



数学试卷

2024.03

数学教学班：_____ 姓名：_____ 学号：_____

考生须知

1. 本试卷有三道大题，共 8 页。考试时长 120 分钟，满分 100 分。
2. 考生务必将答案填写在机读卡和答题纸上，在试卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生应将机读卡和答题纸交回。

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项均只有一个。

1. 根据第七次全国人口普查结果显示，居住在我国大陆 31 个省、自治区、直辖市（以下简称省份）接受普查登记人员合计约 14.3 亿人，将 1430000000 用科学记数法表示应为（ ）

(A) 14.3×10^9 (B) 1.43×10^9 (C) 1.43×10^8 (D) 14.3×10^8

2. 下列运算正确的是（ ）

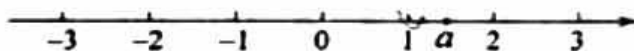
(A) $2a^2 + 3a = 5a^3$

(B) $a \cdot a \cdot a = 3a$

(C) $(-a^3)^2 = a^6$

(D) $am + an + a = a(m+n)$

3. 实数 a 在数轴上对应点的位置如图所示。若实数 b 满足 $b < a$ ， $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，则 b 的值可以是（ ）



(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 3

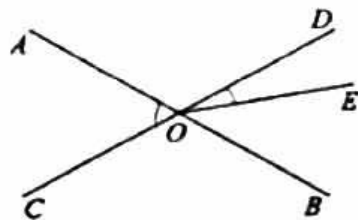
4. 如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ，若 $\angle AOC = 60^\circ$ ， $\angle BOE = 40^\circ$ ，则 $\angle DOE$ 的度数为（ ）

(A) 10°

(B) 20°

(C) 40°

(D) 60°



5. 若 n 边形的每一个外角都等于 72° ，则 n 的值为（ ）

(A) 5

(B) 6

(C) 8

(D) 9



6. 投掷两枚质地均匀的骰子，两枚骰子向上一面的点数之和为6的概率是 ()
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{5}{36}$

7. 关于 x 的方程 $mx^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是 ()
- (A) $m > -1$ (B) $m \geq -1$
(C) $m > -1$ 且 $m \neq 0$ (D) $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$

8. 已知点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上.

$x_1 < x_2 < x_3$, 有下面三个结论:

- ① 若 $x_1 x_2 < 0$, 则 $y_2 > y_3$;
② 若 $x_2 x_3 < 0$, 则 $y_1 y_3 < 0$;
③ 若 $x_1 x_3 > 0$, 则 $y_2 < y_3$.

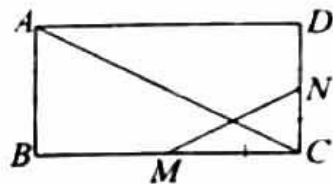
所有正确结论的序号是 ()

- (A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②③

第二部分 非选择题

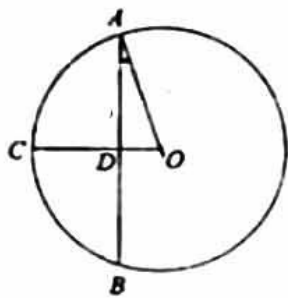
二、填空题 (共 16 题, 每题 2 分)

9. 若代数式 $\sqrt{x+5}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.
10. 分解因式: $ax^2 - 4a =$ _____.
11. 方程 $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+3}$ 的解为_____.
12. 如右图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 M, N 分别为 BC, CD 的中点, 若 $MN = 5$, 则 AC 的长为_____.

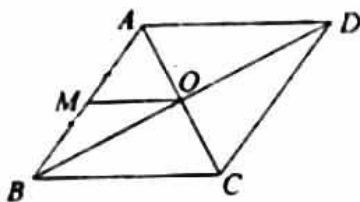




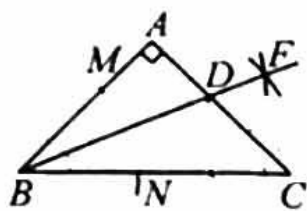
13. 如图, AB 为 $\odot O$ 的弦, C 为 $\odot O$ 上一点, $OC \perp AB$ 于点 D . 若 $OA = \sqrt{10}$, $AB = 6$, 则 $\sin \angle OAD =$ _____.



第 13 题图



第 14 题图



第 15 题图

14. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 点 M 为 AB 的中点, 连接 OM . 若 $AC = 4$, $BD = 8$, 则 OM 的长为 _____.
15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 以点 B 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 BA , BC 于点 M , N . 再分别以点 M , N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 F , 作射线 BF 交 AC 于点 D . 若点 D 到 BC 的距离为 1, 则 $AC =$ _____.
16. 某工厂用甲、乙两种原料制作 A, B, C 三种型号的工艺品, 三种型号工艺品的重量及所含甲、乙两种原料的重量如下:

工艺品型号	含甲种原料的重量/kg	含乙种原料的重量/kg	工艺品的重量/kg
A	3	4	7
B	3	2	5
C	2	3	5

现要用甲、乙两种原料共 31kg, 制作 5 个工艺品, 且每种型号至少制作 1 个.

- (1) 若 31kg 原料恰好全部用完, 则制作 A 型工艺品的个数为 _____;
- (2) 若使用甲种原料不超过 13kg, 同时使用乙种原料最多, 则制作方案中 A, B, C 三种型号工艺品的个数依次为 _____.

三、解答题 (共 68 分, 第 17~20 题, 每题 5 分, 第 21 题 6 分, 第 22~23 题, 每题 5 分, 第 24~26 题每题 6 分, 第 27~28 题每题 7 分)

17. 计算: $4\sin 45^\circ + (\pi + 1)^0 + |-2| - \sqrt{8}$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 1+x > 6-4x, \\ x < \frac{3+x}{2}. \end{cases}$$



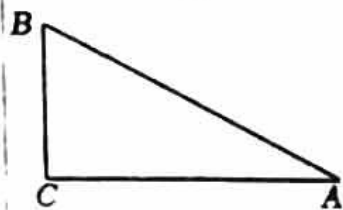
19. 已知 $a^2 + 2a - 2 = 0$, 求代数式 $a(a+2) + (a+1)^2$ 的值.

20. 下面是小百同学证明定理时使用的添加辅助线的两种方法, 请你选择其中一种, 完成证明.

定理: 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半.

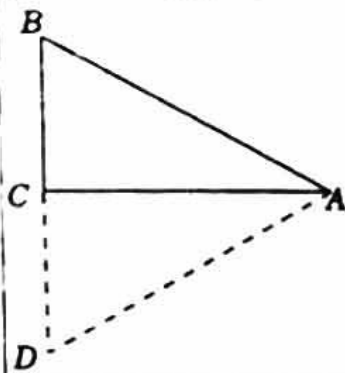
已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$.

求证: $BC = \frac{1}{2} AB$.



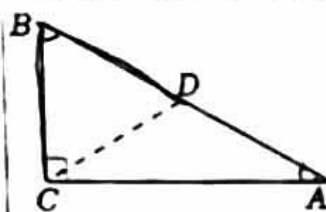
方法一

证明: 如图, 延长 BC 到点 D , 使得 $CD = BC$, 连接 AD .



方法二

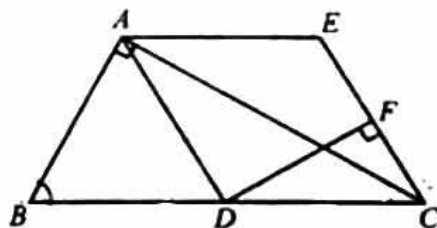
证明: 如图, 在线段 AB 上取一点 D , 使得 $BD = BC$, 连接 CD .



21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 中点, $AE \parallel BC$, $CE \parallel AD$.

(1) 求证: 四边形 $ADCE$ 是菱形;

(2) 过点 D 作 $DF \perp CE$ 于点 F , $\angle B = 60^\circ$, $AB = 6$, 求 EF 的长.





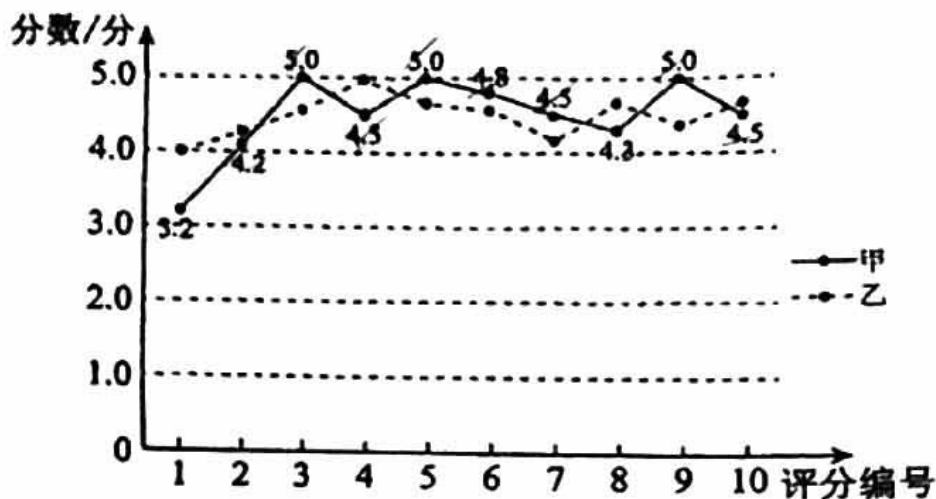
22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(1,0)$ 和 $B(-1,-2)$.

(1) 求该函数的解析式;

(2) 当 $x > -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 一次函数 $y=-x+n$ 的值小于一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的值, 直接写出 n 的取值范围.

23. 某地旅游部门为了促进本地生态特色城镇和新农村建设, 将甲和乙两单位的相关资料放到某网络平台上进行推广宣传, 该平台邀请部分曾在这两家单位体验过的游客参与调查, 得到了这两家单位的“综合满意度”评分, 评分越高表明游客体验越好, 现从这两家单位“综合满意度”的评分中各随机抽取 10 个评分数据, 并对所得数据进行整理、描述和分析, 下面给出了部分信息.

a. 甲、乙两单位“综合满意度”评分的折线图:



b. 甲、乙两家“综合满意度”评分的平均数、中位数:

	甲	乙
平均数	m	4.5
中位数	n	4.7

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 表中 m 的值是 _____, n 的值是 _____;

(2) 设甲、乙两单位“综合满意度”评分的方差分别是 $s_{甲}^2$ 、 $s_{乙}^2$, 直接写出 $s_{甲}^2$ 、 $s_{乙}^2$ 之间的大小关系;

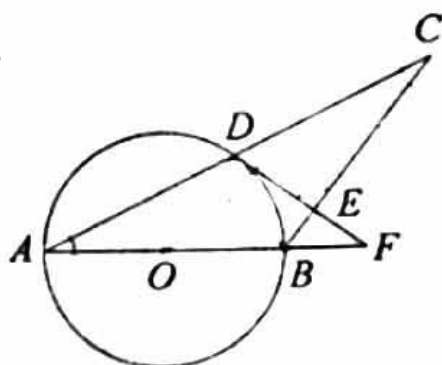
(3) 记甲单位“综合满意度”评分 (10 个评分) 的方差分别是 s_{10}^2 , 为更多了解甲单位“综合满意度”情况, 再随机抽取 5 个评分数据分别为 4.4、4.6、4.5、4.5、4.5, 再记甲单位家“综合满意度”评分 (15 个评分) 的方差分别是 s_{15}^2 , 直接写出 s_{10}^2 、 s_{15}^2 之间的大小关系.



24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, 以 AB 为直径作 $\odot O$, 交 AC 于点 D , 过点 D 作 BC 的垂线, 垂足为点 E , 与 AB 的延长线交于点 F .

(1) 求证: DF 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的直径为5, $\tan C = \frac{1}{2}$, 求 EF 的长.

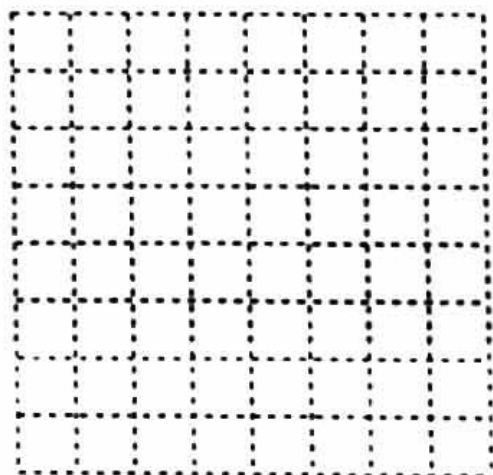


25. 某景观公园内人工湖里有一组喷泉, 水柱从垂直于湖面的水枪喷出, 水柱落于湖面的路径形状是抛物线. 现测量出如下数据, 在距水枪水平距离为 d 米的地点, 水柱距离湖面高度为 h 米.

d (米)	0	0.7	2	3	4	...
h (米)	2.0	3.49	5.2	5.6	5.2	...

请解决以下问题:

(1) 在下边网格中建立适当的平面直角坐标系, 根据已知数据描点, 并用平滑的曲线连接;



(2) 请结合表中所给数据或所画图象, 估出喷泉的落水点距水枪的水平距离约为 _____ 米 (精确到0.1);

(3) 公园增设了新的游玩项目, 购置了宽度4米, 顶棚到水面高度为4.2米的平顶游船, 游船从喷泉正下方通过, 别有一番趣味, 请通过计算说明游船是否有被喷泉淋到的危险.



26. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2atx + 3$, $a > 0$.

(1) 若点 $(4, 3)$ 在抛物线上, 求 t 的值;

(2) 已知点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 都在抛物线上,

① 若 $t = 1, y_1 = 0, y_2 = 5$, 求 a 的取值范围;

② 若 $t \leq x_1 < x_2, x_2 - x_1 \geq 1, y_2 - y_1 = 5$, 直接写出 a 的取值范围.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 2\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 点 E 在射线 BC 上 (不与点 B , 点 C 重合), 点 D 为线段 BE 的中点, 连接 AD . 将射线 AD 绕点 A 逆时针旋转 α 得到射线 AM , 过点 D 作 $DF \perp AD$ 交射线 AM 于点 F .

(1) 如图 1, 点 E 在线段 BC 上, 求证: $\angle B = \angle AFD$.

(2) 如图 2, $\alpha = 45^\circ$, 点 E 在线段 BC 的延长线上, 点 D 在线段 BC 上, 连接 CF, EF .

① 依题意补全图形;

② 写出线段 CE 与 CF 之间是数量关系, 并证明.

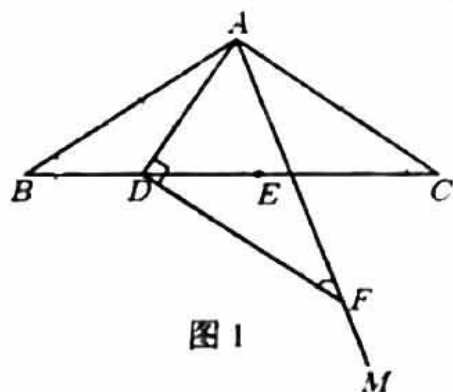


图 1

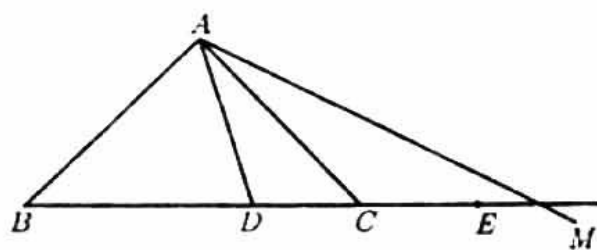


图 2



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\odot O$ 的半径为 1, 点 $M(a, b)$ 在 $\odot O$ 上. 对于点 P 给出如下定义: 将点 P 向右 ($a \geq 0$) 或向左 ($a < 0$) 平移 $k|a|$ 个单位长度, 再向上 ($b \geq 0$) 或向下 ($b < 0$) 平移 $k|b|$ 个单位长度 ($k > 0$), 得到 P' , 再将点 P 关于直线 MP' 对称得到点 Q , 则称点 Q 为点 P 的 k 倍“对应点”. 特别地, 当 M 与 P' 重合时, 点 Q 为点 P 关于点 M 的中心对称点.

(1) 已知点 $P(3, 0)$, $k=2$.

① 若点 M 的坐标为 $(0, 1)$, 直接写出点 P' 的坐标, 并画出点 P 的 2 倍“对应点” Q ;

② 求线段 PQ 长的取值范围;

(2) 当 $k \geq 4$ 时, 若 $OP=3$, 点 Q 为点 P 的 k 倍“对应点”, 连接 OQ , 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时, 直接写出 OQ 长的最大值与最小值的和 (用含 k 的式子表示).

