$代入$z=my$得$z=mkx+mb$，再根据一次函数图象与系数之间的关系即可判断．

【详解】解：由图1可设$y=kx+b$（k，b为常数，且$k<0,b>0$，由图2可设$z=my$（m为常数，$m>0$），将$y=kx+b$代入$z=my$得：$z=m(kx+b)=mkx+mb$，

$\therefore z$与x的函数关系为一次函数关系，

$\because k<0$，$b>0$，$m>0$，

$\therefore mk<0$，$mb>0$，

$\therefore z$与x的函数图象过一、二、四象限．

故选：D．

8.【答案】C

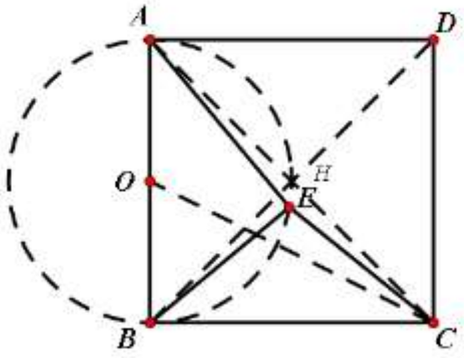
【分析】如图所示，连接AC交BD于H，取AB中点O，连接OC，先证明点E在以点O为圆心，AB为直径的圆上运动，当A、E、C三点共线，即点E运动到点H时$AE+CE=AC$，当C、O、E三点共线时，CE有最小值，据此可判断①②；如下图所示，当CE与$\odot O$相切时$\angle BCE$有最大值，证明

$\mathrm{Rt}\triangle OBC\cong\mathrm{Rt}\triangle OEC$，得到$CE=BC=a$，$\angle OCE=\angle OCB$，则$\tan\angle OCE=\dfrac{OE}{CE}=\dfrac{1}{2}$，再证明

$\angle ABE=\angle BCO=\angle OCE$，得到$\tan\angle ABE=\tan\angle OCE=\dfrac{1}{2}$，即可判断③④．

【详解】解：如图所示，连接AC交BD于H，取AB中点O，连接OC，

∵四边形$ABCD$是正方形，



$\therefore \angle AHB = 90°$；

$\because \angle AEB = 90°$，

$\therefore$点 E 在以点 O 为圆心， AB 为直径的圆上运动，

$\because \angle AHB = 90°$，

$\therefore$点 H 在圆 O 上，

$\because AE + CE \geq AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}a$，

$\therefore$当 A、E、C 三点共线，即点 E 运动到点 H 时， $AE + CE = AC$，故①正确；

$\because$点 E 在以点 O 为圆心， AB 为直径的圆上运动，

$\therefore$当 C、O、E 三点共线时， CE 有最小值，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，由勾股定理得 $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，

$\therefore CE$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}a - \dfrac{1}{2}a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，故②错误；

如下图所示，当 CE 与 $\odot O$ 相切时 $\angle BCE$ 有最大值，

$\because OB = OE$， $OC = OC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OBC \cong \mathrm{Rt}\triangle OEC\left(\mathrm{HL}\right)$，

$\therefore CE = BC = a$， $\angle OCE = \angle OCB$，

$\therefore \tan\angle OCE = \dfrac{OE}{CE} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle OCE \neq 30°$，

$\therefore \angle BCE \neq 60°$，

$\therefore \angle BCE$ 的度数最大值不是 $60°$，故③错误；

$\because BC = EC$， $OB = OE$，

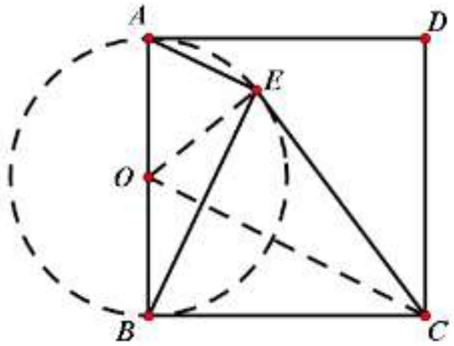
$\therefore OC$ 垂直平分 BE，

$\therefore \angle ABE + \angle BOC = \angle BOC + \angle BCO$，

$\therefore \angle ABE = \angle BCO = \angle OCE$，

$\therefore \tan\angle ABE=\tan\angle OCE=\frac{1}{2}$，故④正确；

故选：C．



【点睛】本题主要考查了圆与正方形综合，解直角三角形，勾股定理等等，根据题意得到点 E 的运动轨迹是解题的关键．

二、填空题（共 16 分，每小题 2 分）

9.【答案】$x\geq 1$

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式的被开方数非负是解决本题的关键．

根据二次根式被开方数非负可得 $x-1\geq 0$，解不等式即可．

【详解】由题意得：$x-1\geq 0$，

解得：$x\geq 1$，

故答案为：$x\geq 1$．

10.【答案】3（a+2）（a－2）

【分析】要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方式或平方差式，若是就考虑用公式法继续分解因式．

【详解】$3a^2-12$

$=3(a^2-4)$

$=3(a+2)(a-2)$．

11.【答案】$x=4$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解．

【详解】解：去分母得：$3x=2(x+2)$，

解得：$x=4$，

检验：当 $x=4$ 时，$x(x+2)\neq 0$，

所以 $x=4$ 是分式方程的解，

故答案为：$x=4$．

【点睛】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验．

12.【答案】0

【分析】将 $A(2,m)$， $B(-2,n)$ 两点代入反比例函数求得 m 和 n 的值，再计算求值即可；

【详解】解：∵点 A 和 B 在反比例函数图象上，

$\therefore m=\frac{6}{2}=3$， $n=\frac{6}{-2}=-3$，

$\therefore m+n=3-3=0$，

故答案为：0；

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的性质，掌握函数图象上的点满足函数关系式是解题关键.

13.【答案】2

【分析】由题意知 $AB /\!/ PO$，得出 $Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle POC$，根据 $\frac{AB}{PO}=\frac{AC}{PC}$ 求出 AB 的值.

【详解】解：由题意知 $AB /\!/ PO$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle POC$ 中

$\because \begin{cases} \angle C=\angle C \\ \angle CAB=\angle CPO \\ \angle ABC=\angle POC \end{cases}$

$\therefore$ $Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle POC$

$\therefore$ $\frac{AB}{PO}=\frac{AC}{PC}$

$\therefore \frac{AB}{5}=\frac{3}{3+4.5}$

解得 $AB=2$

故答案为： 2.

【点睛】本题考查了三角形相似．解题的关键与重点是找出判定三角形相似的条件以及计算三角形的相似比.

14.【答案】50

【分析】连接 BC，则由圆周角定理可以得到 $\angle ADC=\angle ABC$，再根据直径所对的圆周角是 90 度，得到 $\angle ACB=90°$，再根据 $\angle BAC=40°$即可求解.

【详解】解：如图所示，连接 BC

$\therefore \angle ADC=\angle ABC$

$\because AB$ 是直径

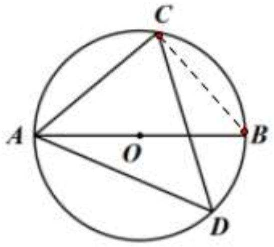
$\therefore \angle ACB=90°$

$\because \angle BAC=40°$

$\therefore \angle ABC=180°-90°-40°=50°$

$\therefore \angle ADC=\angle ABC=50°$

故答案为：50.



【点睛】本题主要考查了圆周角定理，直径所对的圆周角是直角，三角形内角和定理，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

15.【答案】 ①. 1 ②. 2 ③. 0

【分析】本题考查了命题与定理，要说明一个命题的正确性，一般需要推理证明，而判断一个命题是假命题，只需举反例即可.

本题中依据题意选出适当的 a、b、c 即可，答案不唯一.

【详解】解：当 $a=1,b=2,m=0$ 时，

满足 $a<b$，而 $ma=0,mb=0$，不满足 $ma>mb$，

$\therefore a=1,b=2,m=0$ 符合题意.

故答案为：1, 2,0.

16.【答案】C

【分析】样本容量相同，观察统计表，可以看出C线路上的公交车用时超过45分钟的频数最小，即可得出结论.

【详解】解：样本容量相同，C线路上的公交车用时超过45分钟的频数最小，所以其频率也最小，

∴乘坐C线路上的公交车，从甲地到乙地“用时不超过45分钟”的可能性最大.

故答案为：C.

【点睛】考查用频率估计概率，读懂统计表是解题的关键.

三、解答题（共52分）

17.【答案】4

【分析】先计算特殊角三角函数值，零指数幂，二次根式的化简，然后根据实数的计算法则求解即可.

【详解】解：$6\cos 45^\circ-\sqrt{18}+|-5|-(\pi-2)^0$

$=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}+5-1$

$=4$.

【点睛】本题主要考查了特殊角三角函数值，零指数幂，二次根式的化简，实数的混合计算，熟知相关计算法则是解题的关键.

18.【答案】$3<x<5$

【分析】先求出每个不等式的解集，再根据夹逼原则求出不等式组的解集即可.

【详解】解：$\begin{cases} x+2<2x-1① \\ \dfrac{3x-5}{2}<x② \end{cases}$，

解不等式①得：$x>3$，

解不等式②得：$x<5$，

∴不等式组的解集为$3<x<5$.

【点睛】本题主要考查了解一元一次不等式组，正确求出每个不等式的解集是解题的关键.

19.【答案】2

【分析】先利用平方差公式，及单项式乘以多项式法则计算得到最简结果，再把已知等式变形后代入计算即可求出值.

【详解】解：$(x+2)(x-2)-x(2-x)$，

$=x^2-4-2x+x^2$，

$=2x^2-2x-4$，

∵ $x^2-x-3=0$，

∴ $x^2-x=3$.　0

∴原式$=2(x^2-x)-4=2$.

【点睛】此题考查了整式的混合运算及化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20.【答案】(1）见详解　（2）①90；②$\angle CAD$

【分析】本题考查了作图－基本作图：熟练掌握 5 种基本作图是解决问题的关键．也考查了等腰三角形的性质和圆周角定理.

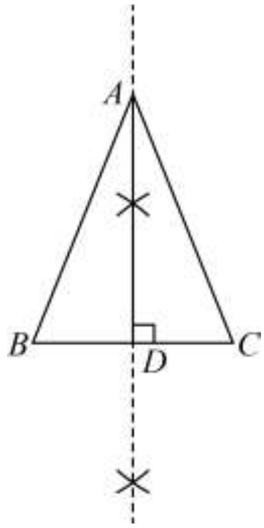
（1）利用基本作图，作BC的垂直平分线得到AD；

（2）①根据等腰三角形的性质得到$DB=DC$，则BC为$\odot D$的直径，然后根据圆周角定理得到$\angle BEC=90°$；

②先利用$AB=AC$得到$\angle ABC=\angle ACB$，再根据圆周角定理得到$\angle BEC=90°$，根据等角的余角相等得到$\angle CBE=\angle CAD$.

【小问 1 详解】

如图，AD即为所作.



【小问 2 详解】

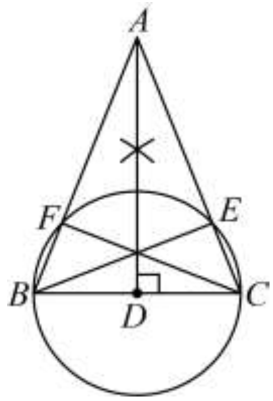
①$\because$ $AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore DB=DC$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore BC$ 为$\odot D$的直径，

$\therefore \angle BEC=90°$；

②



$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore BC$ 为$\odot D$的直径，

$\therefore \angle BEC=90°$，

$\because AD\perp BC$，

$\because \angle CBE+\angle BCE=90°$，$\angle CAD+\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle CBE=\angle CAD$．

21.【答案】(1）见详解；(2）$BF=4$，$AD=3$

【分析】(1）由题意易得 $AD /\!/ CE$，然后问题可求证；

（2）由（1）及题意易得 $EF=CE=AD$，然后由 $BE=5,\cos B=\dfrac{4}{5}$ 可进行求解问题.

【详解】(1）证明：$\because \angle ACB=\angle CAD=90°$，

$\therefore AD /\!/ CE$，

$\because AE//DC$，

$\therefore$四边形$AECD$是平行四边形；

（2）解：由（1）可得四边形$AECD$是平行四边形，

$\therefore CE = AD$，

$\because EF \perp AB$，AE平分$\angle BAC$，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore EF = CE$，

$\therefore EF=CE=AD$，

$\because BE = 5, \cos B = \dfrac{4}{5}$，

$\therefore BF = BE \cdot \cos B = 5 \times \dfrac{4}{5} = 4$，

$\therefore EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = 3$，

$\therefore AD = EF = 3$.

【点睛】本题主要考查平行四边形的性质与判定、勾股定理、角平分线的性质定理及三角函数，熟练掌握平行四边形的性质与判定、勾股定理、角平分线的性质定理及三角函数是解题的关键.

22.【答案】（1）$y = -\dfrac{1}{2}x + 1$，$A(2,0)$

（2）$m > -4$

【分析】本题考查了待定系数法求一次函数解析式：掌握待定系数法求一次函数解析式一般步骤是解决问题的关键．也考查了一次函数的性质.

（1）先利用待定系数法求出函数解析式为$y = -\dfrac{1}{2}x + 1$，然后计算自变量为0时对应的函数值得到A点坐标；

（2）当函数$y = x + n$与y轴的交点在点A（含A点）上方时，当$x > 0$时，对于x的每一个值，函数$y = 2x + m$的值大于函数$y = kx + b(k \neq 0)$的值.

【小问1详解】

解：$\because$一次函数$y = kx + b(k \neq 0)$的图象经过点$(0,1)$，$(-2,2)$，

$\therefore \begin{cases} b = 1 \\ -2k + b = 2 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$，

该一次函数的表达式为$y = -\dfrac{1}{2}x + 1$，

令$y = 0$，得$0 = -\dfrac{1}{2}x + 1$，

$\therefore x=2$，

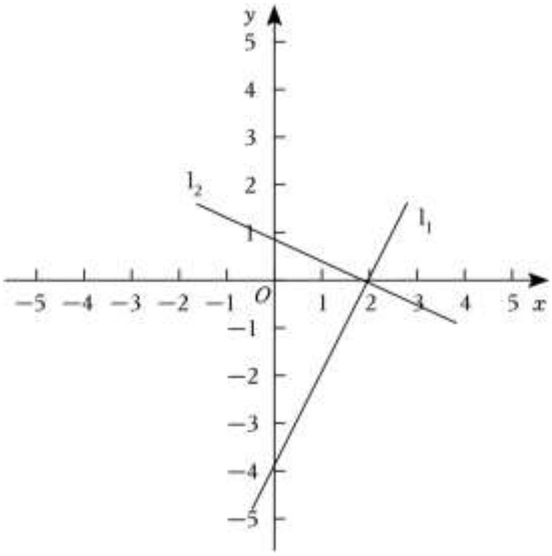
$\therefore A(2,0)$；

【小问 2 详解】

解：当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=2x+m$ 的值大于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值，

$\therefore 2x+m>-\frac{1}{2}x+1$，

$\therefore m>-4$．



23.【答案】150 件

【分析】本题主要考查了分式方程的应用，审清题意、明确量之间的关系、列出分式方程是解题的关键．设 1 名快递员平均每天配送包裹 x 件．则 1 辆无人配送车平均每天配送的包裹 $5x$，然后根据等量关系“要配送 6000 件包裹，使用 1 辆无人配送车所需时间比 4 名快递员同时配送所需时间少 2 天”列分式方程求解即可．

【详解】解：设 1 名快递员平均每天配送包裹 x 件．则 1 辆无人配送车平均每天配送的包裹 $5x$，

依题意可得：$\frac{6000}{5x}+2=\frac{6000}{4x}$，解得：$x=150$．

经检验，$x=150$ 是原分式方程的解且符合题意．

答：1 名快递员平均每天可配送包裹 150 件．

24.【答案】（1）证明见解析；

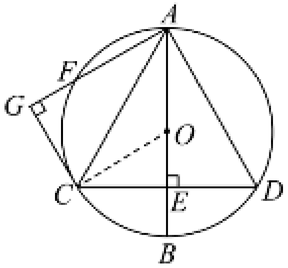
（2）$CG=\sqrt{3}$．

【分析】（1）连接 OC，先证明 AB 是 CD 的垂直平分线，从而求得 $AC=AD$，利用特殊三角函数值判断 $\angle COE=60^\circ$，则可推得 $\angle CAD=60^\circ$，利用“有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形”即可得证；

（2）先根据 (1) 中的结论及圆周角定理得到 $\angle GAC=30^\circ$，证明 $\triangle AEC\cong\triangle AGC$ 即可得 $CG=CE$，根据勾股定理即可求出直角 $\triangle COE$ 中 CE 的长，即 CG 的长．

【小问 1 详解】

证：如图，连接OC，



$\because AB$是$\odot O$的直径，且$CD \perp AB$，

$\therefore CE = DE$，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$，

$\therefore \angle BAC = \angle BAD$，

$\therefore AB$是CD的垂直平分线，

$\therefore AC = AD$，

$\because OC = OB$，点E是OB的中点，

$\therefore$点C在线段OB的垂直平分线上，$OE = BE = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{1}{2}OC$，

$\therefore Rt\triangle COE$中，$\cos\angle COE = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{1}{2}$，

即$\angle COE = 60°$，

$\because \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle BAD = \angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle COE = 30°$，

即$\angle CAD = \angle BAC + \angle BAD = 60°$

$\therefore \triangle ACD$是等边三角形.

【小问2详解】

解：由(1)得，$\triangle ACD$是等边三角形，

$\therefore \angle ADC = 60°$，

$\because F$是$\overset{\frown}{AC}$的中点，

$\therefore \overset{\frown}{CF} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore \angle GAC = \dfrac{1}{2}\angle ADC = 30° = \angle BAC$，

$\because CD \perp AB$，$CG \perp AF$，

$\therefore \angle AEC = \angle AGC = 90°$，

在$\triangle AEC$和$\triangle AGC$中，

$\begin{cases}\angle AEC=\angle AGC\\ \angle GAC=\angle EAC\\ AC=AC\end{cases}$，

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle AGC\left(AAS\right)$，

$\therefore CG=CE$，

$\because \odot O$ 半径为 2，且点 E 是 OB 中点，

$\therefore OC=OB=2$，$OE=1$，

$\therefore Rt\triangle COE$ 中，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore CG=CE=\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查的知识点是垂径定理、圆周角定理、垂直平分线的性质、锐角三角函数、等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理，解题关键是熟练掌握垂径定理并能灵活运用特殊三角函数值.

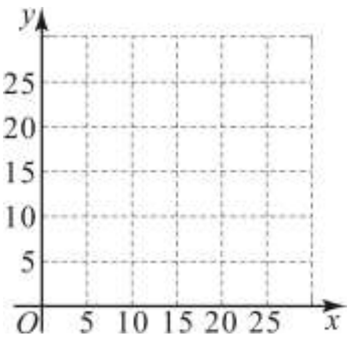
25. 学校组织九年级学生进行跨学科主题学习活动，利用函数的相关知识研究某种化学试剂的挥发情况．在两种不同的场景 A 和场景 B 下做对比实验，设实验过程中，该试剂挥发时间为 x 分钟时，在场景 A，B 中的剩余质量分别为 y_1，y_2（单位：克）.

下面是某研究小组的探究过程，请补充完整：

记录 y_1，y_2 与 x 的几组对应值如下：

x（分钟）	0	5	10	15	20	…
y_1（克）	25	23.5	20	14.5	7	…
y_2（克）	25	20	15	10	5	…

（1）在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各组数值所对应的点 $\left(x,y_1\right)$，$\left(x,y_2\right)$，并画出函数 y_1，y_2 的图象；



（2）进一步探究发现，场景 A 的图象是抛物线的一部分，y_1 与 x 之间近似满足二次函数：$y_1=-0.04x^2+bx+c$．场景 B 的图象是直线的一部分，y_2 与 x 之间近似满足一次函数 $y_2=kx+c$

（$k\neq 0$）．则$b=$______，$c=$______，$k=$______；

（3）查阅文献可知，该化学试剂的质量不低于 4 克时，才能发挥作用，在上述实验中，记该化学试剂在场景 A，B 中发挥作用的时间分别为 x_A，x_B，则 x_A______ x_B（填“＞”，“＝”或“＜”）．

【答案】（1）见详解　（2）$b=-0.1$，$c=25$，$k=-1$

（3）＞

【分析】本题主要考查了一次函数、二次函数的应用，读懂题意是解答本题的关键．

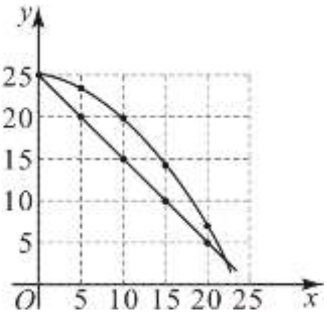
（1）依据题意，根据表格数据描点，连线即可作图得解；

（2）根据函数图象确定点的坐标，利用待定系数法解答即可；

（3）依据题意，分别求出当 $y=4$ 时 x 的值，即可得出答案．

【小问 1 详解】

解：（1）由题意，作图如下．



【小问 2 详解】

解：由题意，场景 A 的图象是抛物线的一部分，y_1 与 x 之间近似满足函数关系 $y_1=-0.04x^2+bx+c$．

又点 $(0,25)$，$(10,20)$ 在函数图象上，

$\therefore\begin{cases}c=25\\-0.04\times10^2+10b+c=20\end{cases}$．

解得：$\begin{cases}b=-0.1\\c=25\end{cases}$．

$\therefore$场景 B 函数关系式为 $y_1=-0.04x^2-0.1x+25$．

对于场景 B 的图象是直线的一部分，y_2 与 x 之间近似满足函数关系 $y_2=kx+c$．

又 $(0,25)$，$(10,15)$ 在函数图象上，

$\therefore\begin{cases}c=25\\10k+c=15\end{cases}$．

解得：$\begin{cases}c=25\\k=-1\end{cases}$．

$\therefore$场景 B 函数关系式为 $y_2=-x+25$．

$\therefore b=-0.1$，$c=25$，$k=-1$．

【小问 3 详解】

解：由题意，当 $y=4$ 时，

场景 A 中，$-0.04x^2-0.1x+25=4$，

解得：$x_1=\dfrac{-5+5\sqrt{337}}{4}\approx 21.7$，$x_2=\dfrac{-5-5\sqrt{337}}{4}$（舍），

即：$x_A\approx 21.7$，

场景 B 中，$4=-x_B+25$，

解得：$x_B=21$，

$\therefore x_A>x_B$．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 是抛物线 $y=ax^2-2ax+c$（$a>0$）上任意两点．

（1）直接写出抛物线的对称轴；

（2）若 $x_1=a+1$，$x_2=a+2$，比较 y_1 与 y_2 的大小，并说明理由；

（3）若对于 $m<x_1<m+1$，$m+1<x_2<m+2$，总有 $y_1<y_2$，求 m 的取值范围．

【答案】（1）抛物线的对称轴为直线 $x=1$

（2）$y_1<y_2$

（3）$-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$

【分析】本题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数的性质是解答本题的关键．

（1）利用抛物线对称轴公式求出即可；

（2）根据条件点 M、N 都在对称轴右侧，根据函数增减性进行解答即可；

（3）根据二次函数图象上点的坐标特征，分析 MN 中点坐标与对称轴的关系得到不等式，解不等式即可得到 m 的取值范围．

【小问 1 详解】

解：抛物线 $y=ax^2-2ax+c$（$a>0$）的对称轴为：$x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$，

$\therefore$抛物线的对称轴为直线 $x=1$；

【小问 2 详解】

$\because a>0$，抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$，$x_1=a+1, x_2=a+2$，

$\therefore M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 都在对称轴右侧，

$\because$当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，且 $x_1<x_2$，

$\therefore y_1<y_2$；

【小问 3 详解】

$\because m < x_1 < m+1$， $m+1 < x_2 < m+2$，

$\therefore \dfrac{2m+1}{2} < \dfrac{x_1+x_2}{2} < \dfrac{2m+3}{2}$ ，

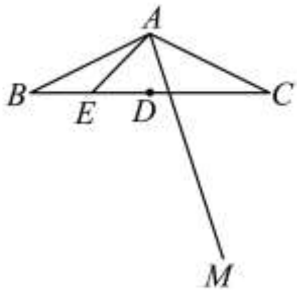
$\because y_1 < y_2, a > 0$，

$\therefore M\left(x_1, y_1\right)$距离对称轴更近， $x_1 < x_2$，则MN的中点在对称轴的右侧，

$\therefore \dfrac{2m+1}{2} < 1$， $\dfrac{2m+3}{2} > 1$，

解得： $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{2}$.

27. 如图，在$\triangle ABC$中， $AB=AC$， $\angle BAC=2\alpha\left(45° < \alpha < 90°\right)$， D是BC的中点， E是BD的中点，连接AE．将射线AE绕点A逆时针旋转α得到射线AM，过点E作$EF \perp AE$交射线AM于点F．



（1）①依题意补全图形；

②求证： $\angle B=\angle AFE$；

（2）连接CF， DF，用等式表示线段CF， DF之间的数量关系，并证明.

【答案】（1）①见解析；②见解析

（2） $CF=DF$

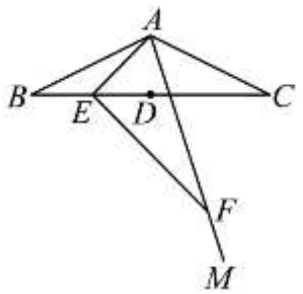
【分析】（1）①根据题意画出图形即可求解；

②连接AD，则$AD \perp BC$于点D， AD平分$\angle BAC$，根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理得出$\angle BAD=\alpha$， $\angle B=90°-\alpha$，根据$\angle AEF=90°$，得出$\angle AFE=90°-\alpha$，则$\angle B=\angle AFE$；

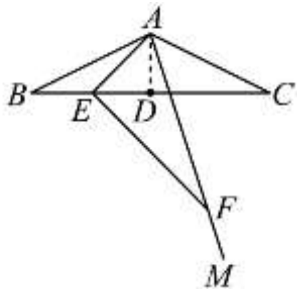
（2）延长FE至点H，使得$EH=EF$，连接BH, AH， CF，倍长中线法证明$\triangle HBE \cong \triangle FDE$，进而证明$\triangle AHB \cong \triangle AFC$，即可得证.

【小问1详解】

解：①如图所示，



②连接 AD，



$\because AB = AC$， D 是 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$ 于点 D， AD 平分 $\angle BAC$，

$\because \angle BAC = 2\alpha\left(45^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}\right)$

$\therefore \angle BAD = \alpha$， $\angle B = 90^{\circ} - \alpha$，

$\because EF \perp AE$，

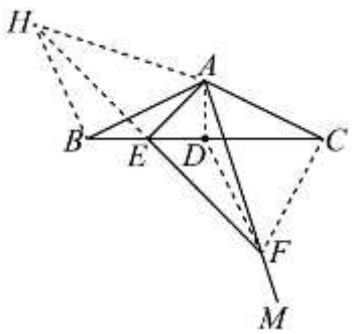
$\therefore \angle AEF = 90^{\circ}$， $\angle AFE = 90^{\circ} - \alpha$，

$\therefore \angle B = \angle AFE$；

【小问 2 详解】

$CF = DF$；证明如下，

延长 FE 至点 H，使得 $EH = EF$，连接 BH, AH， CF，



$\because E$ 为 BD 的中点， E 为 HF 的中点

$\therefore EH = EF, EB = ED$，

又 $\angle HEB = \angle FED$，

$\therefore \triangle HBE \cong \triangle FDE\ (\mathrm{SAS})$，

$\therefore BH = FD$，

$\because AE \perp HF$， $EH = EF$，

$\therefore \triangle AHF$ 是等腰三角形，则 $AH = AF$，$\angle HAE = \angle FAE = \alpha$，，

$\because \angle BAC = \angle HAF = 2\alpha$，

$\therefore \angle HAF - \angle BAF = \angle BAC - \angle BAF$，

即 $\angle BAH = \angle CAF$，

$\therefore \triangle AHB \cong \triangle AFC\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore CF = BH$，

$\therefore CF = FD$.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质与判定，旋转的性质，全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，P 是 $\odot O$ 外一点，给出如下的定义：若在 $\odot O$ 上存在一点 T，使得点 P 关于某条过点 T 的直线对称后的点 Q 在 $\odot O$ 上，则称 Q 为点 P 关于 $\odot O$ 的关联点.

（1）当点 P 在直线 $y = 2x$ 上时，

①若点 $P\left(1,2\right)$，在点 $Q_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$Q_2\left(0,1\right)$，$Q_3\left(1,0\right)$ 中，点 P 关于 $\odot O$ 的关联点是______；

②若 P 关于 $\odot O$ 的关联点 Q 存在，求点 P 的横坐标 p 的取值范围；

（2）已知点 $A\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$，动点 M 满足 $AM \le 1$，若 M 关于 $\odot O$ 的关联点 N 存在，直接写出 MN 的取值范围.

【答案】（1）① Q_1，Q_2；② $-\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \le p \le \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

（2）存在，$1 \le MN \le 4$

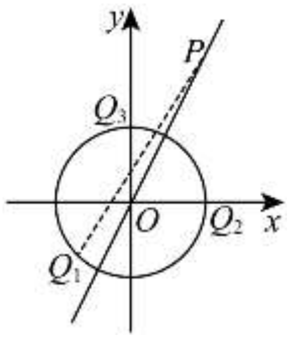
【分析】（1）①根据新定义，画出图形，进而即可求解；

②设 $y = 2x$ 与 $\odot O$ 交于点 M，N，过点 N,P 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 A,B，根据勾股定理得出 $x^2 + y^2 = 1$，联立直线解析式，得出交点坐标，进而根据平行线分线段成比例得出 $p = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，同理可得 p 的最小值为 $-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，即可求解；

（2）依题意，关于 $\odot O$ 的关联点在半径为 3 的圆内，进而根据点与圆的位置关系，求得 MN 的最值，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图所示，

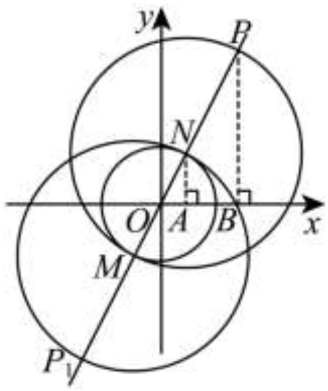


PQ_1 连线的中点在$\odot O$的内部， PQ_2 的中点的纵坐标为1，则点P,Q_2关于$y=1$对称

点P关于$\odot O$的关联点是Q_1，Q_2，

故答案为：Q_1，Q_2.

②如图所示，设$y=2x$与$\odot O$交于点M，N，过点N,P分别作x轴的垂线，垂足分别为A,B，



$\because$设$\odot O$上的点的坐标为(x,y)，则$x^2+y^2=1$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=2x\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

当P点的对称点为M时，点P的横坐标最大，

$\because ON=1,OP=1+2=3$，$NA\parallel PB$，

$\therefore \dfrac{ON}{OP}=\dfrac{x_N}{x_P}$，

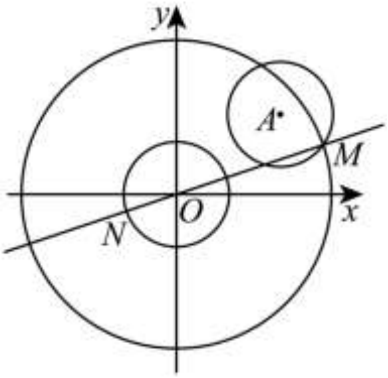
$\therefore p=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

同理可得p的最小值为$-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore -\frac{3\sqrt{5}}{5} \le p \le \frac{3\sqrt{5}}{5}$

【小问 2 详解】

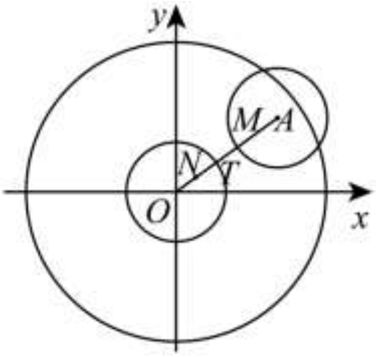
解：依题意，关于$\odot O$的关联点在半径为3的圆内，如图所示，



$\because AM \le 1$，则M在半径为1的$\odot A$上以及圆内，M关于$\odot O$的关联点N

$\therefore MN$的最大值为$OM + ON = 3 + 1 = 4$，

如图所示，当M在线段OA上时，MN取最小值，



$\because OA = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

$\therefore MT = OM - OT = OA - AM - OT = \frac{5}{2} - 1 - 1 = \frac{1}{2}$

$\therefore MN = 2MT = 1$

$\therefore 1 \le MN \le 4$

【点睛】本题考查了坐标与图形，勾股定理，平行线分线段成比例，解一元二次方程，点与圆的位置关系求最值问题，熟练掌握以上知识是解题的关键.