北京一六一中学2023—2024学年度第二学期开学测试

高 三 数 学 试 卷

班级____________ 姓名____________ 学号____________

考	1．本试卷共3页，满分150分，考试时长120分钟。
生	2．试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效。
须	3．在答题纸上，选择题用2B铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答。
知	4．考试结束后，将答题纸、试卷和草稿纸一并交回。

一、选择题：本大题共10道小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x<0\right\},B=\left\{x\middle|2^x>1\right\}$，则

A．$B\subseteq A$　　B．$A\subseteq B$　　C．$A\cup B=\mathbf{R}$　　D．$A\cap B=\varnothing$

2．若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=2$，则复数 z 的虚部是

A．-3　　B．3　　C．1　　D．0

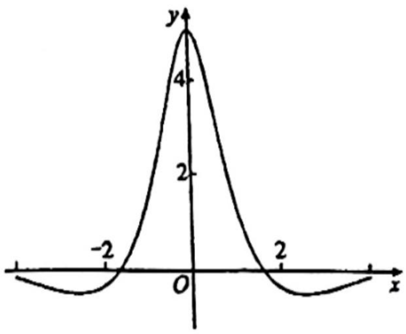
3．已知函数 $f(x)=2^x-1$，则不等式 $f(x)\le x$ 的解集为

A．$(-\infty,2]$　　B．$[0,1]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[1,2]$

4．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $P\left(x_0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\pm\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

5．函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为



A．$\frac{5\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x^2+2}$　　B．$\frac{5\sin x}{x^2+1}$

C．$\frac{5\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}{x^2+2}$　　D．$\frac{5\cos x}{x^2+1}$

6. 设n为正整数，$\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式中存在常数项，则$n$的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 已知$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\ln\dfrac{1}{2}$，$c=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，则

A. $b<a<c$　　B. $b<c<a$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 若不等式$(-1)^n na<n+(-1)^{n+1}$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数a的取值范围是

A. $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left[-2,\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-a_n=2d$ $(n=1,2,\cdots)$，其中d为常数，则"$a_4-a_1=3d$"是"$\{a_n\}$是等差数列"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10.已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=1,<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{4},(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，则$|\vec{c}|$的最大值是

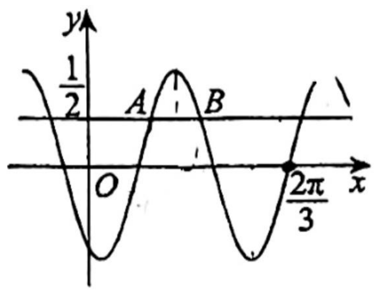
A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $\sqrt{2}+1$

二、填空题：本大题共5小题，共25分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

11.函数$y=\lg(2x+1)+\lg x$的零点是__________.

12.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，则$a=$________.

13.已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，如图$A,B$是直线$y=\dfrac{1}{2}$与曲线$y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\dfrac{\pi}{6}$，则$\omega=$__________，$f(\pi)=$__________.



14.设抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l. 斜率为$\sqrt{3}$的直线经过焦点F，交抛物线C于点A，交准线l于点B（A,B在x轴的两侧）.若$|AB|=6$，则抛物线的方程为______.

15.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P是空间中任意一点．给出下列四个结论：

① 若点P在线段AD_1上运动，则始终有$C_1P\perp CB_1$；

② 若点P在线段AD_1上运动，三棱锥$D-BPC_1$体积为定值；

③ 若点P在线段AA_1上运动，则过P，B，D_1三点的正方体截面面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$；

④ 若点P在线段A_1B上运动，则$AP+PD_1$的最小值为$\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

其中所有正确结论的序号有______.

三、解答题：本大题共6小题，共85分.把答案填在答题纸中相应的位置上.

16.（本小题13分）在ΔABC中，a,b,c分别为内角A,B,C所对的边，且满足$\sin A\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$.

（Ⅰ）求角A的大小；

（Ⅱ）试从条件①②③中选出两个作为已知，使得ΔABC存在且唯一，并以此为依据求ΔABC的面积.

条件①：$c=\sqrt{3}b$；　　条件②：$B=\dfrac{\pi}{4}$；　　条件③：$a=2$.

注：如果选择的条件不符合要求，得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. （本小题 13 分）某学校体育课进行投篮练习，投篮地点分为A 区和 B 区，每一个球可以选择在A 区投篮也可以选择在 B 区投篮，在A 区每投进一球得 2 分，没有投进得 0 分；在 B 区每投进一球得 3 分，没有投进得 0 分.学生甲在A，B 两区的投篮练习情况统计如下表：

甲	A 区	B 区
投篮次数	30	20
得分	40	30

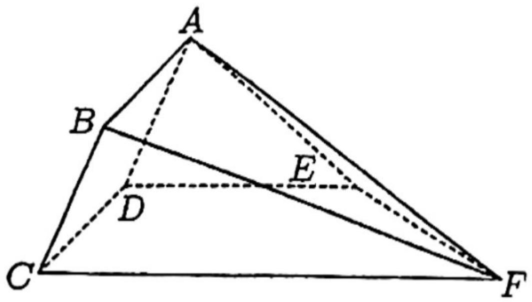
假设用频率估计概率，且学生甲每次投篮相互独立.

（Ⅰ）试分别估计甲在A 区，B 区投篮命中 概率；

（Ⅱ）若甲在A 区投3个球，在 B 区投2个球，求甲在A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率；

（Ⅲ）若甲在A 区，B 区一共投篮5次，投篮得分的期望值不低于7分，直接写出甲选择在A 区投篮的最多次数.（结论不要求证明）

18. （本小题 14 分）如图，多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$\angle ADE=60°$，$DE\parallel CF$，$CD\perp DE$，$AD=2$，$DE=DC=3$，$CF=6$.



（Ⅰ）求证：$CD\perp AE$；

（Ⅱ）求直线 DE 与平面 AEF 所成角的正弦值；

（Ⅲ）求出λ的值，使得$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CF}$，且G 到平面 ABC 距离为$\sqrt{3}$.

19.（本小题 15 分）已知函数 $f(x)=x-1+\dfrac{a}{e^x}$（$a\in R,e$ 为自然对数的底数）

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线平行于 x 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，若直线 $l:y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求 k 的最大值.

20. （本小题 15 分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的离心率和短轴长；

（Ⅱ）设直线 $l_1:y=kx+m$ 与椭圆 E 相切于第一象限内的点 P，不过原点 O 且平行于 l_1 的直线 l_2 与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，点 A 关于原点 O 的对称点为 C．记直线 OP 的斜率为 k_1，直线 BC 的斜率为 k_2，求 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 的值.

21. （本小题 15 分）

对于数列 $A:a_1$，a_2，…，$a_n(n\geq 3)$，定义变换 T，T 将数列A变换成数列 $T(A):a_2$，a_3，…，a_n，a_1，记 $T^1(A)=T(A)$，$T^m(A)=T\left(T^{m-1}(A)\right)$，$m\geq 2$．对于数列 $A:a_1$，a_2，…，a_n 与 $B:b_1$，b_2，…，b_n，定义 $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$．若数列 $A:a_1$，a_2，…，$a_n(n\geq 3)$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，则称数列A为 $\mathfrak{R}_n$ 数列.

（Ⅰ）若 $A:-1,-1,1,-1,1,1$，写出 $T(A)$，并求 $A\cdot T^2(A)$；

（Ⅱ）对于任意给定的正整数 $n(n\geq 3)$，是否存在 $\mathfrak{R}_n$ 数列A，使得 $A\cdot T(A)=n-3$？若存在，写出一个数列A，若不存在，说明理由；

（Ⅲ）若 $\mathfrak{R}_n$ 数列A满足 $T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=n-4(k=1,2,\cdots,n-2)$，求数列 A 的个数.