

初三数学试卷

2024年2月

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考生须知	1. 本试卷共 4 页，满分 100 分，考试时间 120 分钟。 2. 试卷答案一律填涂在答题卡或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。 3. 在答题卡上，用 2B 铅笔作答，在答题纸上，用黑色字迹签字笔作答。 4. 考试结束后，将答题卡、答题纸一并交回。
------	--

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题纸上相应的位置。）

1. 2023 年 5 月 30 日神舟十六号载人飞船发射取得圆满成功，此次任务是我国载人航天工程进入空间站应用与发展阶段的首次载人飞行任务。下列有关航天的 4 个图标图案中是中心对称图形的是（ ）



A



B



C



D



2. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 的顶点坐标是（ ）

A. $(-2, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-2, -1)$ D. $(2, -1)$

3. 将一元二次方程 $x^2 - 8x + 10 = 0$ 通过配方转化为 $(x+a)^2 = b$ 的形式，下列结果中正确的是（ ）

A. $(x-4)^2 = 6$ B. $(x-8)^2 = 6$ C. $(x-4)^2 = -6$ D. $(x-8)^2 = 54$

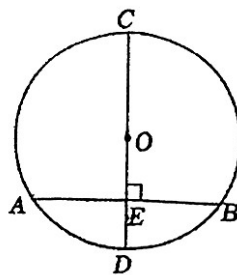
4. 如图， AB 是 $\odot O$ 的一条弦，直径是 CD ，若 $CD \perp AB$ ，垂足为 E ， $OE = 3$ ， $DE = 2$ ，则 AB 的长度为（ ）

A. 5

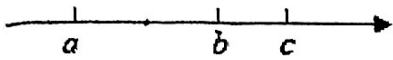
B. 6

C. 8

D. 10



5. 实数 a 、 b 、 c 在数轴上对应点的位置如图所示. 如果 $a+b=0$, 那么下列结论正确的是()



- A. $|a| > |c|$ B. $a+c < 0$ C. $abc < 0$ D. $\frac{a}{b} = 1$



6. 不透明的袋子中有两个小球, 上面分别写着数字“1”, “2”, 除数字外两个小球无其他差别. 从中随机摸出一个小球, 记录其数字, 放回并摇匀, 再从中随机摸出一个小球, 记录其数字, 那么两次记录的数字之和为 3 的概率是()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

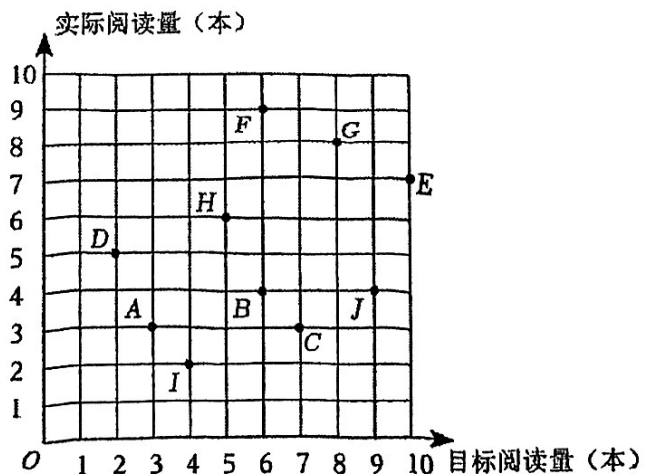
7. 根据下列表格中二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值, 判断方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的一个解 x 的范围是()

x	6.17	6.18	6.19	6.20
$y=ax^2+bx+c$	-0.03	-0.01	0.02	0.04

- A. $6 < x < 6.17$ B. $6.17 < x < 6.18$ C. $6.18 < x < 6.19$ D. $6.19 < x < 6.20$

8. 目标完成率, 一般是指个体的实际完成量与目标完成量的比值, 树立明确具体的目标, 能够促使人们更好地完成任务. 某读书会有 10 位成员 (编号分别为 A-J), 如图是根据他们年初制定的目标阅读量和年末实际完成情况绘制的统计图, 下列结论正确的有()

- ①目标完成率为 100% 的是 A, G;
 ②目标阅读量与实际阅读量相差最多的是 J;
 ③目标完成率最高的是 D, 最低的是 C;
 ④目标完成率超过 75% 且实际阅读量不少于 5 本的有三人.



- A. ①② B. ①②③ C. ①③④ D. ①②③④

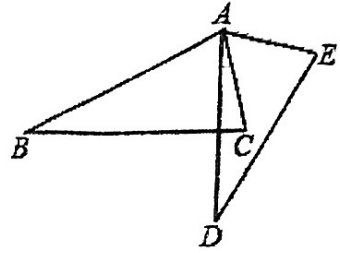
二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. 因式分解： $4m^2n + 4mn + n = \underline{\hspace{2cm}}$

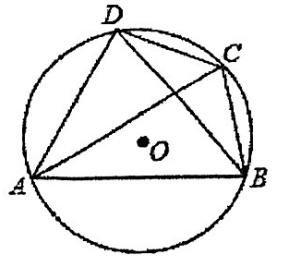
10. 二次函数 $y = 3x^2 - 4x + 5$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 若点 $A(-1, y_1)$, $B(\frac{1}{2}, y_2)$, $C(2, y_3)$ 在抛物线 $y = (x-2)^2 + k$ 上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用 “ $>$ ” 连接).

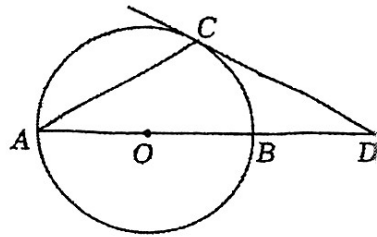
12. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度, 得到 $\triangle ADE$, 若 $\angle CAE = 65^\circ$, $\angle E = 70^\circ$, 且 $AD \perp BC$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



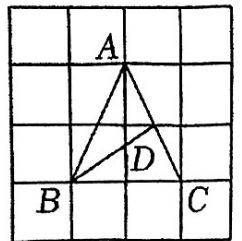
13. 如图, 点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上, $CB = CD$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ$, 则 $\angle ADB = \underline{\hspace{2cm}}$.



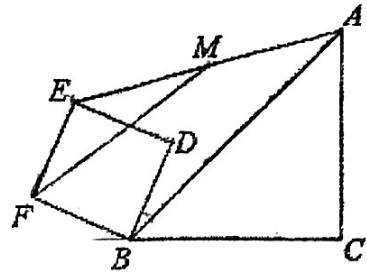
14. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 在 AB 的延长线上, DC 切 $\odot O$ 于点 C , 如果 $\angle D = 30^\circ$, $AB = 4$, 那么线段 CD 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 在边长为 1 的正方形网格的格点上, $BD \perp AC$ 于点 D . 则 BD 长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 4$, $\angle ACB = 90^\circ$, 正方形 $BDEF$ 的边长为 2, 将正方形 $BDEF$ 绕点 B 旋转一周, 连接 AE , 点 M 为 AE 的中点, 连接 FM , 则线段 FM 的最大值是_____.



三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-18 题, 每小题 5 分, 第 19 题 4 分, 第 20-21 题, 每小题 5 分, 第 22-26 题, 每小题 6 分, 第 27, 28 题, 每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - (\pi - 2)^0 + |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}$.

18. 解不等式组 $\begin{cases} x - 3(x - 1) \leq 1 \\ \frac{1 + 3x}{2} > x - 1 \end{cases}$, 并写出它的所有非负整数解.

19. 阅读下面材料:

在学习《圆》这一章时, 老师给同学们布置了一道尺规作图题:

尺规作图: 过圆外一点作圆的切线.

已知: P 为 $\odot O$ 外一点.

求作: 经过点 P 的 $\odot O$ 的切线.

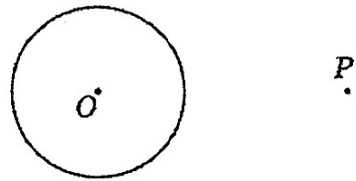
小敏的作法如下:

如图,

①连接 OP , 作线段 OP 的垂直平分线 MN 交 OP 于点 C .

②以点 C 为圆心, CO 的长为半径作圆, 交 $\odot O$ 于 A, B 两点.

③作直线 PA, PB .



(1) 请补充完整小敏的作图;

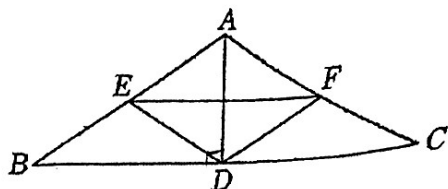
(2) 连接 OA, OB 可证 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, 其依据是 _____. 由此可证明直线 PA, PB 都是 $\odot O$ 的切线, 其依据是 _____.

20. 已知, 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a-1)x - a = 0$.

- (1) 求证: 方程总有两个实数根;
- (2) 若该方程有一个根是负数, 求 a 的取值范围.

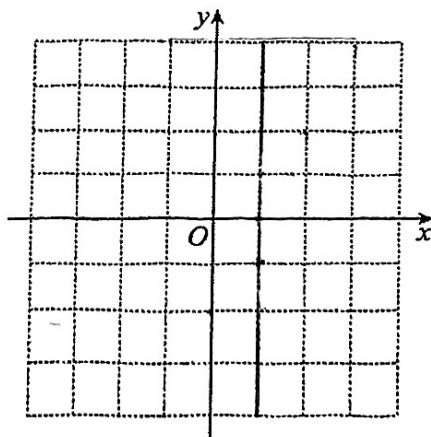
21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D, E, F 分别为 BC, AB, AC 的中点.

- (1) 求证: 四边形 $AEDF$ 是菱形;
- (2) 若 $AB = 6, BC = 10$, 求四边形 $AEDF$ 的面积.



22. 对于抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

- (1) 它与 x 轴交点的坐标为 _____, 与 y 轴交点的坐标为 _____, 顶点坐标为 _____;
- (2) 在坐标系中利用描点法画出此抛物线;



- (3) 当 $0 < x < 4$ 时, 结合函数图象, 直接写出 y 的取值范围 _____;
- (4) 若点 $(-1, y_1), (t, y_2)$ 在抛物线上, 且 $y_2 > y_1$, 直接写出 t 的取值范围 _____.

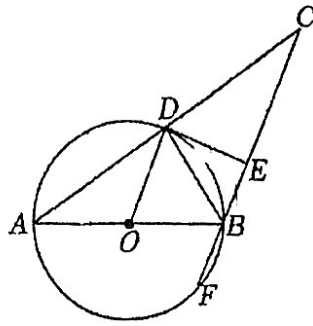
23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 A , 直线 $l_1: y=kx-2$ 经过点 A , 且与 y 轴交于点 B .

- (1) 求点 A 和点 B 的坐标及直线 l_1 的解析式;
- (2) 直线 l_2 与直线 l_1 关于直线 $x=1$ 对称, 若直线 $y=m$ 与直线 l_1, l_2 围成的区域 W 内 (不包含边界) 恰有 1 个整点, 直接写出 m 的取值范围. (注: 横、纵坐标都是整数的点叫做整点.)

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, AB 为 $\odot O$ 的直径, AC 与 $\odot O$ 相交于点 D , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , CB 延长线交 $\odot O$ 于点 F .

(1) 求证: DE 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $BE=1$, $BF=2$, 求 AD 的长.



25. 通常把脏衣服用洗衣液清洗后会进行拧干, 但由于不可能拧净衣服上的全部污水, 所以还需要用清水进行多次漂洗, 不断降低衣服中污水的含量. 某小组研究了如何用清水漂洗衣服效果更好, 部分内容如下, 请补充完整: 实验研究: 先准备几件相同的洗过一次并拧干(存留一些污水)的衣服, 把每件衣服分别用一定量的清水浸泡, 经过充分搓洗, 使清水与衣服上存留的污水混合均匀, 然后拧干, 视为一次漂洗. 称重、记录每次漂洗后衣服上存留的污水重量和比例, 如: 把一件存留 1 斤污水的衣服用 10 斤清水漂洗后, 拧干到仍然存留 1 斤污水, 则漂洗后衣服中存有的污物是原来的 $\frac{1}{11}$, 在多次实验后, 通过对收集的数据进行分析, 该小组决定使用 20 斤清水, 采用三种不同的方案, 对每件衣服分别进行漂洗, 并假设每次拧干后的衣服上都存留约 1 斤的污水.

数据计算: 对三种漂洗方案进行计算、比较.

方案一: 采用一次漂洗的方式. 将 20 斤清水一次用掉, 漂洗后衣服中存有的污物是原来的_____;

方案二: 采用两次漂洗的方式, 且两次用水量不同. 如第一次用 12 斤清水, 第二次用 8 斤清水, 漂洗后衣服中存有的污物是原来的_____;

方案三: 采用两次漂洗的方式, 且两次用水量相同, 每次用 10 斤清水, 漂洗后衣服中存有的污物是原来的_____.

实验结论: 对比可知, 在这三种方案中, 方案_____的漂洗效果最好(填“一”“二”或“三”).

推广证明: 将脏衣服用洗衣液清洗后, 再用清水进行漂洗, 假设每次拧干后还存留 $a(a > 0)$ 斤污水, 现用 $m(m > 0)$ 斤清水漂洗(方案二中第一次用水量为 x 斤), 请比较并证明方案二与方案三的漂洗效果.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(1, m)$, $(3, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + 4 (a > 0)$ 上,

设抛物线的对称轴为 $x = t$.

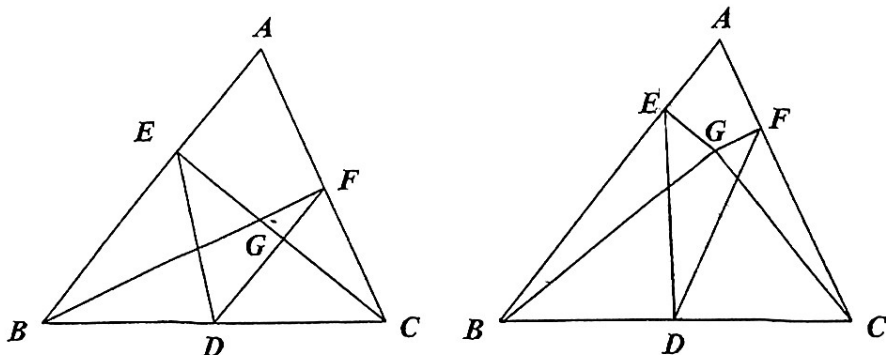
(1) 当 $m = n$ 时, 求抛物线与 y 轴交点的坐标及 t 的值;

(2) 点 $(x_0, n) (x_0 \neq 3)$ 在抛物线上, 若 $m < n < 4$, 求 t 的取值范围及 x_0 的取值范围.

27. 已知 $\triangle ABC$, 点 D 为 BC 中点, D, E 为边 AB, AC 上的动点, 且满足 $DE = DF$, G 为平面内一点, $GE \perp AB$, $GF \perp AC$, 连结 BG, CG .

(1) 若点 G 为 $\triangle ABC$ 边 AB 和边 AC 上的高的交点, 求证: $\angle ABG = \angle ACG$;

(2) 若点 G 不与三角形高的交点重合, $\angle ABG$ 的与 $\angle ACG$ 是否还有上述关系? 请说明理由.



28. 对于点 P 和图形 G , 若在图形 G 上存在不重合的点 M 和点 N , 使得点 P 关于线段 MN 中点的对称点在图形 G 上, 则称点 P 是图形的 G 的“中称点”. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1, 0)$,

$B(1, 1)$, $C(0, 1)$.

(1) 在点 $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_3(1, -2)$, $P_4(-1, 2)$ 中, _____ 是正方形 $OABC$ 的“中称点”;

(2) eT 的圆心在 x 轴上, 半径为 1.

① 当圆心 T 与原点 O 重合时, 若直线 $y = x + m$ 上存在 eT 的“中称点”, 求 m 的取值范围;

② 若正方形 $OABC$ 的“中称点”都是 eT 的“中称点”, 直接写出圆心 T 的横坐标 t 的取值范围.