

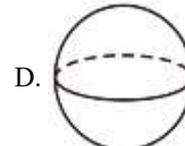
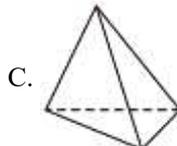
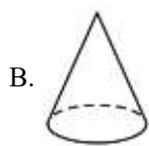
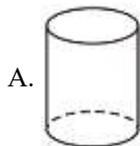


2024 北京十一学校初三 3 月月考

数 学

一. 选择题 (共 16 分, 每题 2 分) 第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

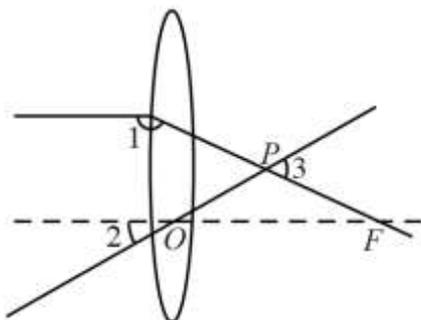
1. 下列几何体中, 主视图为下图的是 ()



2. 自 2020 年 1 月 23 日起, 我国仅用大概 10 天就建成了火神山医院, 18 天建成了雷神山医院, 彰显了“中国速度”. 雷神山医院和火神山医院总建筑面积约为 113800 平方米. 将 113800 用科学记数法表示应为 ()

- A. 1.138×10^5 B. 11.38×10^4 C. 1.138×10^4 D. 0.1138×10^6

3. 如图, 一束平行于主光轴的光线经凸透镜折射后, 其折射光线与一束经过光心 O 的光线相交于点 P , 点 F 为焦点. 若 $\angle 1 = 155^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 3$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 50° C. 55° D. 60°

4. 实数 a, b, c 在数轴上对应点的位置如图所示, 如果 a, c 的绝对值相等, 那么下列结论正确的是 ()



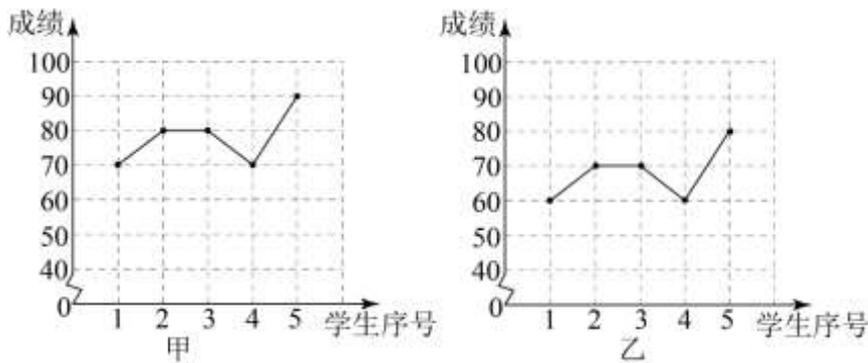
- A. $a+b > 0$ B. $abc < 0$ C. $c < -b$ D. $b-a > 0$

5. 中国古代的“四书”是指《论语》《孟子》《大学》《中庸》, 它是儒家思想的核心著作, 是中国传统文化的重要组成部分. 若从这四部著作中随机抽取两本 (先随机抽取一本, 不放回, 再随机抽取另一本), 抽取的两本恰好是《论语》和《大学》的概率是 ()



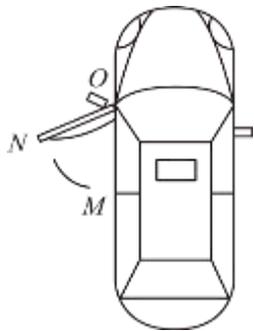
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 为庆祝中国共产主义青年团成立100周年，某区举办了团课知识竞赛，甲、乙两所中学各派5名学生参加，两队学生的竞赛成绩如图所示，下列关系完全正确的是（ ）



- A. $S_{甲}^2 < S_{乙}^2, \bar{x}_{甲} = \bar{x}_{乙}$ B. $S_{甲}^2 = S_{乙}^2, \bar{x}_{甲} > \bar{x}_{乙}$ C. $S_{甲}^2 > S_{乙}^2, \bar{x}_{甲} > \bar{x}_{乙}$ D. $S_{甲}^2 = S_{乙}^2, \bar{x}_{甲} < \bar{x}_{乙}$

7. 如图，某汽车车门的底边长为1m，车门侧开后的最大角度为 72° ，若将一扇车门侧开，则这扇车门底边扫过区域的最大面积是（ ）



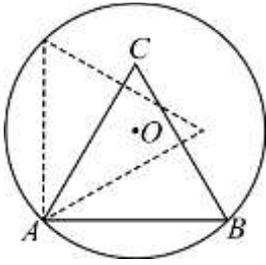
- A. $\frac{\pi}{10} \text{m}^2$ B. $\frac{\pi}{5} \text{m}^2$ C. $\frac{2\pi}{5} \text{m}^2$ D. $\frac{4\pi}{5} \text{m}^2$

8. 如图，等边三角形 ABC 的边长为2，点 A, B 在 $\odot O$ 上，点 C 在 $\odot O$ 内， $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$ 。

将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转，在旋转过程中得到两个结论：

- ①当点 C 第一次落在 $\odot O$ 上时，旋转角为 30° ；
- ②当 AC 第一次与 $\odot O$ 相切时，旋转角为 60° 。

则结论正确的是（ ）



A. ①

B. ②

C. ①②

D. 均不正确

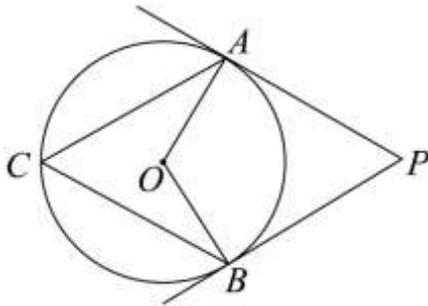
二. 填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 若 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

10. 因式分解: $2x^3 - 8x =$ _____.

11. 分式方程 $\frac{3}{x} = \frac{1}{x-1}$ 的解为 $x =$ _____.

12. 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的切线, A, B 为切点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 若 $\angle APB = 60^\circ$, 则 $\angle ACB =$ _____.



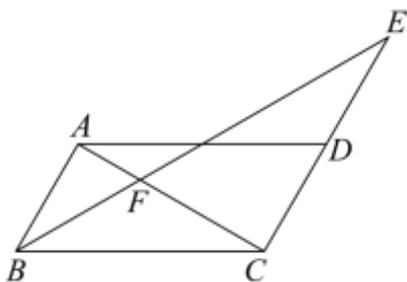
13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(1, 2)$ 和点 $B(-1, m)$, 则 m 的值为_____.

14. 某科技公司开展技术研发, 在相同条件下, 对运用新技术生产的一批产品的合格率进行检测, 下表是检测过程中的一组统计数据:

抽取的产品数 n	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
合格的产品数 m	476	967	1431	1926	2395	2883	3367	3836
合格的产品频率 m/n	0.952	0.967	0.954	0.963	0.958	0.961	0.962	0.959

估计这批产品合格的产品的概率为_____ (精确到 0.01).

15. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 延长 CD 至点 E , 使 $DE = DC$, 连接 BE 与 AC 于点 F , 则 $\frac{BF}{FE}$ 的值是_____.



16. 春季是传染病的高发季节，社区负责人决定组织本社区所有居民到 A, B 两个站点接种流感疫苗. 已知 A 站点从准备至连续为 a 人接种疫苗所需时间为 $\left(\frac{1}{2}a + 30\right)$ 分; B 站点从准备至连续为 b 人接种疫苗所需时间为 $\left(\frac{1}{3}b + 50\right)$ 分. 一开始社区负责人先试着将 90 名居民按一定比例分配到 A, B 两个站点进行疫苗接种, 结果两站点正好在相同时间完成了接种任务, 则分配到 A 站点的人数与分配到 B 站点的人数之比为 _____; 为了使接种工作不间断进行, 在前面的 90 名居民即将结束时, 社区负责人又给 A 站点分配了 m 名未接种居民, B 站点分配了 n 名未接种居民. 为保证两站点在相同的时间完成接种任务, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 _____.

三. 解答题 (共 68 分, 第 17-19 题, 每题 5 分, 第 20 题 6 分, 第 21-23 题, 每题 5 分, 第 24-26 题, 每题 6 分, 第 27、28 题, 每题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $\sqrt{12} - 3 \tan 30^\circ - (1 - \pi)^0 + |-\sqrt{3}|$.

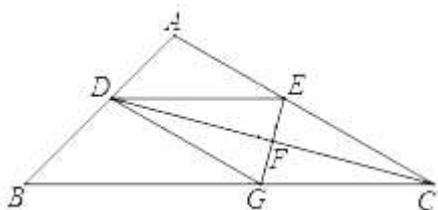
18. 解不等式组: $\begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \end{cases}$, 并写出它的所有非负整数解.

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-4)x^2 - (2m-1)x + m = 0$ 有两个不相等的实数根.

- (1) 求 m 的取值范围;
- (2) 当 m 取满足要求的最小正整数时, 求方程的解.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 平分 $\angle ACB$, CD 的垂直平分线分别交 AC 、 DC 、 BC 于点 E 、 F 、 G , 连接 DE 、 DG .

- (1) 求证: 四边形 $DGCE$ 是菱形;
- (2) 若 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $ED = 6$, 求 BG 的长.



21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = -x$ 的图象平移得到, 且经过



点(1,1).

(1) 求这个一次函数的表达式;

(2) 当 $x > -1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx - 1 (m \neq 0)$ 的值小于一次函数 $y = kx + b$ 的值, 直接写出 m 的取值范围.

22. 电影《刘三姐》中, 有这样一个场景, 罗秀才摇头晃脑地吟唱道: “三百条狗交给你, 一少三多四下分, 不要双数要单数, 看你怎样分得匀?” 该歌词表达的是一道数学题. 其大意是: 把 300 条狗分成 4 群, 每个群里, 狗的数量都是奇数, 其中一个群, 狗的数量少; 另外三个群, 狗的数量多且数量相同. 问: 应该如何分? 请你根据题意解答下列问题:

(1) 刘三姐的姐妹们以对歌的形式给出答案: “九十九条打猎去, 九十九条看羊来, 九十九条守门口, 剩下三条给财主.” 请你根据以上信息, 判断以下三种说法是否正确, 在题后相应的括号内, 正确的打 “√”, 错误的打 “×”.

①刘三姐的姐妹们给出的答案是正确的, 但不是唯一正确的答案. ()

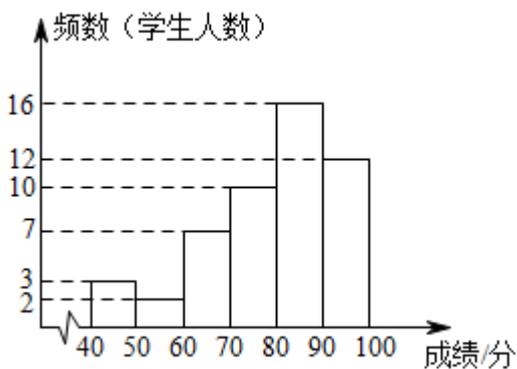
②刘三姐的姐妹们给出的答案是唯一正确的答案. ()

③该歌词表达的数学题的正确答案有无数多种. ()

(2) 若罗秀才再增加一个条件: “数量多且数量相同的三个群里, 每个群里狗的数量比数量较少的那个群里狗的数量多 40 条”, 求每个群里狗的数量.

23. 为迎接 2022 年冬奥会, 鼓励更多的学生参与到志愿服务中来, 甲、乙两所学校组织了志愿服务团队选拔活动, 经过初选, 两所学校各 400 名学生进入综合素质展示环节. 为了了解两所学校学生的整体情况, 从两校进入综合素质展示环节的学生中分别随机抽取了 50 名学生的综合素质展示成绩 (百分制), 并对数据 (成绩) 进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 甲学校学生成绩的频数分布直方图如下 (数据分成 6 组: $40 \leq x < 50$, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x < 100$):



b. 甲学校学生成绩在 $80 \leq x < 90$ 这一组的是:

80 80 81 81.5 82 83 83 84 85 86 86.5 87 88 88.5 89 89

c. 乙学校学生成绩的平均数、中位数、众数、优秀率 (85 分及以上为优秀) 如下:

平均数	中位数	众数	优秀率
83.3	84	78	46%

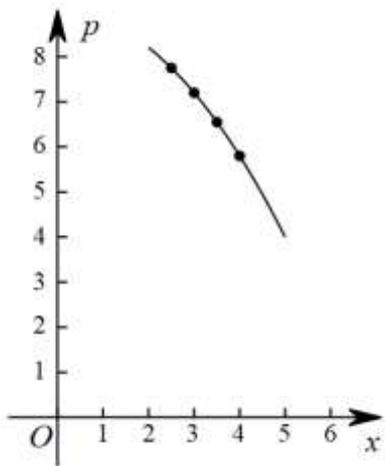


根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 甲学校学生 A ，乙学校学生 B 的综合素质展示成绩同为 83 分，这两人在本校学生中的综合素质展示排名更靠前的是_____（填“ A ”或“ B ”）；
- (2) 根据上述信息，推断_____学校综合素质展示的水平更高，理由为_____（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）；
- (3) 若每所学校综合素质展示的前 120 名学生将被选入志愿服务团队，预估甲学校分数至少达到_____分的学生才可以入选。

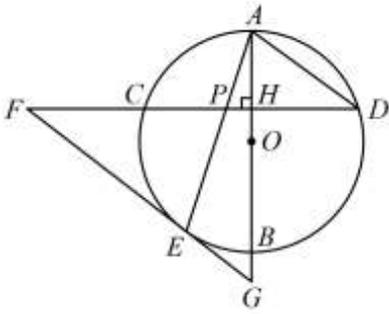
24. 为指导菜农生产和销售某种蔬菜，小明进行了如下调查，得到某种蔬菜的售价 x （元/千克）与相应需求量 p （千克）以及供给量 q （千克）的数据，如下表：

售价 x （元/千克）	...	2.5	3	3.5	4	...
需求量 p （千克）	...	7.75	7.2	6.55	5.8	...
供给量 q （千克）	...	1.5	2	2.5	3	



- (1) 观察表中的数据，小明发现：供给量 q （千克）与售价 x （元/千克）之间满足_____函数关系（横线上填“一次”、“二次”或“反比例”），它的函数表达式为_____；
- (2) 为了研究这种蔬菜的需求量 p （千克）与售价 x （元/千克）之间的关系，小明在坐标系中，以售价为横坐标、相应需求量为纵坐标描出下列四个点，将其用平滑曲线连线，如图。通过再图观察，小明发现这种蔬菜的需求量 p （千克）与售价 x （元/千克）之间满足二次函数关系，并进一步确定它的函数表达式满足 $p = ax^2 + c$ 的形式，请求出 p 关于 x 关于的函数表达式。
- (3) 为使这种蔬菜供需平衡（即供给量与需求量相等），售价应定为多少？

25. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ，垂足为 H ， E 为 BC 上一点，过点 E 作 $\odot O$ 的切线，分别交 DC ， AB 的延长线于点 F ， G 。连接 AE ，交 CD 于点 P 。



(1) 求证: $\angle FEP = \angle FPE$;

(2) 连接 AD , 若 $AD \parallel FG$, $CD = 4$, $\cos F = \frac{4}{5}$, 求 EG 的长.

26. 在平面直角坐标系中, 设二次函数 $y = x^2 - 2ax + 1$ (a 是常数).

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数图象的顶点坐标;

(2) 若函数图象经过点 $(1, p), (-1, q)$, 求证: $pq \leq 4$;

(3) 已知函数图象经过点 $A(-4, y_1), B(a+2, y_2)$, 点 $C(m, y_3)$, 若对于任意的 $5 \leq m \leq 8$ 都满足 $y_1 > y_3 > y_2$, 求 a 的取值范围.

27. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, D 是 BC 边上的动点, 将线段 AD 绕点 D 顺时针旋转 60° 得到线段 DE .

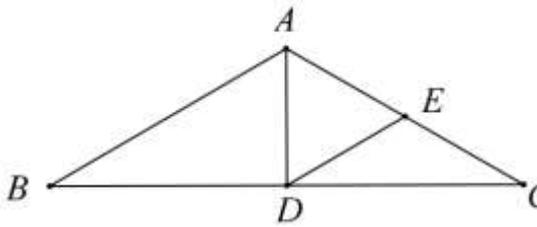


图 1

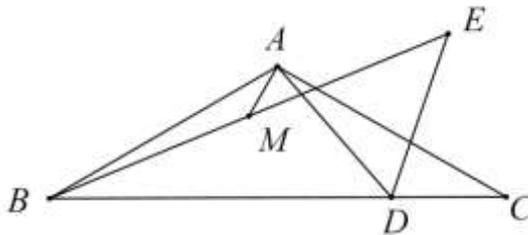


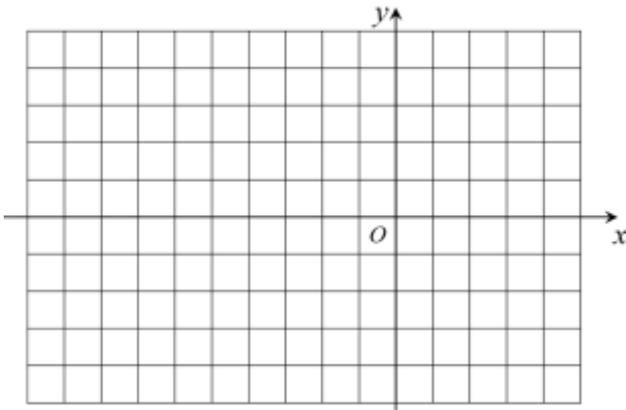
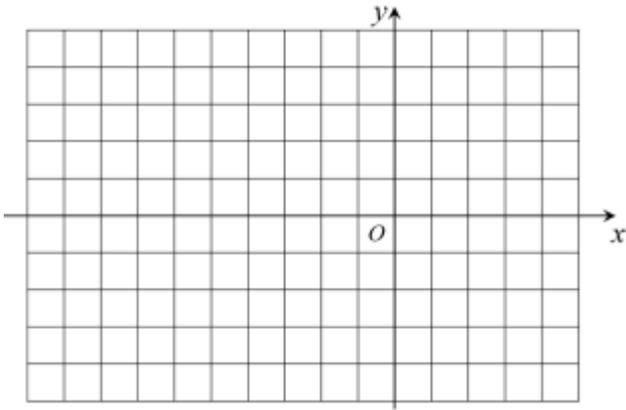
图 2

(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 求证: D 是 BC 的中点;

(2) 如图 2, 连接 BE , 取线段 BE 的中点 M , 连接 AM , 直接写出 $\angle MAC$ 的大小并证明;

(3) 若 F 是 BC 的中点, $BC = 6$, 直接写出 EF 的最小值为_____.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 P 和图形 M , 若图形 M 上存在点 Q , 使得直线 PQ 经过第四象限, 则称点 P 是图形 M 的“四象点”. 已知点 $A(-2, 4)$, $B(2, 1)$.



- (1) 在点 $P_1(-4, -2)$, $P_2(-1, -2)$, $P_3(1, -2)$ 中, _____ 是线段 AB 的四象点;
- (2) 已知点 $C(t, 0)$, $D(t+4, 0)$, 若等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列) 上的点均不是线段 AB 的四象点, 求 t 的取值范围;
- (3) 已知以 $T\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ 为圆心且半径为 2 的 $\odot T$, 若线段 AB 上的点 P 是 $\odot T$ 的四象点, 请直接写出点 P 的横坐标 x_P 的取值范围.



参考答案

一. 选择题 (共 16 分, 每题 2 分) 第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 【答案】A

【分析】在正面内得到的由前向后观察物体的视图, 叫做主视图; 再结合常见几何体的主视图特征判断即可

【详解】解: A. 主视图为矩形, 符合题意;

B. 主视图为三角形, 不符合题意;

C. 主视图为有一公共边的两个三角形, 不符合题意;

D. 主视图为圆, 不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题考查了主视图的概念, 牢记观察方向是解题关键.

2. 【答案】A

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】将数据 113800 用科学记数法可表示为: 1.138×10^5 .

故选: A.

【点睛】本题考查了科学记数法的表示方法. 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. 【答案】C

【分析】利用平行线的性质及三角形外角的性质即可求解.

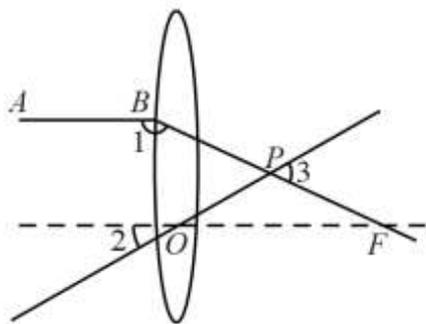
【详解】解: $\because AB \parallel OF$,

$$\therefore \angle 1 + \angle BFO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFO = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle POF + \angle BFO = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ;$$



故选: C.

【点睛】本题考查了平行线的性质, 三角形外角的性质等知识, 掌握这两个知识点是关键.

4. 【答案】D

【分析】根据实数 a , b , c 在数轴上对应点的位置和绝对值的性质判断 a , b , c 的正负, 再根据不等式的



性质，实数的乘法运算法则判断 A, B 不符合题意；根据实数 a, b 在数轴上对应点的位置判断 D 符合题意；再结合绝对值的性质判断 C 不符合题意。

【详解】解：∵ a, c 的绝对值相等，且实数 a 在数轴上的对应点在实数 c 在数轴上对应点的左边，

$$\therefore a+c=0, a<0, c>0,$$

∴ 实数 a 与实数 c 在数轴上的对应点所组成的线段的中点是原点， $a=-c$ ，

∴ 实数 b 在数轴上对应点到实数 a 在数轴上对应点的距离小于实数 b 在数轴上对应点到实数 c 在数轴上对应点的距离，

$$\therefore b<0,$$

$$\therefore a+b<0, abc>0,$$

故 A 不符合题意，

B 不符合题意，

∴ 实数 a 在数轴上的对应点在实数 b 在数轴上对应点的左边，

$$\therefore a<b, b-a>0,$$

故 D 符合题意，

$$\therefore -c<b,$$

$$\therefore c>-b,$$

故 C 不符合题意，

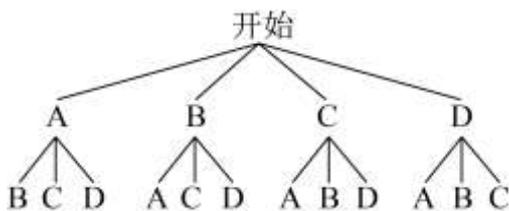
故选：D.

【点睛】本题考查根据点在数轴上的位置判断式子的正负，绝对值的性质，实数的乘法运算，不等式的性质，熟练掌握这些知识点是解题关键.

5. 【答案】B

【分析】用列表法或画树状图法列举出所有等可能的结果，从中找出抽取的两本恰好是《论语》和《大学》的可能结果，再利用概率公式求出即可.

【详解】解：记《论语》《孟子》《大学》《中庸》分别为 A, B, C, D ，画树状图如下：



一共有 12 种等可能的结果，其中抽取的两本恰好是《论语》（即 A ）和《大学》（即 C ）的可能结果有 2 种可能，

$$\therefore P(\text{抽取的两本恰好是《论语》和《大学》}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

故选：B.

【点睛】本题考查列表法和画树状图法求等可能事件的概率，掌握列表法和画树状图法求等可能事件概率的方法是解题的关键.



6. 【答案】B

【分析】分别求出两所中学 5 名学生的成绩的平均数和方差，即可求解.

【详解】解：根据题意得：甲所中学 5 名学生的成绩为 70，80，80，70，90，乙所中学 5 名学生的成绩为 60，70，70，60，80，

$$\therefore \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{5}(70+80+80+70+90) = 78, \quad \bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{5}(60+70+70+60+80) = 68,$$

$$S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(70-78)^2 + (80-78)^2 + (80-78)^2 + (70-78)^2 + (90-78)^2] = 56,$$

$$S_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5}[(60-68)^2 + (70-68)^2 + (70-68)^2 + (60-68)^2 + (80-68)^2] = 56,$$

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2, \quad \bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}.$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查了求平均数和方差，熟练掌握求平均数和方差的公式是解题的关键.

7. 【答案】B

【分析】本题考查扇形的面积. 根据这扇车门底边扫过的区域是扇形，求出扇形的半径和圆心角，然后由扇形的面积公式计算即可.

【详解】解：根据题意这扇车门底边扫过的区域是扇形，

其中扇形的半径为 1m，圆心角最大角度为 72° ，

$$\therefore \text{扇形的最大面积为：} \frac{72\pi r^2}{360} = \frac{\pi}{5} (\text{m}^2),$$

故选：B.

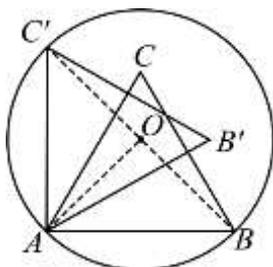
8. 【答案】A

【分析】本题考查了切线的性质，图形的旋转，熟练掌握旋转的性质，等边三角形，圆的切线性质的性质，是解题的关键.

①当点 C 第一次落在 $\odot O$ 上时，连接 AO、BO、 $C'O$ ，可证明 $\triangle ABO$ 是等腰直角三角形，B、 C' 、O 三点共线，再求出 $\angle CAO = 15^\circ$ ，可得 $\angle CAC' = 30^\circ$ ；

②当 AC 与 $\odot O$ 相切时，连接 CO 并延长与 AB 交于点 M，连接 AO，先求出 $\angle OAM = 45^\circ$ ， $\angle BAC' = 135^\circ$ ， $\angle BAB' = 75^\circ$ ，即可得出结论.

【详解】解：①当点 C 第一次落在 $\odot O$ 上时，连接 AO、BO、 $C'O$ ，





$$\because AO = BO = \sqrt{2}, \quad AB = 2,$$

$\therefore \triangle ABO$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AO \perp BO,$$

$$\text{又} \because AO = C'O = \sqrt{2}, \quad AC' = AC = 2,$$

$$\therefore AO^2 + C'O^2 = AC'^2,$$

$\therefore \triangle AOC'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AO \perp OC',$$

$\therefore B, C', O$ 三点共线,

$$\because AB = AC',$$

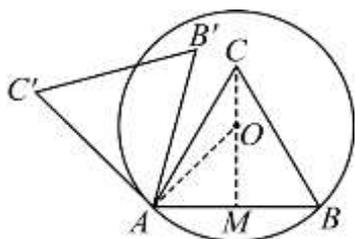
$$\therefore \angle ABC' = \angle AC'B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC' = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAC' = \angle BAC' - \angle BAC = 30^\circ, \text{ 故①正确;}$$

当 AC 与 $\odot O$ 相切时, 连接 CO 并延长与 AB 交于点 M , 连接 AO ,



$\because \triangle ABC$ 是正三角形,

$$\therefore CM \perp AB,$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore AM = 1,$$

$$\because OA = \sqrt{2},$$

$$\therefore OM = 1,$$

$$\therefore \angle OAM = 45^\circ,$$

$$\because \angle OAC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC' = 135^\circ,$$

$$\because \angle C'AB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAB' = 75^\circ,$$

\therefore 当 AC 第一次与 $\odot O$ 相切时, 旋转角为 75° , 故②错误,

故选: A.

二. 填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 【答案】 $x \geq -1$

【分析】根据二次根式有意义的条件: 被开方数为非负数, 列不等式求解即可.



【详解】由题意可知 $x+1 \geq 0$,

$\therefore x \geq -1$.

故答案为: $x \geq -1$.

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件,明确被开方数为非负数是解题关键.

10. 因式分解: $2x^3 - 8x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2x(x+2)(x-2)$

【分析】先提公因式,再利用平方差公式继续分解即可解答.

【详解】解: $2x^3 - 8x$

$$= 2x(x^2 - 4)$$

$$= 2x(x+2)(x-2)$$

故答案为: $2x(x+2)(x-2)$

【点睛】本题考查了提公因式法与公式法的综合运用,一定要注意如果多项式的各项含有公因式,必须先提公因式.

11. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程,求出整式方程的解得到 x 的值,经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{3}{x} = \frac{1}{x-1}$

去分母整理得: $3x - 3 = x$,

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2},$$

经检验, $x = \frac{3}{2}$ 是分式方程的解,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

【点睛】此题考查了解分式方程,利用了转化的思想,解分式方程注意要检验.

12. 【答案】 60

【分析】先根据圆的切线的性质可得 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$,再根据四边形的内角和可得 $\angle AOB = 120^\circ$,然后根据圆周角定理即可得.

【详解】解: $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle APB = 120^\circ,$$



由圆周角定理得： $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$ ，

故答案为：60.

【点睛】本题考查了圆的切线的性质、圆周角定理等知识点，熟练掌握圆的切线的性质和圆周角定理是解题关键.

13. 【答案】 -2

【分析】由题意易得 $k = 2$ ，然后再利用反比例函数的意义可进行求解问题.

【详解】解：把点 $A(1,2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得： $k = 2$ ，

$\therefore -1 \times m = 2$ ，解得： $m = -2$ ，

故答案为-2.

【点睛】本题主要考查反比例函数的图象与性质，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题的关键.

14. 【答案】 0.96

【分析】本题主要考查利用频率估计概率，大量重复试验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个固定的近似值就是这个事件的概率，据此求解即可.

【详解】解：由表可知合格的产品频率都在 0.95 左右浮动，所以可估计这批产品合格的产品的概率为 0.96，

故答案为：0.96.

15. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质等知识点，证得 $\triangle ABF \sim \triangle CEF$ 成为解题的关键.

由平行四边形的性质结合已知条件可得 $AB = CD = DE = \frac{1}{2}CE$ ，再证明 $\triangle ABF \sim \triangle CEF$ ，最后根据相似三角形对应边成比例即可解答.

【详解】解：在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore DE = DC$ ，

$\therefore AB = CD = DE = \frac{1}{2}CE$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CEF$ ，

$\therefore \frac{BF}{FE} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.



16. 【答案】 ①. 2 : 1 ②. $\frac{2}{3}$

【分析】 本题主要考查一元一次方程的应用及比例的基本性质，熟练掌握一元一次方程的应用及比例的基本性质是解题的关键. 设分配到 A 站点的人数为 x 名，则分配到 B 站点的人数为 $(90-x)$ ，依题意可得

得 $\frac{1}{2}x + 30 = \frac{1}{3}(90-x) + 50$ ，然后求解即可，由题意可得第二天开工时，由上一问可得方程为

$\frac{1}{2}(60+m) + 30 = \frac{1}{3}(30+n) + 50$ ，进而求解即可得出答案.

【详解】 解：设分配到 A 站点的人数为 x 名，则分配到 B 站点的人数为 $(90-x)$ ，依题意可得：

$$\frac{1}{2}x + 30 = \frac{1}{3}(90-x) + 50$$

解得： $x = 60$ ，

∴ 分配到 B 站点人数为 $90 - x = 90 - 60 = 30$ （人），

∴ 分配到 A 站点的人数与分配到 B 站点的人数的比为 $60:30 = 2:1$ ；

∴ 为了使接种工作不间断进行，在前面的 90 名居民即将结束时，社区负责人又给 A 站点分配了 m 名未接种居民，B 站点分配了 n 名未接种居民. 为保证两站点在相同的时间完成接种任务，

$$\therefore \frac{1}{2}(60+m) + 30 = \frac{1}{3}(30+n) + 50$$

解得： $3m = 2n$

$$\text{即 } \frac{m}{n} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $2 : 1 ; \frac{2}{3}$.

三. 解答题（共 68 分，第 17-19 题，每题 5 分，第 20 题 6 分，第 21-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27、28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 【答案】 $2\sqrt{3} - 1$

【分析】 先根据二次根式的性质，特殊角三角函数值，零指数幂，绝对值的意义将原式化简，再进行加减运算即可.

$$\text{【详解】 解： } \sqrt{12} - 3\tan 30^\circ - (1-\pi)^0 + |-\sqrt{3}|$$

$$= 2\sqrt{3} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 1.$$

【点睛】 本题考查实数的运算. 掌握二次根式的性质、特殊角三角函数值、零指数幂、绝对值的意义是解



题的关键.

18. 【答案】不等式组的所有非负整数解为：0, 1, 2, 3.

【分析】先解不等式组求出 x 的取值范围，然后找出符合范围的非负整数解.

$$\text{【详解】解：} \begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \text{①} \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \text{②} \end{cases}$$

由不等式①得： $x \geq -2$,

由不等式②得： $x < \frac{7}{2}$,

\therefore 不等式组的解集为： $-2 \leq x < \frac{7}{2}$,

$\therefore x$ 的非负整数解为：0, 1, 2, 3.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组及求一元一次不等式组的非负整数解，求不等式的公共解，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

19. 【答案】(1) $m > -\frac{1}{12}$ 且 $m \neq 4$

$$(2) x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

【分析】(1) 根据方程有两个不相等的实数根，则根的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2m-1)]^2 - 4m(m-4) > 0$ ，且 $m-4 \neq 0$ ，求出 m 的取值范围即可；

(2) 得到 m 的最小整数，利用公式法解一元二次方程即可.

【小问1详解】

\therefore 一元二次方程 $(m-4)x^2 - (2m-1)x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m-1)]^2 - 4m(m-4) > 0$ ，且 $m-4 \neq 0$ ，

即 $4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 16m > 0$ ，且 $m-4 \neq 0$ ，

解得： $m > -\frac{1}{12}$ 且 $m \neq 4$ ；

【小问2详解】

m 满足条件的最小正整数是 $m = 1$ ，

此时方程为 $-3x^2 - x + 1 = 0$ ，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-3) \times 1}}{2 \times (-3)} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{-6}$$

解得： $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ ， $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，公式法解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程



$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系是解答本题的关键.

20. 【答案】(1) 详见解析; (2) $BG = 3 + 3\sqrt{3}$

【分析】(1) 由角平分线的性质和垂直平分线的性质可证 $\angle EDC = \angle DCG = \angle ACD = \angle GDC$, 可得 $CE \parallel DG, DE \parallel GC$, 由菱形的判定可证结论;

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$, 由菱形的性质可得 $DE = DG = 6, DG \parallel EC$, 由直角三角形的性质可得 $BH = DH = 3, HG = \sqrt{3}DH = 3\sqrt{3}$, 即可求 BG 的长.

【详解】(1) $\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACD = \angle DCG,$$

$\because EG$ 垂直平分 CD

$$\therefore DG = CG, DE = EC,$$

$$\therefore \angle DCG = \angle GDC, \angle ACD = \angle EDC$$

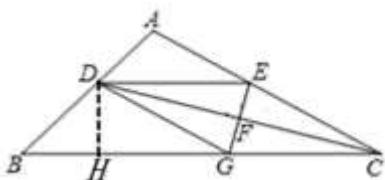
$$\therefore \angle EDC = \angle DCG = \angle ACD = \angle GDC$$

$$\therefore CE \parallel DG, DE \parallel GC$$

\therefore 四边形 $DECG$ 是平行四边形, 且 $DE = EC$

\therefore 四边形 $DGCE$ 是菱形;

(2) 如图, 过点 D 作 $DH \perp BC$,



\because 四边形 $DGCE$ 是菱形,

$$\therefore DE = DG = 6, DG \parallel EC$$

$\therefore \angle ACB = \angle DGB = 30^\circ$, 且 $DH \perp BC$

$$\therefore DH = 3, HG = \sqrt{3}DH = 3\sqrt{3}$$

$\because \angle B = 45^\circ, DH \perp BC$

$$\therefore \angle B = \angle BDH = 45^\circ$$

$$\therefore BH = DH = 3$$

$$\therefore BG = BH + HG = 3 + 3\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了菱形的判定和性质, 角平分线的性质, 线段垂直平分线的性质, 直角三角形的性质, 熟练运用菱形的判定和性质是本题的关键.

21. 【答案】(1) $y = -x + 2$

$$(2) -4 \leq m \leq -1$$

【分析】(1) 根据一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = -x$ 的图象平移得到, 得出 $k = -1$, 把 $(1, 1)$ 代入 $y = -x + b (k \neq 0)$, 即可求出 b 的值, 得出一一次函数关系式;



(2) 根据函数图象结合题意先推理得出 $m < 0$ ，然后将 $x = -1$ 代入 $y = -x + 2$ 得出函数值 $y = 3$ ，根据题意即可列出 $mx - 1 \leq 3$ ，得出 $x \geq \frac{4}{m}$ ，根据此时 $x > -1$ 得出 $\frac{4}{m} \leq -1$ ，解得 $m \geq -4$ ，结合图象得出 m 的取值范围即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = -x$ 的图象平移得到，

$$\therefore k = -1.$$

∵ 一次函数 $y = -x + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(1, 1)$ ，

$$\therefore 1 = -1 + b,$$

$$\therefore b = 2,$$

∴ 这个一次函数的表达式为 $y = -x + 2$ 。

【小问 2 详解】

根据函数 $y = -x + 2$ 的函数图象可知，要使当 $x > -1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx - 1 (m \neq 0)$ 的值小于一次函数 $y = kx + b$ 的值，则 m 一定要小于 0，

把 $x = -1$ 代入 $y = -x + 2$ 得： $y = 3$ ，

$$\therefore mx - 1 < 3,$$

$$\therefore x > \frac{4}{m},$$

$$\therefore x > -1,$$

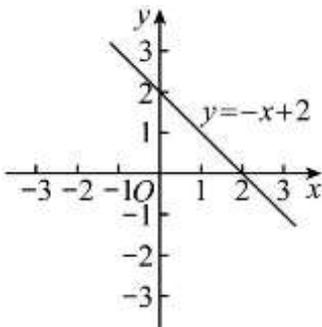
$$\therefore \frac{4}{m} \leq -1,$$

$$\therefore 4 \geq -m,$$

$$\text{即 } -m \leq 4,$$

$$\therefore m \geq -4,$$

故 m 的取值范围为 $-4 \leq m \leq -1$ 。



【点睛】 本题主要考查了求一次函数解析式，一次函数的性质，熟练掌握平移后一次函数关系式中的 k 值不变，是解题的关键。

22. **【答案】** (1) $\sqrt{\quad}$, \times , \times

(2) 数量少的群里狗的数量为 45 只，狗的数量多且数量相同的群里狗的数量为 85 只



【分析】(1) 根据题意，姐妹们给出的答案是符合要求的；除此之外，还可分成 97,97,97,9 等，这里的每群狗的数量还需要是正整数，所以答案不是无数种，即可判断；

(2) 设数量少的狗群的数量为 x 只，则狗的数量多且数量相同的群里狗的数量为 $(x+40)$ 只，根据狗的总数为 300 只，可列一元一次方程，求解即可。

【小问 1 详解】

根据题意，姐妹们给出的答案是符合要求的；除此之外，还可分成 97,97,97,9 等，

∴刘三姐的姐妹们给出的答案是正确的，但不是唯一正确的答案，

∴这里的每群狗的数量还需要是正整数，

∴答案不是无数种，

∴①√，②×，③×，

故答案为：√，×，×；

【小问 2 详解】

设数量少的狗群的数量为 x 只，则狗的数量多且数量相同的群里狗的数量为 $(x+40)$ 只，由题意得：

$$x + 3(x + 40) = 300,$$

解得 $x = 45$ ，

$$x + 40 = 85 \text{ (只)},$$

所以，数量少的群里狗的数量为 45 只，狗的数量多且数量相同的群里狗的数量为 85 只。

【点睛】本题考查了一元一次方程的实际应用，整式加减的运用，准确理解题意并熟练掌握知识点是解题的关键。

23. 【答案】(1) A；(2) 乙；理由：乙校的中位数高于甲校，乙校的优秀率高于甲校；(3) 88.5

【分析】(1) 先算出甲校的中位数，发现 A 的成绩在中位数前，而读表得出 B 的成绩在中位线以下，以此判断排名；

(2) 计算出甲校的中位数，优秀率，比较回答即可；

(3) 先计算 90-100 分的人数为 96 人，不够 120 人，要从 80-90 分之间补充，设需要补充 x 个人，根据题意，得 $\frac{12 + x}{50} \times 400 = 120$ ，解得 x 即可。

【详解】解：(1) 甲校共有 50 名学生，则中位数为第 25 位和第 26 位的平均成绩

由直方图和题干数据得，第 25 位和第 26 位的成绩为：81 和 81.5

$$\therefore \text{中位数为: } \frac{81 + 81.5}{2} = 81.25$$

∴A 成绩为 83 分，高于中位数，则 A 排名在甲校为前半部分

∴B 成绩为 83 分，低于乙校中位数 84，则 B 排名在乙校为后半部分

故 A 的排名更靠前；

故答案为：A；



(2) 乙校，理由如下：甲校的优秀率为： $\frac{8+12}{50} \times 100\% = 40\%$ ，由(1)甲校的中位数是81.25分，乙校的中位数是84，优秀率为46%，从中位数，优秀率两个方面比较看出，乙校都高于甲校，故乙校高，故答案为：乙校，乙校的中位数高于甲校，乙校的优秀率高于甲校；

(3) 根据题意，90-100分的人数为： $\frac{12}{50} \times 400 = 96$ 人，不够120人，要从80-90分之间补充，设需要补充 x 个人，

根据题意，得 $\frac{12+x}{50} \times 400 = 120$ ，解得 $x=3$ ，

而这个3个数依次为89，89，88.5，至少要88.5分，

故答案为：88.5.

【点睛】 本题考查了中位数，数据的集中趋势，直方图，样本估计总体，熟练掌握中位数的定义，直方图的意义，用样本估计总体的思想是解题的关键.

24. **【答案】** (1) 一次函数， $y = x - 1$

$$(2) p = -\frac{1}{5}x^2 + 9$$

(3) 为使这种蔬菜供需平衡（即供给量与需求量相等），售价应定为5元.

【分析】 (1) 根据供给量 q （千克）与售价 x （元/千克）之间的数量关系可得到答案；

(2) 利用待定系数法求出函数表达式即可；

(3) 根据供给量与需求量相等得到 $-\frac{1}{5}x^2 + 9 = x - 1$ ，解方程即可得到答案.

【小问1详解】

解：观察表中的数据，可发现供给量 q （千克）与售价 x （元/千克）之间满足一次函数关系，它的函数表达式是 $y = x - 1$ ，

故答案为：一次函数， $y = x - 1$

【小问2详解】

由表格可知当 $x = 2.5$ 时， $y = 7.75$ ，当 $x = 3$ 时， $y = 7.2$ ，

$$\therefore \begin{cases} 7.75 = a \times 2.5^2 + c \\ 7.2 = a \times 3^2 + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ c = 9 \end{cases}$$

$\therefore p$ 关于 x 关于的函数表达式是 $p = -\frac{1}{5}x^2 + 9$.

【小问3详解】



当蔬菜供需平衡（即供给量与需求量相等）时， $-\frac{1}{5}x^2 + 9 = x - 1$ ，

即 $x^2 + 5x - 50 = 0$ ，

解得 $x_1 = 5, x_2 = -10$ （不合题意，舍去），

∴ 为使这种蔬菜供需平衡（即供给量与需求量相等），售价应定为 5 元。

【点睛】此题考查了一次函数和二次函数的综合应用，还考查了待定系数法、解一元二次方程等知识，根据题意得到函数解析式是解题的关键。

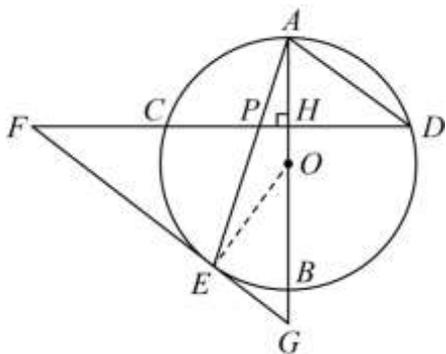
25. 【答案】(1) 见解析 (2) $EG = \frac{25}{16}$

【分析】(1) 连接 OE ，由切线的性质和垂径定理可得 $\angle OEF = 90^\circ$ ， $\angle AHP = 90^\circ$ ，利用余角的性质可证 $\angle FEP = \angle APH$ ，进而可证结论成立；

(2) 连接 OD ，设 $\odot O$ 的半径为 r ，由平行线的性质得 $\angle ADH = \angle F$ ，由余弦的定义求出 DH 的长，在 $Rt\triangle AHD$ 中，勾股定理求得 $r = \frac{25}{12}$ ，在 $Rt\triangle FHG$ 中， $\sin G = \cos F = \frac{4}{5}$ ，即可求得 OG ，进而勾股定理，即可求解。

【小问 1 详解】

证明：连接 OE ，



∵ EF 为 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle OEF = 90^\circ$

∴ $\angle OEA + \angle PEF = 90^\circ$ ，

∵ $CD \perp AB$ ，

∴ $\angle AHP = 90^\circ$

∴ 在 $\triangle APH$ 中， $\angle PAH + \angle APH = 90^\circ$

又∵ $OE = OA$ ，

∴ $\angle OEA = \angle PAH$ ，

∴ $\angle FEP = \angle APH$ ，

∴ $\angle APH = \angle FPE$ ，

∴ $\angle FEP = \angle FPE$ 。



【小问2详解】

解：∵ $AD \parallel FG$,

$$\therefore \angle F = \angle ADH,$$

$$\therefore \cos F = \frac{4}{5},$$

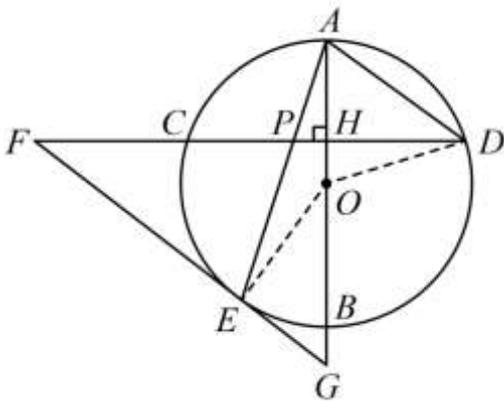
$$\therefore \cos \angle ADH = \frac{4}{5},$$

∵ 弦 $CD \perp AB, CD = 4$,

$$\therefore DH = \frac{1}{2}CD = 2, \angle AHD = \angle OHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt } \triangle AHD \text{ 中, } AD = \frac{DH}{\cos \angle ADH} = \frac{5}{2}, AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{3}{2},$$

如图所示, 连接 OD ,



设半径 $OD = r$, 则 $OH = OA - AH = r - \frac{3}{2}$,

∵ 在 $\text{Rt } \triangle OHD$ 中, $OH^2 + DH^2 = OD^2$,

$$\therefore \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 = r^2,$$

$$\text{解得 } r = \frac{25}{12},$$

∵ 在 $\text{Rt } \triangle FHG$ 中, $\sin G = \cos F = \frac{4}{5}$,

∵ 在 $\text{Rt } \triangle OEG$ 中, $\sin G = \frac{OE}{OG} = \frac{4}{5}$, 且 $OE = OD = r = \frac{25}{12}$,

$$\therefore OG = \frac{OE}{\sin G} = \frac{\frac{25}{12}}{\frac{4}{5}} = \frac{125}{48},$$



$$\therefore EG = \sqrt{OG^2 - OE^2} = \sqrt{\left(\frac{125}{48}\right)^2 - \left(\frac{25}{12}\right)^2} = \frac{25}{16}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，平行线的性质，等腰三角形的判定，勾股定理，以及锐角三角函数的知识，熟练掌握锐角三角函数的知识是解答本题的关键。

26. 【答案】(1) (2, -3)

(2) 证明见解析 (3) $2 < a < 3$ 或 $a > 10$.

【分析】(1) 当 $a = 2$ 时，代入函数解析式，进而可求顶点坐标即可；

(2) 将点 $(1, p)$, $(-1, q)$, 代入 $y = x^2 - 2mx + 1$ 得, $p = 2 - 2m$, $q = 2 + 2m$, 则

$$pq = (2 - 2m)(2 + 2m) = 4 - 4m^2 \leq 4, \text{ 进而结论得证;}$$

(3) 由题意知，二次函数图象开口向上，对称轴为直线 $x = a$ ，则 $B(a + 2, y_2)$ 在对称轴右侧，由对于任意的 $5 \leq m \leq 8$ 都满足 $y_1 > y_3 > y_2$ ，则点 A, B, C 存在如下情况：情况 1，如图 1，根据二次函数的图象与性质，以及 $y_1 > y_3 > y_2$ ，列不等式求解集即可；情况 2，如图 2，由二次函数的图象与性质分别求解满足要求的解集即可。

【小问 1 详解】

解：当 $a = 2$ 时，函数解析式为 $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$,

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $(2, -3)$;

【小问 2 详解】

证明： \because 函数图象经过点 $(1, p)$, $(-1, q)$,

$$\therefore p = 1 - 2a + 1 = 2 - 2a, \quad q = 1 + 2a + 1 = 2 + 2a.$$

$$\therefore pq = (2 - 2a)(2 + 2a) = 4(1 - a^2),$$

$$\because a^2 \geq 0,$$

$$\therefore -a^2 \leq 0$$

$$\therefore 1 - a^2 \leq 1,$$

$$\therefore pq \leq 4;$$

【小问 3 详解】

解：由题意知，二次函数图象开口向上，对称轴为直线 $x = a$ ，则 $B(a + 2, y_2)$ 在对称轴右侧，

\therefore 对于任意的 $5 \leq m \leq 8$ 都满足 $y_1 > y_3 > y_2$,

\therefore 点 A, B, C 存在如下情况：

情况 1，如图 1，当 $-4 < a + 2 < m$ 时， $\frac{-4 + m}{2} < a$,



$$\therefore \frac{-4+m}{2} < a < m-2, \text{ 且 } 5 \leq m \leq 8, \text{ 解得 } 2 < a < 3;$$

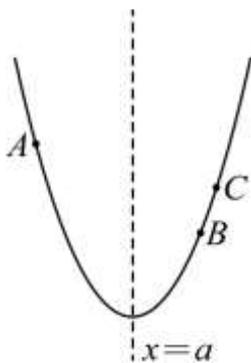


图1

情况 2, 如图 2,

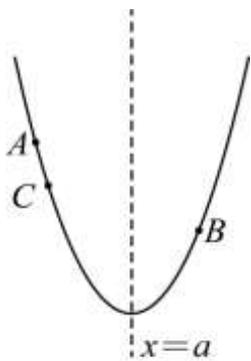


图2

$$\text{当 } -4 < m < a+2 \text{ 时, } \frac{a+m+2}{2} < a.$$

$$\therefore \begin{cases} a > m-2 \\ a > m+2 \end{cases},$$

$$\therefore a > m+2, \text{ 且 } 5 \leq m \leq 8$$

解得 $a > 10$,

综上所述, $2 < a < 3$ 或 $a > 10$.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质. 解题的关键在于数形结合.

27. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\angle MAC = 90^\circ$, 证明见解析

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

【分析】(1) 证明 $\triangle ADE$ 是等边三角形, 得到 $\angle DAE = 60^\circ$, 进而证明 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$,

由三线合一理即可证明结论;

(2) 如图所示, 延长 BA 到 G , 使得 $AB = AG$, 连接 AE, GE , 同 (1) 可证明 $\triangle ADE$ 是等边三角形,



则 $\angle DAE = 60^\circ$, $AD = AE$, 证明 $\triangle CAD \cong \triangle GAE$ (SAS), 得到 $\angle G = \angle C = 30^\circ$, 再证明 AM 为 $\triangle BEG$ 的中位线, 得到 $AM \parallel EG$, 则 $\angle BAM = \angle G = 30^\circ$, 即可得到 $\angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = 90^\circ$;

(3) 如图所示, 连接 AF , CG , 由三线合一理得到 $CF = \frac{1}{2}BC = 3$, $AF \perp CF$, 进而求出 $AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}CF = 2\sqrt{3}$, 证明 $\triangle ACG$ 是等边三角形, 推出 $\angle CGE = 30^\circ$, $\angle BCG = 90^\circ$, 则点 E 在直线 GE 上运动; 设直线 GE 交 BC 于 T , 过点 F 作 FH 垂直于直线 GE 于 H , 则 $CT = \frac{\sqrt{3}}{3}CG = 2$, $FT = CF - CT = 1$, 求出 $FH = \frac{\sqrt{3}}{2}FT = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: 由旋转的性质可得 $DA = DE$, $\angle ADE = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$,

又 $\because AB = AC$,

$\therefore D$ 是 BC 的中点;

【小问 2 详解】

解: $\angle MAC = 90^\circ$, 证明如下:

如图所示, 延长 BA 到 G , 使得 $AB = AG$, 连接 AE , GE ,

同 (1) 可证明 $\triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DAE = 60^\circ$, $AD = AE$,

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore AC = AG$, $\angle CAG = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAE = \angle CAG = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle GAE$,

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle GAE$ (SAS),

$\therefore \angle G = \angle C = 30^\circ$,

\therefore 点 M 为 BE 的中点,

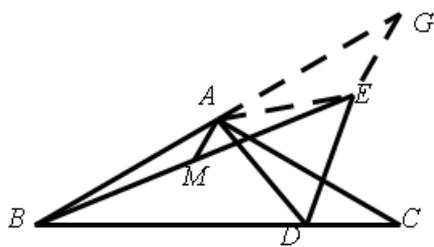
$\therefore AM$ 为 $\triangle BEG$ 的中位线,

$\therefore AM \parallel EG$,

$\therefore \angle BAM = \angle G = 30^\circ$,



$$\therefore \angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = 90^\circ;$$



【小问 3 详解】

解：如图所示，连接 AF ， CG ，

\because 点 F 是 BC 的中点， $AB = AC$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = 3, AF \perp CF,$$

$\therefore \angle ACF = 30^\circ,$

$$\therefore AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}CF = 2\sqrt{3},$$

$\therefore AC = AG, \angle CAG = 60^\circ,$

$\therefore \triangle ACG$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AGC = \angle ACG = 60^\circ, AC = CG,$

$\therefore \angle CGE = 30^\circ, \angle BCG = 90^\circ,$

\therefore 点 E 在直线 GE 上运动，

设直线 GE 交 BC 于 T ，过点 F 作 FH 垂直于直线 GE 于 H ，

$$\therefore CT = \frac{\sqrt{3}}{3}CG = 2,$$

$$\therefore FT = CF - CT = 1,$$

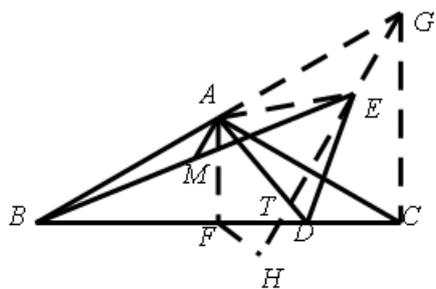
$\therefore \angle FTH = \angle CTG = 90^\circ - \angle CGT = 60^\circ,$

$\therefore \angle HFT = 30^\circ,$

$$\therefore FH = \frac{\sqrt{3}}{2}FT = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

由垂线段最短可知，当点 E 运动到点 H ，即 $FE \perp EG$ 时， FE 有最小值，最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。



【点睛】本题主要考查了等边三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，三角形内角和定理，勾股定理，含 30 度角的直角三角形的性质，三角形中位线定理等等，证明点 E 的运动轨迹是直线是解题的关键.

28. 【答案】(1) P_2, P_3

$$(2) t \leq -4\sqrt{3} - 2$$

$$(3) -2 \leq x_p < -\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{2}{3} < x_p \leq 2$$

【分析】(1) 根据“四象点”的定义结合函数图象进行判断即可；

(2) 根据题意可知点 E 一定在 x 轴下方，进而得到点 E 一定要在第三象限，如图所示，过点 E 作 $EF \perp CD$ 于 F，先求出 $CD = 4$ ， $F(t+2, 0)$ ，则 $CF = DF = 2$ ，利用勾股定理求出 $EF = 2\sqrt{3}$ ，则点 E 的纵坐标为 $-2\sqrt{3}$ ，当直线 OB 恰好经过点 E 时，点 E 的坐标为 $(-4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ ，此时 $t = -4\sqrt{3} - 2$ ，结合函数图象可知，当点 E 继续向左移动的时候，等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列) 上的点均不是线段 AB 的四象点，向右移动的时候，等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列) 上存在一点是线段 AB 的四象点，故当等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列) 上的点均不是线段 AB 的四象点时， $t \leq -4\sqrt{3} - 2$ ；

(3) 如图所示，设 $\odot T$ 交 x 轴于 C (靠近原点)，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴交 AB 于 E，由函数图象可知，当点 P 在线段 AE 上 (不包括点 E) 时，直线 PC 一定会经过第四象限；如图所示， $\odot T$ 的切线 BG 交 $\odot T$ 于 G，过点 T 作 $TH \perp x$ 轴，由函数图象可知，当点 P 在线段 BF 上 (不包括 F) 时，直线 PH 一定会经过第四象限，两种情况求出对应的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解：设直线 P_1B 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = -2 \\ 2k + b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

\therefore 直线 P_1B 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x$ ，



∴ 直线 P_1B 经过原点,

∴ 由函数图象可知, 线段 AB 上不存在一点使得其与 P_1 所在的直线经过第四象限;

同理可得直线 P_2B 的解析式为 $y = x - 1$,

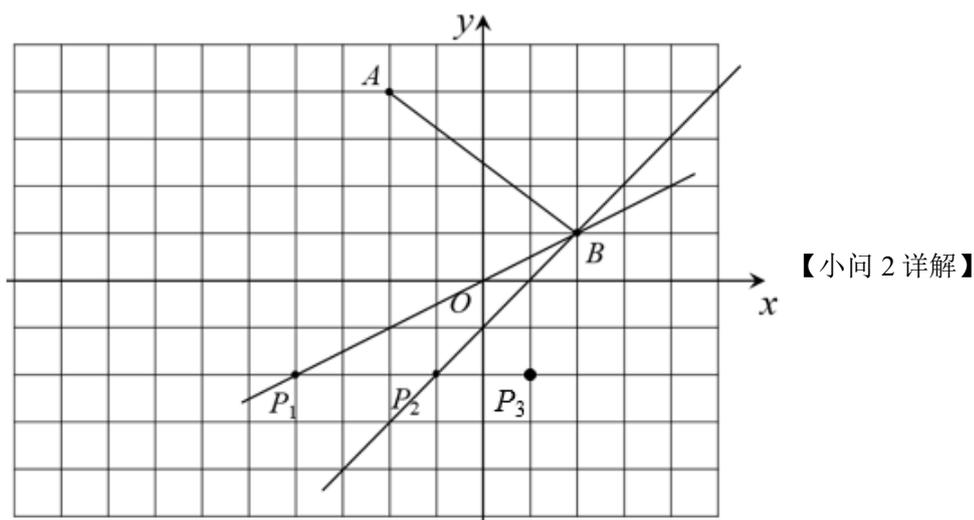
∴ 直线 $y = x - 1$ 经过第四象限,

∴ $P_2(-1, -2)$ 是线段 AB 的四象点;

∴ $P_3(1, -2)$ 在第四象限,

∴ $P_3(1, -2)$ 是线段 AB 的四象点;

故答案为: P_2 、 P_3 ;



解: ∵ $C(t, 0)$, $D(t+4, 0)$, $\triangle CDE$ 是等边三角形 (C, D, E 顺时针排列),

∴ 点 E 一定在 x 轴下方,

又 ∵ 等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列) 上的点均不是线段 AB 的四象点,

∴ 点 E 一定要在第三象限,

如图所示, 过点 E 作 $EF \perp CD$ 于 F

∴ $C(t, 0)$, $D(t+4, 0)$,

∴ $CD = 4$, $F\left(\frac{t+t+4}{2}, 0\right)$, 即 $F(t+2, 0)$

∴ $CF = DF = 2$,

∴ $\triangle CDE$ 是等边三角形,

∴ $DE = CD = 4$,

∴ $EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = 2\sqrt{3}$,

∴ 点 E 的纵坐标为 $-2\sqrt{3}$,



由(1)得直线 OB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x$,

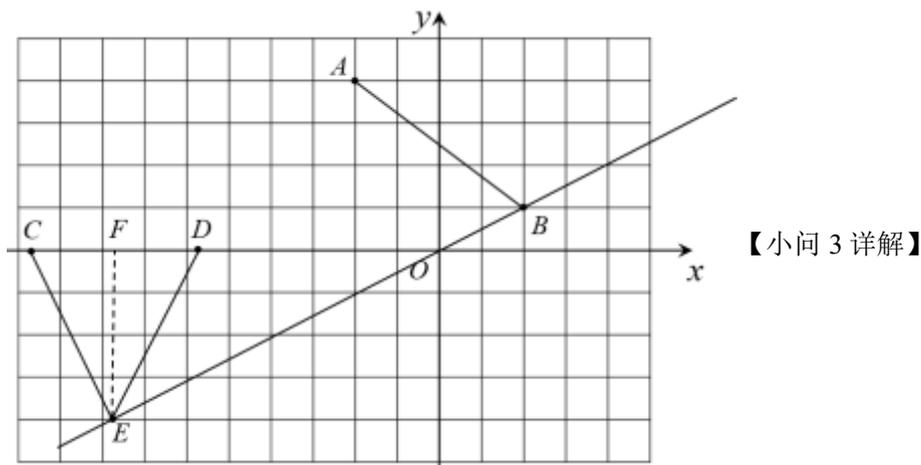
当 $y = -2\sqrt{3}$ 时, $x = 2y = -4\sqrt{3}$,

当直线 OB 恰好经过点 E 时, 点 E 的坐标为 $(-4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$,

\therefore 此时 $t = -4\sqrt{3} - 2$,

结合函数图象可知, 当点 E 继续向左移动的时候, 等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列)上的点均不是线段 AB 的四象点, 向右移动的时候, 等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列)上存在一点是线段 AB 的四象点,

\therefore 当等边 $\triangle CDE$ (C, D, E 顺时针排列)上的点均不是线段 AB 的四象点时, $t \leq -4\sqrt{3} - 2$;



解: 如图所示, 设 $\odot T$ 交 x 轴于 C (靠近原点), 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D , 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴交 AB 于 E ,

$\therefore \odot T$ 是以 $T\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ 为圆心, 半径为2的圆,

$\therefore TC = 2, OT = \frac{5}{2}$,

$\therefore OC = \frac{1}{2}$,

$\therefore C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;

$\therefore A(-2, 4)$,

$\therefore D(-2, 0)$,

由函数图象可知, 当点 P 在线段 AE 上 (不包括点 E) 时, 直线 PC 一定会经过第四象限,

\therefore 当 $-2 \leq x_p < -\frac{1}{2}$ 时, 线段 AB 上的点 P 是 $\odot T$ 的四象点;

如图所示, 过点 T 作 $TH \perp x$ 轴交 $\odot T$ 于 H , 过点 H 作 $HF \parallel x$ 轴交 AB 于 F ,



同理可得直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$,

$\therefore TH = 2$,

\therefore 点 H 的纵坐标为 2, 即点 F 的纵坐标为 2,

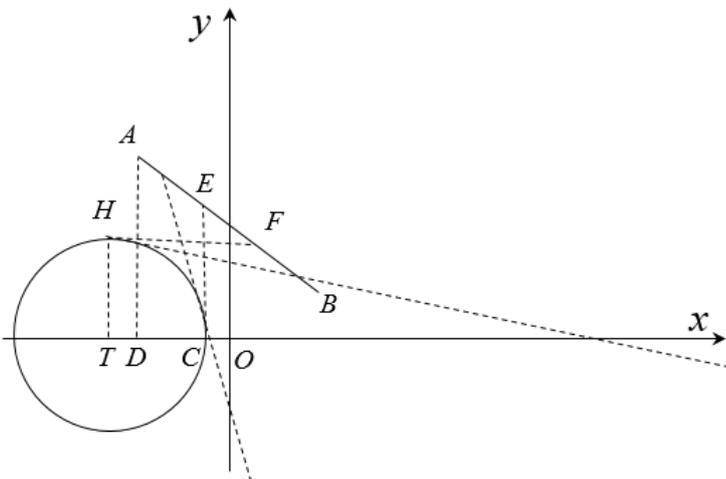
在 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 中当 $y = 2$ 时, $x = \frac{2}{3}$,

$\therefore F\left(\frac{2}{3}, 2\right)$,

由函数图象可知, 当点 P 在线段 BF 上 (不包括 F) 时, 直线 PH 一定会经过第四象限,

\therefore 当 $\frac{2}{3} < x_p \leq 2$ 时, 线段 AB 上的点 P 是 $\odot T$ 的四象点;

综上所述, $-2 \leq x_p < -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3} < x_p \leq 2$



【点睛】 本题主要考查了一次函数与几何综合, 圆的基本性质, 等边三角形的性质, 勾股定理等等, 理解题目所给的新定义, 利用数形结合的思想求解是解题的关键.