北京二中2023—2024学年度高三年级第二学期开学测试试卷

数学

命题人：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　得分：___

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分．选出符合题目要求的一项）

1．设集合$A=\{x|x>3\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x-4}\le 0\right.\right\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$（　　）．

A．(1，3)　　B．[1，3]　　C．(3，4)　　D．[3，4)

2．若复数$\dfrac{a+i}{1+3i}$，$a\in R$是纯虚数，则在复平面中$z=a+i$的共轭复数$\bar{z}$对应的点坐标是（　）．

A．$(-3,-1)$　　B．$(-3,1)$　　C．$(1,-3)$　　D．$(1,3)$

3．若$(1-2x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则$a_1+a_2+a_3=$（　　）．

A．1　　B．2　　C．-1　　D．-2

4．已知a，$b>0$，且$a\ne 1$，$b\ne 1$．若$\log_a b>1$，则（　　）．

A．$(a-1)(b-1)<0$　B．$(a-1)(a-b)>0$　C．$(b-1)(a-b)>0$　D．$(b-1)(b-a)>0$

5．在$\triangle ABC$中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC边上的高等于$\dfrac{1}{3}BC$，则$\cos A=$（　　）．

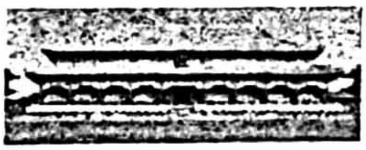
A．$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

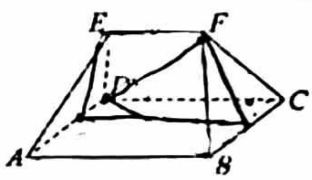
6．设$\{a_n\}$是无穷数列，$b_n=a_n+a_{n+1}$，则“$\{a_n\}$是等比数列”是“$\{b_n\}$是等比数列”的（　　）．

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　　D．既不充分也不必要条件

7．随着北京中轴线申遗工作的进行，古建筑备受关注．故宫不仅是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑之一，更是北京中轴线的“中心”．左图是古建筑之首的太和殿，它的重檐庑（wǔ）殿顶可近似看作右图所示的几何体，其中底面$ABCD$是矩形，$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{9}$，$EF//AB$，四边形$ABFE$、$CDEF$是两个全等的等腰梯形，$\triangle EAD$、$\triangle FBC$是两个全等的等腰三角形．若$BC=5$，$EF=6$，$AE=\dfrac{13}{2}$，则该几何体的体积为（　　）．





A．90　　B．$30\sqrt{15}$　　C．$\dfrac{75\sqrt{15}}{2}$　　D．135

8. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为$M$，以$M$为圆心，双曲线$C$的半焦距为半径的圆与双曲线$C$的一条渐近线相交于$A$，$B$两点．若$\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$，则双曲线$C$的离心率为（　　）．

A. $\sqrt{5}$　　　B. 2　　　C. $\sqrt{3}$　　　D. $\sqrt{2}$

9. 平面直角坐标系xOy中，定点A的坐标为$(\cos\theta,\sin\theta)$，其中$0\le\theta\le\pi$.若当点B在圆$(x-2)^2+y^2=1$上运动时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最大值为0，则（　　）．

A. $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为$-2$　　　B. $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为$-\frac{3}{2}$

C. $\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为$-2$　　　D. $\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为$-\frac{3}{2}$

10. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若对任意的正整数n，总存在正整数m，使得$S_n=a_m$，下列正确的命题是（　　）

①$\{a_n\}$可能为等差数列；

②$\{a_n\}$可能为等比数列；

③$a_i(i\ge2)$均能写成$\{a_n\}$的两项之差；

④对任意$n\in\mathrm{N}$，$n\ge1$，总存在$m\in\mathrm{N}$，$m\ge1$，使得$a_n=S_m$．

A. ①③　　　B. ①④　　　C. ②③　　　D. ②④

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

11. 抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$的焦点坐标为________，准线方程为________．

12、已知向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量$\vec{u}=(-3,4)$，且$|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________．

13. 已知直线$y=kx+m$（m为常数）与圆$x^2+y^2=4$交于点M,N，当k变化时，若$|MN|$的最小值为2，则$m=$__________．

14. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（A，$\omega$，$\varphi$是常数，$A>0$，$\omega>0$）．若$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上具有单调性，且$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则$\omega$的值为________

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}a\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x,\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi \\ e^{-x+\pi}+4a,x>\pi\end{cases}$，给出下列四个结论：

①若$f(x)$有最小值，则a的取值范围是$\left[-\dfrac{1}{\pi},0\right]$；

②当$a>0$时，若$f(x)=t$无实根，则t的取值范围是$[a\pi,4a]\cup[4a+1,+\infty)$；

③当$a\le-\dfrac{1}{2}$时，不等式$f(x^2+2)>f(|x|+4)$的解集为$(-2,2)$；

④当$a\ge1$时，若存在$x_1<x_2$，满足$-1<f(x_1)=f(x_2)<0$，则$x_1+x_2>0$．

其中，所有正确结论的序号为________.

三、解答题（共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16．（本小题满分13分）在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$．

（Ⅰ）求B的值；（Ⅱ）给出以下三个条件：①$a^2-b^2+c^2+3c=0$；②$a=\sqrt{3}$，$b=1$；

③$S_{\triangle ABC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，若这三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件并回答下面问题：

（i）求$\sin A$的值；

（ii）求$\angle ABC$的角平分线BD的长．

17．（本小题满分14分）某工厂的机器上有一种易损元件A，这种元件在使用过程中发生损坏时，需要送维修处维修．工厂规定当日损坏的元件A在次日早上8：30之前送到维修处，并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件A的维修工作．每个工人独立维修A元件需要时间相同．维修处记录了某月从1日到20日每天维修元件A的个数，具体数据如下表：

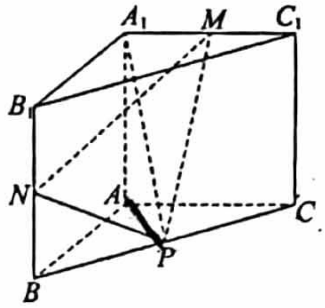
日期	1日	2日	3日	4日	5日	6日	7日	8日	9日	10日
元件A个数	9	15	12	18	12	18	9	9	24	12
日期	11日	12日	13日	14日	15日	16日	17日	18日	19日	20日
元件A个数	12	24	15	15	15	12	15	15	15	24

从这20天中随机选取一天，随机变量X表示在维修处该天元件A的维修个数．

（Ⅰ）求 X 的分布列与数学期望；（Ⅱ）若 a，$b\in N^*$ 且 $b-a=6$，求 $P\left(a\le X\le b\right)$ 最大值；

（Ⅲ）目前维修处有两名工人从事维修工作，为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个，至少需要增加几名维修工人？（只需写出结论）

18.（本小题满分 14 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1=2, AA_1\perp AB$，平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 ABC，M,N,P 分别为棱 A_1C_1,BB_1,BC 的中点，如图：



（Ⅰ）求证：$MP//$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）若 $AB\perp AC$，

①求 A_1P 与平面 MPN 所成角的正弦值；

②求线段 AP 在平面 MPN 内的投影 HP 的长.

19.（本小题满分 15 分）已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，且焦距为 2，动弦 MN 平行于 x 轴，且 $|F_1M|+|F_1N|=4$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 A，B 为椭圆 E 的左右顶点，P 为直线 $l:x=4$ 上的一动点（点 P 不在 x 轴上），连接 AP 交椭圆于 C 点，连接 PB 并延长交椭圆于 D 点，试问是否存在 λ，使得 $S_{\triangle ACD}=\lambda S_{\triangle BCD}$ 成立，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 14 分）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x-1}\left(ax^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线的方程；

（Ⅱ）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若函数 $f\left(x\right)$ 存在最小值，直接写出 a 的取值范围（只需写出结论）.

21.（本小题满分 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\left\{a_{n+1},a_{n+2}\right\}-\min\left\{a_{n+1},a_{n+2}\right\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x，y 中最小的数.

（Ⅰ）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（Ⅲ）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.