2024 北京首都师大附中高三（下）开学考

数　学

2024.2.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的焦距是（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．1　C．$\sqrt{3}$　D．2

2．设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $8a_2+a_5=0$，则下列式子中数值不能确定的是（　）

A．$\frac{a_5}{a_3}$　B．$\frac{S_5}{S_3}$　C．$\frac{S_{n+1}}{S_n}$　D．$\frac{a_{n+1}}{a_n}$

3．已知圆 $C:(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 与 x 轴切于 A 点，与 y 轴切于 B 点，设弧 AB 的中点为 M，则过点 M 的圆 C 的切线方程是（　）

A．$y=x+2-\sqrt{2}$　B．$y=x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}$　C．$y=x-2+\sqrt{2}$　D．$y=x+1-\sqrt{2}$

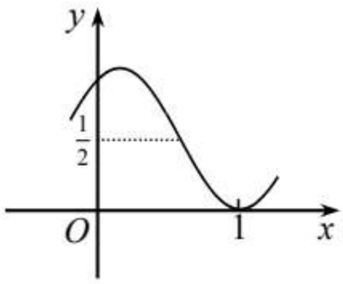
4．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $(x+2)f'(x)<0$，又 $a=f\left(\log_{\frac{1}{2}}3\right),b=f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}\right),c=f(\ln 3)$，则（　）

A．$c<b<a$　B．$b<c<a$　C．$c<a<b$　D．$a<b<c$

5．由三个数字 1，2，3 组成的五位数中，1，2，3 都至少出现一次，这样的五位数的个数为（　）

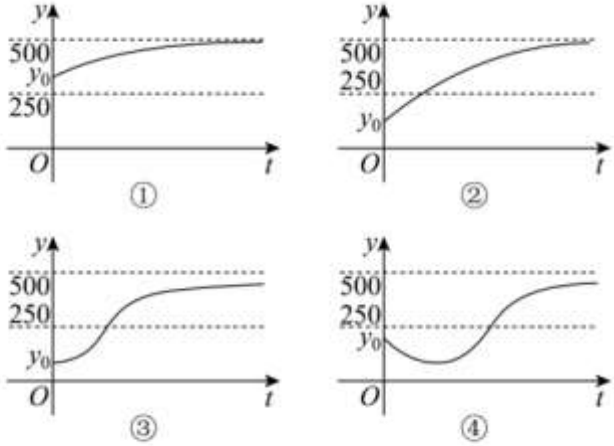
A．150　B．240　C．180　D．236

6．如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x)=\cos^2(\omega x+\varphi)$（$\omega,\varphi$ 为常数）的图象如图所示（图象经过点 $(1,0)$），那么 ω 的值为（　）



A．1　B．2　C．3　D．4

7．某种新产品的社会需求量 y 是时间 t 的函数，记作：$y=f(t)$．若 $f(0)=y_0$，社会需求量 y 的市场饱和水平估计为500万件，经研究可得，$f(t)$ 的导函数 $f'(t)$ 满足：$f'(t)=kf(t)(500-f(t))$（k 为正的常数），则函数 $f(t)$ 的图像可能为（　）

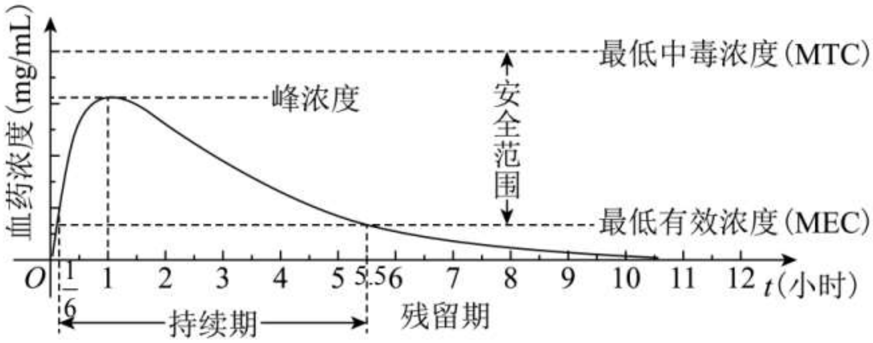


A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ①②④

8．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A\left(\sqrt{3},0\right),B\left(1,2\right)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda,\mu\in\left[0,1\right],\lambda+\mu\in\left[1,2\right]$，则所有点 P 构成的图形面积为（　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　D．$2\sqrt{3}$

9．血药浓度（Plasma Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度．药物在人体内发挥治疗作用时，该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间．已知成人单次服用 1 单位某药物后，体内血药浓度及相关信息如图所示：



根据图中提供的信息，下列关于成人使用该药物的说法中：

①首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后，药物发挥治疗作用；

②每次服用该药物 1 单位，两次服药间隔小于 2 小时，一定会产生药物中毒；

③每相隔 5．5 小时服用该药物 1 单位，可使药物持续发挥治疗作用；

④首次服用该药物 1 单位 3 小时后，再次服用该药物 1 单位，不会发生药物中毒．

其中正确说法的个数是（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

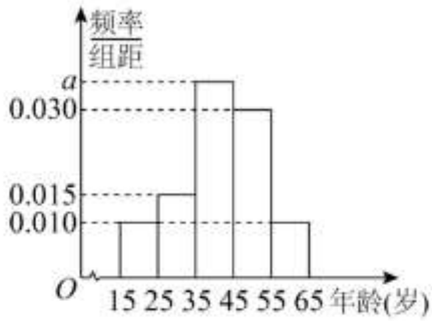
10．已知抛物线 $M:y^2=4x$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=r^2$（其中 r 为常数，$r>0$）．过点 $\left(1,0\right)$ 的直线 l 交圆 N 于 C、D 两点，交抛物线 M 于 A、B 两点，且满足 $\left|AC\right|=\left|BD\right|$ 的直线 l 只有三条的必要条件是（　）

A．$r\in\left(0,1\right]$ B．$r\in\left(1,2\right]$ C．$r\in\left(\dfrac{3}{2},4\right)$　D．$r\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

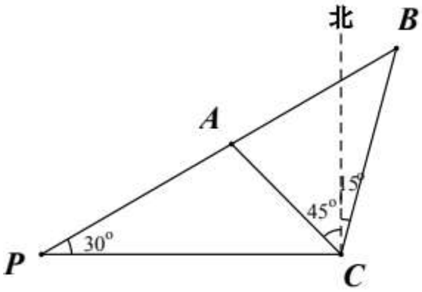
11．复数 z 满足 $z\left(1-\mathrm{i}\right)=\left|1+\mathrm{i}\right|$，则复数 z 的实部为______．

12．某直播间从参与购物的人群中随机选出 200 人，并将这 200 人按年龄分组，得到的频率分布直方图如图所示，则在这 200 人中年龄在 $\left[25,35\right)$ 的人数 $n=$______，直方图中 $a=$______．



13．已知等差数列$\{a_n\}$满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*, a_n\in\mathbf{N}^*$，且前 10 项的和$S_{10}=280$，则$a_1$的所有可能值共有______个．

14．一艘轮船在江中向正东方向航行，在点P处观测到灯塔A,B在一直线上，并与航线成 30 角．轮船沿航线前进1000米到达C处，此时观测到灯塔A在北偏西$45°$方向，灯塔B在北偏东$15°$方向．则此时轮船到灯塔B之间的距离CB为______米．



15．如图，已知菱形$ABCD$中，$AB=2,\angle BAD=120°,E$为边BC的中点，将$\triangle ABE$沿AE翻折成$\triangle AB_1E$（点B_1位于平面$ABCD$上方），连接B_1C和B_1D,F为B_1D的中点，则在翻折过程中，给出下列四个结论：

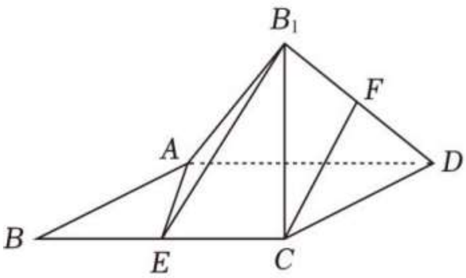
①平面$AB_1E\perp$平面B_1EC；

②AB_1与CF的夹角为定值$\dfrac{\pi}{3}$；

③三棱锥B_1-AED体积最大值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

④点F的轨迹的长度为$\dfrac{\pi}{2}$．

其中所有正确结论的序号是______．



三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=\left(1+\sqrt{3}\tan 2x\right)\cos 2x$．

（Ⅰ）求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{24}\right]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）求方程 $f\left(x\right)=\sqrt{3}$ 的根.

17.（本小题 14 分）

流行性感冒多由病毒引起，据调查，空气月平均相对湿度过大或过小时，都有利于一些病毒繁殖和传播．科学测定，当空气月平均相对湿度大于 65%或小于 40%时，有利于病毒繁殖和传播．下表记录了某年甲、乙两个城市 12 个月的空气月平均相对湿度．

	第一季度			第二季度			第三季度			第四季度		
	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
甲地	54%	39%	46%	54%	56%	67%	64%	66%	78%	72%	72%	59%
乙地	38%	34%	31%	42%	54%	66%	69%	65%	62%	70%	a%	b%

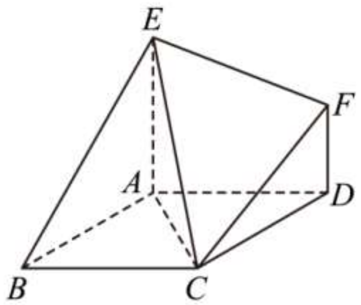
（Ⅰ）从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，求该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率；

（Ⅱ）从上表第一季度和第二季度的 6 个月中随机取出 2 个月，记这 2 个月中甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份的个数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）若 $a+b=108$，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为 M，求 M 的最大值和最小值．（只需写出结论）

18.（本小题 14 分）

如图在几何体 $ABCDFE$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$AE/\!/DF$，$AE\perp AD$，$AB=AE=2DF=2$．



（Ⅰ）判断 AD 是否平行于平面 CEF，并证明；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求：

（ⅰ）平面 $ABCD$ 与平面 CEF 所成角的大小；

（ⅱ）求点 A 到平面 CEF 的距离．

条件①：面 $EAB\perp$ 面 BCE

条件②：$BD\perp CE$

条件③：$EF=CF$

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分．

19.（本小题 14 分）

已知动圆过点 $M\left(2,0\right)$，且被 y 轴截得的线段长为 4，记动圆圆心的轨迹为曲线 C．过点 $F\left(1,0\right)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D,E 两点，其中 B,D 在 x 轴上方，M,N 分别为 AB,DE 的中点．

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；

（Ⅱ）证明：直线 MN 过定点；

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}}$.

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$的单调区间和极值；

（Ⅱ）若 $x=0$ 是函数 $g\left(x\right)=f\left(a\right)f\left(x\right)+\sin x$ 的极值点.

（ⅰ）证明：$-2\ln 2<a<0$；

（ⅱ）讨论 $g\left(x\right)$在区间$\left(-\pi,\pi\right)$上的零点个数.

21.（本小题 15 分）

对于各项均为整数的数列$\left\{a_n\right\}$，如果满足 $a_i+i\left(i=1,2,3,\cdots\right)$为完全平方数，则称数列$\left\{a_n\right\}$具有“$P$ 性质”；不论数列$\left\{a_n\right\}$是否具有“P 性质”，如果存在与$\left\{a_n\right\}$不是同一数列的$\left\{b_n\right\}$，且$\left\{b_n\right\}$同时满足下面两个条件：①$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的一个排列；②数列$\left\{b_n\right\}$具有“P 性质”，则称数列$\left\{a_n\right\}$具有“变换 P 性质”.

（Ⅰ）设数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n}{3}\left(n^2-1\right)$，证明数列$\left\{a_n\right\}$具有“$P$ 性质”；

（Ⅱ）试判断数列 1，2，3，4，5 和数列 1，2，3，⋯，11 是否具有“变换 P 性质”，具有此性质的数列请写出相应的数列$\left\{b_n\right\}$，不具此性质的说明理由；

（Ⅲ）对于有限项数列 $A:1,2,3,\cdots,n$ ，某人已经验证当 $n\in\left[12,m^2\right]\left(m\geq 5\right)$时，数列 A 具有“变换 P 性质”，试证明：当 $n\in\left[m^2+1,(m+1)^2\right]$时，数列 A 也具有“变换 P 性质”.

参考答案

选择与填空

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	A	A	A	B	B	C	C	D

11．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　12．$n=30,a=0.035$　13．4　14．$500\sqrt{2}$　15．①②④

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．解：（Ⅰ）$f\left(x\right)=\left(1+\sqrt{3}\tan 2x\right)\cos 2x$

$=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x}\right)\cos 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

因为$-\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{6}$，

所以$-\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{12}$.

所以$-\dfrac{1}{2}\le\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 1$.

即$-1\le 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 2$.

所以当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，函数$f\left(x\right)$的最大值为 2；

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$；即$x=-\dfrac{\pi}{6}$时，函数$f\left(x\right)$的最小值为$-1$.

（2）因为$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi x=k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，或$x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$

由定义域舍去后者，综上根是$x=k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，

17.（1）设事件 A：从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播．用A_i表示事件抽取的月份为第 i 月，

$\therefore\Omega=\left\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10},A_{11},A_{12}\right\}$共 12 个基本事件，

且$A=\left\{A_2,A_6,A_8,A_9,A_{10},A_{11}\right\}$共 6 个基本事件，

所以，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率$P\left(A\right)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$；

（2）在第一季度和第二季度的 6 个月中，甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份只有 2 月和 6 月，

$\therefore X$ 所有可能的取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}, P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}, P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，

随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

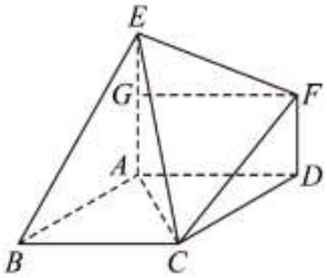
（3）由表格已知数据：乙地数据从小到大为 $31\%,34\%,38\%,42\%,54\%,62\%,65\%,66\%,69\%,70\%$，又 $a+b=108$，不妨假设 $a\le b$，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为 M，当 $a=b=54$ 时，则 $M=54\%$；

当 $a<54$，即 $b>54$ 时，若 $54<b<62$ 有 $M=\dfrac{54\%+b\%}{2}$，若 $b\ge 62$ 有 $M=\dfrac{54\%+62\%}{2}=58\%$，

$\therefore M$ 的最大值为 58%，最小值为 54%．

18.（1）AD 不平行于平面 CEF，理由如下：

取 AE 中点 G，



因为 $AE// DF, AE=2DF$，所以 $AG// DF, AG=DF$

则四边形 $AGFD$ 为平行四边形，所以 $AD// GF$，又 $GF\cap EF=F$，所以 AD 不平行于 EF，

假设 $AD//$ 平面 CEF，因为平面 $CEF\cap$ 平面 $ADFE=EF$，

$AD\subset$ 平面 $ADFE$

所以 $AD// EF$，

与 AD 不平行于 EF 矛盾，所以假设不成立，即 AD 不平行于平面 CEF；

（2）选择条件①：矛盾

选择条件②：连接 BD，取 CD 中点 M，连接 AM

因为菱形 $ABCD, \angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ACD$ 为正三角形，又 M 为 CD 中点，所以 $AM\perp CD$，由于 $AB// CD$，

所以 $AM\perp AB$，

在菱形 $ABCD$ 中，有 $AC\perp BD$，

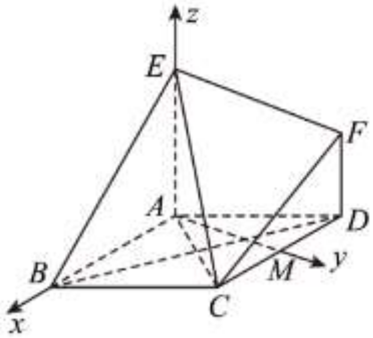
又因为 $BD\perp CE, AC\cap CE=E, AC, CE\subset$ 平面 ACE，所以 $BD\perp$ 平面 ACE，

因为 $AE\subset$ 平面 ACE，所以 $BD\perp AE$

又因为 $AE\perp AD, BD\cap AD=D, BD, AD\subset$ 面 $ABCD$，所以 $AE\perp$ 面 $ABCD$，

而 $AB, AM\subset$ 面 $ABCD$，所以 $AE\perp AB, AE\perp AM$

所以如图，以 A 为原点，AB, AM, AE 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(1,\sqrt{3},0),D(-1,\sqrt{3},0),E(0,0,2),F(-1,\sqrt{3},1)$

（ⅰ）因为 $AE\perp$ 面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{AE}=(0,0,2)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量

设平面 CEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{CE}=(-1,-\sqrt{3},2),\overrightarrow{CF}=(-2,0,1)$

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-x-\sqrt{3}y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ z=2x\end{cases}$，令 $x=1,\vec{n}=(1,\sqrt{3},2)$

设平面 $ABCD$ 与平面 CEF 所成角为 θ，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AE}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 即平面 $ABCD$ 与平面 CEF 所成角大小为 $\dfrac{\pi}{4}$；

（ⅱ）因为 $\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0)$，由（ⅰ）知平面的一个法向量为 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},2)$

所以点 A 到平面 CEF 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|1+3+0|}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

条件③：

取 CD 中点 M，连接 AM

因为菱形 $ABCD,\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ACD$ 为正三角形，又 M 为 CD 中点，所以 $AM\perp CD$，由于 $AB/\!/CD$，所以 $AM\perp AB$，

因为 $AE\perp AD$，由（1）可得 $EG\perp GF$，所以 $EF=\sqrt{EG^2+GF^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

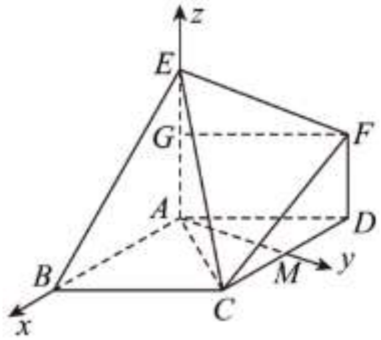
所以 $EF=CF=\sqrt{5}=\sqrt{DF^2+CD^2}$，即 $DF\perp CD$

因为 $AE/\!/DF$，所以 $AE\perp CD$

又因为 $AE\perp AD,CD\cap AD=D,CD,AD\subset$ 面 $ABCD$，所以 $AE\perp$ 面 $ABCD$，

而 $AB,AM\subset$ 面 $ABCD$，所以 $AE\perp AB,AE\perp AM$

所以如图，以 A 为原点，AB,AM,AE 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C\left(1,\sqrt{3},0\right), D\left(-1,\sqrt{3},0\right), E(0,0,2), F\left(-1,\sqrt{3},1\right)$

（ⅰ）因为 $AE\perp$ 面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{AE}=(0,0,2)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量

设平面 CEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{CE}=\left(-1,-\sqrt{3},2\right), \overrightarrow{CF}=(-2,0,1)$

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-x-\sqrt{3}y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ z=2x\end{cases}$，令 $x=1, \vec{n}=\left(1,\sqrt{3},2\right)$

设平面 $ABCD$ 与平面 CEF 所成角为 θ，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AE}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

即平面 $ABCD$ 与平面 CEF 所成角大小为 $\dfrac{\pi}{4}$；

（ⅱ）因为 $\overrightarrow{AC}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$，由（ⅰ）知平面的一个法向量为 $\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},2\right)$

所以点 A 到平面 CEF 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|1+3+0|}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

19.（Ⅰ）曲线 C 的方程是 $y^2=4x$

（Ⅱ）【方法一】：由 $C:y^2=4x$，故 $F(1,0)$，由直线 AB 与直线 CD 垂直，故两只直线斜率都存在且不为 0，

设直线 AB、CD 分别为 $x=m_1y+1$、$x=m_2y+1$，有 $m_1m_2=-1$，

$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$E(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，

联立 $C:y^2=4x$ 与直线 AB，即有 $\begin{cases}y^2=4x\\ x=m_1y+1\end{cases}$，

消去 x 可得 $y^2-4m_1y-4=0, \Delta=16m_1^2+16>0$，

故 $y_1+y_2=4m_1$、$y_1y_2=-4$，

则 $x_1+x_2=m_1y_1+1+m_1y_2+1=m_1(y_1+y_2)+2=4m_1^2+2$，

故 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2m_1^2+1, \dfrac{y_1+y_2}{2}=2m_1$，

即 $M\left(2m_1^2+1,2m_1\right)$，

同理可得 $N\left(2m_2^2+1,2m_2\right)$，

当 $2m_1^2+1\neq 2m_2^2+1$ 时，

则 $l_{MN}: y=\dfrac{2m_2-2m_1}{2m_2^2+1-\left(2m_1^2+1\right)}\left(x-2m_1^2-1\right)+2m_1$，

即 $y=\dfrac{m_2-m_1}{m_2^2-m_1^2}\left(x-2m_1^2-1\right)+2m_1=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{2m_1^2+1}{m_2+m_1}$

$+\dfrac{2m_1\left(m_2+m_1\right)}{m_2+m_1}=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{2m_1^2+1-2m_1m_2-2m_1^2}{m_2+m_1}=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{1-2m_1m_2}{m_2+m_1}$，

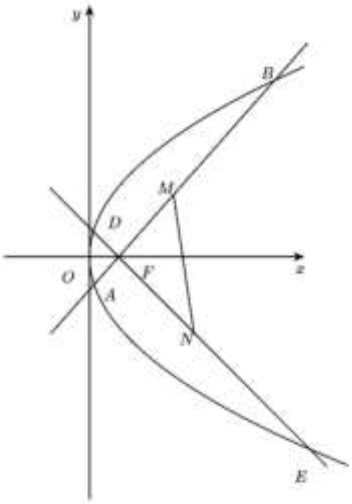
由 $m_1m_2=-1$，即 $y=\dfrac{x}{m_2+m_1}-\dfrac{1+2}{m_2+m_1}=\dfrac{1}{m_2+m_1}(x-3)$，

故 $x=3$ 时，有 $y=\dfrac{1}{m_2+m_1}(3-3)=0$，

此时 MN 过定点，且该定点为 $(3,0)$，

当 $2m_1^2+1=2m_2^2+1$ 时，即 $m_1^2=m_2^2$ 时，由 $m_1m_2=-1$，即 $m_1=\pm 1$ 时，

故直线 MN 过定点，且该定点为 $(3,0)$；



【方法二】：设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，不妨设 $x_1<x_2$.

设 $l: x=my+1$，则 $m>0$．由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$，得 $y^2-4my-4=0$，

故 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4, \dfrac{y_1+y_2}{2}=2m, \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m\left(y_1+y_2\right)+2}{2}=2m^2+1$.

所以 $M\left(2m^2+1,2m\right)$.

同理可得 $N\left(\dfrac{2}{m^2}+1,-\dfrac{2}{m}\right)$.

若 $m\neq 1$，则直线 $MN: y=\dfrac{m}{m^2-1}\left(x-2m^2-1\right)+2m=\dfrac{m}{m^2-1}(x-3), MN$ 过点 $(3,0)$.

若 $m=1$，则直线 $MN: x=3, MN$ 过点 $(3,0)$.

综上，直线 MN 过定点 $(3,0)$.

20.【答案】解：（1） $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^x}, f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{e^x}$，取 $f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{e^x}=0$

得到 $x=1$，

当 $x<1$时， $f'\left(x\right)>0$，函数单调递增；当 $x>1$时， $f'\left(x\right)<0$，函数单调递减.

故函数在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，有极大值 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{e}$，无极小值

（2）（ⅰ） $g\left(x\right)=f\left(a\right)\cdot f\left(x\right)+\sin x=\dfrac{a}{e^a}\cdot\dfrac{x}{e^x}+\sin x, g'\left(x\right)=\dfrac{a}{e^a}\cdot\dfrac{1-x}{e^x}+\cos x$

$g'\left(0\right)=\dfrac{a}{e^a}+1=0$，故 $e^a+a=0$，

设 $F\left(x\right)=e^x+x$，函数单调递增，

$F\left(0\right)=1>0, F\left(-2\ln2\right)=e^{-2\ln2}-2\ln2=\dfrac{1}{4}-\ln4<0$.

根据零点存在定理知 $-2\ln2<a<0$.

（ⅱ） $g\left(x\right)=-\dfrac{x}{e^x}+\sin x, g\left(0\right)=0$， $g'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{e^x}+\cos x$，

设 $h\left(x\right)=\dfrac{x-1}{e^x}+\cos x, h'\left(x\right)=\dfrac{2-x}{e^x}-\sin x$，

当 $x\in\left(-\pi,0\right)$ 时， $\dfrac{2-x}{e^x}>0, \sin x<0$，故 $h'\left(x\right)>0, g'\left(x\right)$ 单调递增， $g'\left(x\right)<g'\left(0\right)=-1+1=0$，故函数 $g\left(x\right)$ 单调递减， $g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，

故函数在 $\left(-\pi,0\right)$ 上无零点；1 分

当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时， $g\left(x\right)=-\dfrac{x}{e^x}+\sin x=\dfrac{1}{e^x}\left(e^x\sin x-x\right)$，

设 $F\left(x\right)=e^x\sin x-x, F'\left(x\right)=e^x\left(\sin x+\cos x\right)-1$，

设 $k\left(x\right)=e^x\left(\sin x+\cos x\right)-1$，则 $k'\left(x\right)=2e^x\cos x$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $k'\left(x\right)=2e^x\cos x>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时， $k'\left(x\right)=2e^x\cos x<0$，

故 $k\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

$k\left(0\right)=0, k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0, k\left(\pi\right)=-e^{\pi}-1<0$，

故存在 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 使 $k\left(x_0\right)=0$，

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时， $k\left(x\right)>0, F\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_0,\pi\right)$ 时， $k\left(x\right)<0, F\left(x\right)$ 单调递减. $F\left(0\right)=0$，故 $F\left(x_0\right)>0, F\left(\pi\right)=-\pi<0$，故函数在 $\left(x_0,\pi\right)$ 上有 1 个零点.

综上，函数的零点个数为 2.

21．解：（Ⅰ）当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{3}\left(n^2-1\right)-\frac{n-1}{3}\left[(n-1)^2-1\right]=n^2-n$，

又$a_1=0$，所以$a_n=n^2-n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

所以$a_i+i=i^2\left(i=1,2,3,\cdots\right)$是完全平方数，数列$\left\{a_n\right\}$具有“$P$性质”．

（Ⅱ）数列 1，2，3，4，5 具有“变换P性质”，

数列$\left\{b_n\right\}$为 32154．

数列$1,2,3,\cdots,11$不具有“变换P性质”．

因为 11，4 都只有与 5 的和才能构成完全平方数，

所以数列$1,2,3,\cdots,11$不具有“变换P性质”．

（Ⅲ）设$n=m^2+j,1\le j\le 2m+1$，

注意到$(m+2)^2-\left(m^2+j\right)=4m+4-j$，

令$h=4m+4-j-1$，

由于$1\le j\le 2m+1,m\ge 5$，所以$h=4m+4-j-1\ge 2m+2\ge 12$，

又$m^2-h=m^2-4m-4+j+1\ge m^2-4m-2$，

$m^2-4m-2=(m-2)^2-6>0,$

所以$h<m^2$，

即$h\in\left[12,m^2\right]$．

因为当$n\in\left[12,m^2\right]\left(m\ge 5\right)$时，数列$\left\{a_n\right\}$具有“变换$P$性质”，

所以$1,2,\cdots,4m+4-j-1$可以排列成$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_h$，使得$a_i+i\left(i=1,2,\cdots,h\right)$都是平方数；

另外，$4m+4-j,4m+4-j+1,\ldots,m^2+j$可以按相反顺序排列，即排列为$m^2+j,\ldots,4m+4-j+1$，$4m+4-j$，

使得$\left(4m+4-j\right)+\left(m^2+j\right)=(m+2)^2$，

$\left(4m+4-j+1\right)+\left(m^2+j-1\right)=(m+2)^2$，

所以$1,2,\cdots,4m+4-j-1,4m+4-j,\cdots,m^2-1+j,m^2+j$可以排成$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_h$，$m^2+j,\cdots,4m+4-j$满足$a_i+i\left(i=1,2,\cdots,m^2+j\right)$都是平方数．