北京市第八十中学2023～2024学年度第二学期开学考试

高　三　数　学

2024年2月

班级________________姓名_________________考号______________

(考试时间 120分钟 满分150分)

提示： 试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。

在答题卡上，选择题用2B铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答。

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.

1．已知集合 $A=\{1,2,3\},B=\{x|\ x^2-1=0\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{-1,1,2,3\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{-1,0,1,2,3\}$

2．已知复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（i为虚数单位），$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $\bar{z}$ 在复平面上所对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

3．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}-\vec{b}=(\sqrt{3},\sqrt{2})$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．1　　D．$2\sqrt{5}$

4．下列函数既是偶函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A．$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$　　B．$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$

C．$f(x)=\lg(x^2+1)$　　D．$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

5．$\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A．-5　　B．-10　　C．5　　D．10

6．设 F 为抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 A 在 C 上，且 A 到 C 焦点的距离为3，到 y 轴的距离为2，则 $p=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 $\angle A$ 的角平分线，D 在线段 BC 上，若 $|AB|=2$，$|AD|=|AC|=1$，则 $|BD|=$（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x+a}$，则“$a>-1$”是“函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上存在最小值”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

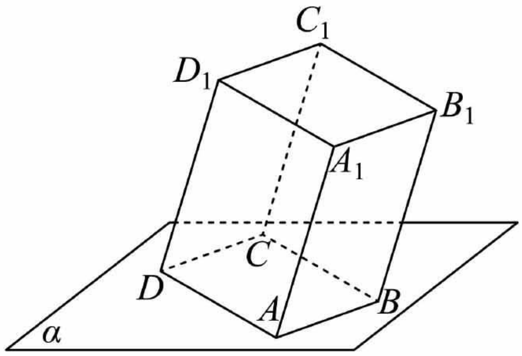
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}\cdot a_n+a_{n+1}-4a_n+2=0$，则下列命题正确的是（　）

A. 若数列 $\{a_n\}$ 为常数列，则 $a_1=1$　　B. 存在 $a_1\in(1,2)$，使数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

C. 任意 $a_1\in(0,1)$，都有 $\{a_n\}$ 为递减数列　D. 任意 $a_1\in(2,+\infty)$，都有 $2<a_n\le a_1$

10. 如图，已知棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，在平面 α 的同侧，顶点 A 在平面 α 上，顶点 B，D 到平面 α 的距离分别为 1 和 $\sqrt{2}$，则顶点 C_1 到平面 α 的距离为（　）



A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

C. $\sqrt{6}+1$　　D. $\sqrt{2}+1$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域为__________.

12. 已知双曲线 $y^2-mx^2=1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x-y=0$，则该双曲线的离心率为__________.

13. 已知命题 p：若 $a+b\ge1$，则 $a^3+b^3\geqslant1$. 能说明 p 为假命题的一组 a,b 的值为 $a=$______，$b=$______.

14. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第十六题的“物不知数”问题，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二. 问物几何？现有一个相关的问题：将1到2023这2023个自然数中被3除余2且被5除余4的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列的项数为________.

15．已知函数 $f(x)=\tan(\sin x)+\tan(\cos x)$，则下列说法正确的是________.

①$2\pi$ 是 $f(x)$ 的周期

② $f(x)$ 的图象有对称中心，没有对称轴

③当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$F(x)<\tan(\sin x+\cos x)$

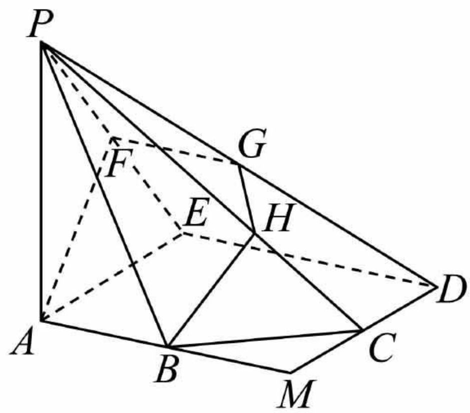
④对任意 $k\in\mathbf{Z}$，$f(x)$ 在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right)$ 上单调

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

16．如图，正方体 $MADE$ 的边长为 2，B，C 分别为 AM，MD 的中点，在五棱锥 $P\text{-}ABCDE$ 中，F 为棱 PE 的中点，平面 ABF 与棱 PD ，PC 分别交于 G，H.

（1）求证：$AB/\!/FG$；

（2）若 $PA\perp$ 底面 $ABCDE$，且 $PA=AE$ ，求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小，并求线段 PH 的长.



17．已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+b\left(\omega>0,b\in\mathbf{R}\right)$.再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个，使得函数 $f(x)$ 的解析式唯一确定

(1)求 $f(x)$ 的解析式及最小值；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(-t,t)(t>0)$ 上有且仅有 2 个零点，求 t 的取值范围.

条件①：函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$；

条件②：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$；

条件③：函数 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为 1.

18．某公司在 2013~2022 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示：

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年生产台数（单位：万台）	3	5	5	6	6	9	9	10	10	a
年返修台数（单位：台）	32	38	54	58	52	71	64	80	75	b
年利润（单位：百万元）	3.85	4.50	4.20	5.50	6.10	9.65	9.98	10.00	11.50	c

注：年返修率=年返修台数÷年生产台数..

(1)从 2013~2021 年中随机抽取两年，求这两年中至少有一年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率；

(2)公司规定：若年返修率不超过千分之一，则该公司生产部门当年考核优秀.现从 2013~2021 年中随机选出 3 年，记 X 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数，求 X 的分布列和期望；

(3)记公司在 2013~2017 年，2018~2022 年的年生产台数的方差分别为 s_1^2，s_2^2.若 $s_1^2=s_2^2$，请写出 a 的值.（只需写出结论）

（注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$，其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>0)$，$F_1$、$F_2$ 为椭圆的焦点，M 为椭圆上一点，满足 $\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2\sqrt{2}$，$O$ 为坐标原点.

(1)求椭圆 C 的方程和离心率.

(2)设点 $P\left(0,2\right)$，过 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 A 、B 两点，满足 $\overrightarrow{PA}=t\overrightarrow{PB}$，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{DB}$ 满足，求证：点 D 在定直线上.

20.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{ax}-x-1$

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(3)若对任意的实数 k,b，函数 $y=f\left(x\right)+kx+b$ 与直线 $y=kx+b$ 总相切，则称函数 $f\left(x\right)$ 为“恒切函数”．当 $a=1$ 时，若函数 $g\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}f\left(x\right)+m$ 是“恒切函数”，求证：$-\dfrac{1}{8}<m\leq 0$．

21．记无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n，最小值为 m_n，令 $b_n=\dfrac{M_n+m_n}{2}$．

(1)若 $a_n=2^n-3n$，请写出 b_1,b_2,b_3,b_4 的值；

(2)求证：“数列 $\left\{a_n\right\}$ 是递增的等差数列”是“数列 $\left\{b_n\right\}$ 是递增的等差数列”的充要条件；

(3)若 $\forall n\in\mathrm{N}^*,\left|a_n\right|<2023,\left|b_n\right|=1$，求证：存在 $k\in\mathrm{N}^*$，使得 $\forall n\geq k$，有 $b_{n+1}=b_n$．