2024 北京八一学校高三（下）开学考

数　　学

2024.02

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分在每小题列出的四个选项中选出符合题目要求的一项.

1.已知集合 $A=\{(x,y)|\ y=x^2\},B=\{(x,y)|\ y=x\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{0,1\}$　B. $\{(0,0)\}$　C. $\{(1,1)\}$　D. $\{(0,0),(1,1)\}$

2.已知复数 z 满足 $\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部为（　）

A.1　B. i　C.2　D. $2\mathrm{i}$

3.已知 $f(x)=\sin x\cos x$，则 $f(x)$ 的最小值与最小正周期分别是（　）

A. $-\dfrac{1}{2},\pi$　B. $-\dfrac{1}{2},2\pi$　C. $-2,\pi$　D. $-2,2\pi$

4.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n$，则 $a_2+a_3=$（　）

A.3　B.6　C.7　D.8

5.已知实数 $a>b>0,m\in R$，则下列不等式中成立的是（　）

A. $\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a}$　B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

C. $\dfrac{m}{a}>\dfrac{m}{b}$　D. $a^{-2}>b^{-2}$

6.已知 A,B 分别为 x 轴，y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆与直线 $x+2y-2=0$ 相切，则该圆面积的最小值为（　）

A. $\dfrac{\pi}{5}$　B. $\dfrac{2\pi}{5}$　C. $\dfrac{4\pi}{5}$　D. π

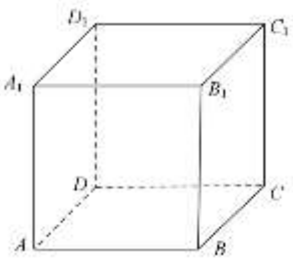
7.已知 F_1,F_2 是双曲线 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 与椭圆 C_2 的左、右公共焦点，A 是 C_1,C_2 在第一象限内的公共点，若 $|F_1F_2|=|F_1A|$，则 C_2 的离心率是（　）

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{2}{5}$　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{3}{5}$

8.设 $a\in R$，若“$x>1$”是“$ax>\ln x$”的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(0,+\infty)$　B. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　C. $(1,+\infty)$.　D. $(e,+\infty)$

9.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$ 平面 MBD_1.线段 AP 长度的取值范围是（　）



A. $\left[1,\sqrt{2}\right]$　B. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$　C. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$　D. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\infty\right)$

10.某中学举行了科学防疫知识竞赛.经过选拔，甲、乙、丙三位选手进入了的最后角逐.他们还将进行四场知识竞赛.规定：每场知识竞赛前三名的得分依次为a,b,c（$a>b>c$，且$a,b,c\in\mathbf{N}^*$）；选手总分为各场得分之和.四场比赛后，已知甲最后得分为16分，乙和丙最后得分都为8分，且乙只有一场比赛获得了第一名，则下列说法正确的是（　）

A.每场比赛的第一名得分a为4

B.甲至少有一场比赛获得第二名

C.乙在四场比赛中没有获得过第二名

D.丙至少有一场比赛获得第三名

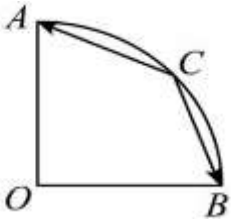
第二部分（非选择题共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11.若$(x-a)^5$的二项式展开式中x^2的系数为10，则$a=$__________.

12.关于x的不等式$x^2-(a+1)x+a<0$的解集中至多包含1个整数，写出满足条件的一个a的__________.

13.如图，单位向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$，点$C$在以$O$为圆心，1为半径的弧$AB$上运动，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$的最小值为__________.



14.已知函数$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$，设$F_f(x)=\begin{cases}f(x),|f(x)|\le 1,\\ 1,|f(x)|>1.\end{cases}$若$f(x)=\mathrm{e}^{a-|x|}-1$，且对任意$x\in\mathbf{R},F_f(x)=f(x)$，则实数$a$的取值范围为__________.

15.画法几何的创始人法国数学家加斯帕尔•蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$F_1,F_2$分别为椭圆的左、右焦点，$A,B$为椭圆上两个动点.直线$l$的方程为$bx+ay-a^2-b^2=0$.给出下列四个结论：

①C的蒙日圆的方程为$x^2+y^2=3b^2$；

②在直线l上存在点P，椭圆C上存在A,B，使得$PA\perp PB$；

③记点A到直线l的距离为d，则$d-|AF_2|$的最小值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b$；

④若矩形$MNGH$的四条边均与C相切，则矩形$MNGH$面积的最大值为$6b^2$.

其中所有正确结论的序号为__________.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题满分13分）在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}\sin A+\cos A=\sqrt{3},b=2\sqrt{3}$.再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

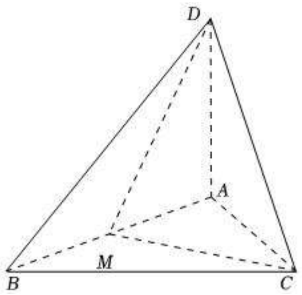
（1）$\tan 2A$的值；

（2）c和面积S的值.

条件①：$a=2,b^2>a^2+c^2$；条件②：$\sqrt{3}a=2c,c>3$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题满分14分）如图，在四面体$ABCD$中，$AD\perp$平面ABC，点M为棱AB的中点，$AB=AC=2,BC=2\sqrt{2},AD=2$.



（1）证明：$AC\perp BD$；

（2）求平面BCD和平面DCM夹角的余弦值；

（3）在线段BD上是否存在一点P，使得直线PC与平面DCM所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$？若存在，求$\dfrac{BP}{BD}$的值；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分13分）为迎接2022年冬奥会，北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核.记X表示学生的考核成绩，并规定$X\geq 85$为考核优秀.为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了30名学生的考核成绩，并作成如下茎叶图：

5	0	1	1	6				
6	0	1	4	3	3	5	8	
7	2	3	7	6	8	7	1	7
8	1	1	4	5	2	9		
9	0	2	1	3	0			

（1）从参加培训的学生中随机选取1人，请根据图中数据，估计这名学生考核为优秀的概率；

（2）从图中考核成绩满足$X\in[70,79]$的学生中任取3人，设Y表示这3人中成绩满足$|X-85|\leq 10$的人数，求Y的分布列和数学期望；

（3）根据以往培训数据，规定当$P\left(\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\leq 1\right)\geq 0.5$时培训有效.请你根据图中数据，判断此次冰雪培训活动是否有效，并说明理由.

19.（本小题满分 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下顶点为 B_2,B_1，左、右焦点为 F_1,F_2，四边形 $B_1F_1B_2F_2$ 是面积为 2 的正方形.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知圆 $x^2+y^2=\frac{2}{3}$ 的切线 l 与椭圆 C 相交于 D,E 两点，判断以 DE 为直径的圆是否经过定点？如果是，求出定点的坐标；如果不是，请说明理由.

20.（本小题满分 15 分）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{ax-x^2}{\mathrm{e}^x}$.

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）当 $a>0$ 时，求证：$f\left(x\right)>-\frac{2}{\mathrm{e}}$ 对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 成立.

21.（本小题满分 15 分）已知无穷集合 A,B，且 $A\subseteq\mathbf{N},B\subseteq\mathbf{N}$，记 $A+B=\left\{a+b\mid a\in A,b\in B\right\}$，定义：满足 $\mathbf{N}^*\subseteq\left(A+B\right)$ 时，则称集合 A,B 互为“完美加法补集”.

（1）已知集合 $A=\left\{a\mid a=2m+1,m\in\mathbf{N}\right\},B=\left\{b\mid b=2n,n\in\mathbf{N}\right\}$.判断 2019 和 2020 是否属于集合 $A+B$，并说明理由；

（2）设集合

$$A=\left\{x\mid x=\varepsilon_0+\varepsilon_2\times 2^2+\varepsilon_4\times 2^4+\cdots+\varepsilon_{2i}\times 2^{2i}+\cdots+\varepsilon_{2s}\times 2^{2s},\varepsilon_{2i}=0,1;i=0,1,\cdots,s,s\in\mathrm{N}\right\},$$

$$B=\left\{x\mid x=\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_3\times 2^3+\cdots+\varepsilon_{2i-1}\times 2^{2i-1}+\cdots+\varepsilon_{2s-1}\times 2^{2s-1},\varepsilon_{2i-1}=0,1;i=1,\cdots,s,s\in\mathrm{N}^*\right\}.$$

（i）求证：集合 A,B 互为“完美加法补集”；

（ii）记 $A\left(n\right)$ 和 $B\left(n\right)$ 分别表示集合 A,B 中不大于 $n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的元素个数，写出满足 $A\left(n\right)B\left(n\right)=n+1$ 的元素 n 的集合.（只需写出结果，不需要证明）

参考答案

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分在每小题列出的四个选项中选出符合题目要求的一项.

1.D　2.A　3.A　4.B　5.B　6.A　7.D　8.B　9.C　10.C

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. -1　12. $[-1,3]$　13. $1-\sqrt{2}$　14. $(-\infty,\ln 2]$　15. ①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.解：因为 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\sqrt{3}$，

所以 $2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，

即 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<A<\pi$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

所以 $A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，或 $A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$，

得 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $A=\dfrac{\pi}{2}$.

若选择条件①：

（1）因为 $a=2,b=2\sqrt{3}$，

所以 $a<b,A$ 不是最大角，得 $A=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\tan 2A=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

（2）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$.

所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b^2>a^2+c^2$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<0$，

所以$\frac{\pi}{2}<B<\pi$，

所以$B=\frac{2\pi}{3},C=\frac{\pi}{6}$，

所以$c=a=2,S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$.

若选择条件②：

（1）因为$\sqrt{3}a=2c,c>3$，

所以$a=\frac{2c}{\sqrt{3}}>\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=b$，且$a>c$，

所以A是最大角，得$A=\frac{\pi}{2}$，

所以$\tan 2A=\tan\pi=0$.

（2）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$（或直接利用$c=a\sin C$），及$\sqrt{3}a=2c,A=\frac{\pi}{2}$，

可得$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0<C<\frac{\pi}{2}$，

所以$C=\frac{\pi}{3},B=\frac{\pi}{6}$，

又$\frac{b}{c}=\tan B$，

所以$c=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6,S=\frac{1}{2}bc=6\sqrt{3}$.

17.解：（1）因为$AD\perp$平面$ABC,AC\subset$平面ABC，所以$AD\perp AC$，

因为$AB=AC=2,BC=2\sqrt{2}$，所以$AB^2+AC^2=BC^2$，

所以$AB\perp AC$.

又因为$AD\cap AB=A,AD,AB\subset$平面ABD，

所以$AC\perp$平面ABD，

因为$BD\subset$平面ABD，

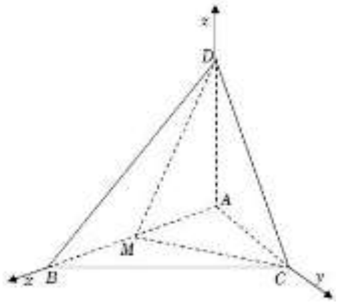
所以$AC\perp BD$.

（2）因为$AD\perp$平面$ABC,AB\subset$平面ABC，所以$AD\perp AB$.

又因为$AD\perp AC,AB\perp AC$，

如图，以A为坐标原点，AB为x轴，AC为y轴，AD为z轴，建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0),M(1,0,0),B(2,0,0),C(0,2,0),D(0,0,2)$，



$\overrightarrow{MC}=(-1,2,0),\overrightarrow{MD}=(-1,0,2)$，

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0),\overrightarrow{BD}=(-2,0,2)$，

设 $\vec{n}=(a,b,c)$ 是平面 DCM 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MC}=-a+2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MD}=-a+2c=0\end{cases}$，令 $c=1$，得 $\vec{n}=(2,1,1)$，

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+2z=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $\vec{m}=(1,1,1)$，

设平面 BCD 和平面 DCM 夹角为 θ，则

$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以平面 BCD 和平面 DCM 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（3）设点 P 满足，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD}=(2-2\lambda,0,2\lambda)$，

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=(2-2\lambda,-2,2\lambda)$.

若直线 PC 与平面 DCM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

则 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}=|\cos\langle\overrightarrow{CP},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|2-2\lambda|}{\sqrt{8-8\lambda+8\lambda^2}\times\sqrt{6}}$，

化简得 $\lambda^2=-1$，所以 λ 无解.

所以在线段 BD 上不存在点 P，使得直线 PC 与平面 DCM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

18.解：（1）设该名学生考核成绩优秀为事件 A，由茎叶图中的数据可以知道，30 名同学中，有 7 名同学考核优秀所以所求概率 $P(A)$ 约为 $\dfrac{7}{30}$

（2）Y 的所有可能取值为 $0,1,2,3$

因为成绩 $X\in[70,80]$ 的学生共有 8 人，其中满足 $|X-75|\leq10$ 的学生有 5 人所以

$P(Y=0)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56},P(Y=1)=\dfrac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}P(Y=2)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}P(Y=3)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}$

随机变量Y的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{30}{56}+3\times\frac{10}{56}=\frac{15}{8}$

（3）根据表格中的数据，满足$\left|\frac{X-85}{10}\right|\le 1$的成绩有 16 个

所以$P\left(\left|\frac{X-85}{10}\right|\le 1\right)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}>0.5$所以可以认为此次冰雪培训活动有效.

19.解：（1）已知得$2b=2c,a^2=2$，则$b=c=1$，则所求方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）（i）当直线l的斜率不存在时，

因为直线l与圆M相切，故其中的一条切线方程为$x=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

代入椭圆方程可得，可得$D\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),E\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

则以DE为直径的圆的方程为$\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+y^2=\frac{2}{3}$.

（ii）当直线l的斜率为 0 时，

因为直线l与圆M相切，所以其中的一条切线方程为$y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

代入椭圆方程可得，可得$D\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),E\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

则以DE为直径的圆的方程为$x^2+\left(y+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$.

显然以上两圆都经过点$O(0,0)$.

（iii）当直线l的斜率存在且不为零时，设直线l的方程为$y=kx+m$.

代入椭圆方程消去y，得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

设$D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$.

所以$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$.

所以$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{3m^2-2k^2-2}{2k^2+1}$ ①，

因为直线l和圆M相切，

所以圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，整理，得 $m^2=\frac{2}{3}\left(1+k^2\right)$②，

将②代入①，得 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$，显然以 DE 为直径的圆经过原点 $O(0,0)$，

综上可知，以 DE 为直径的圆过定点 $(0,0)$.

20.解：（1）因为 $f(x)=\frac{ax-x^2}{e^x}$

所以 $f'(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{x^2-x-1}{e^x}$

所以 $f'(1)=\frac{-1}{e}$，而 $f(1)=\frac{-2}{e}$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\left(-\frac{2}{e}\right)=-\frac{1}{e}(x-1)$

化简得到 $y=-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$

（2）法一：

因为 $f'(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$，令 $f'(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}=0$

得 $x_1=\frac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}>0, x_2=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$

当 $a>0$ 时，$x, f'(x), f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$

上的最小值为 $f(0), f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\frac{2}{e}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\frac{2}{e}$

因为 $x_2{}^2-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\frac{ax_2-x_2{}^2}{e^{x_2}}=\frac{a-2x_2}{e^{x_2}}$

设 $F(x)=\frac{a-2x}{e^x}$，其中 $x>0$

所以 $F'(x)=\frac{-2-(a-2x)}{e^x}=\frac{2x-(a+2)}{e^x}$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=\frac{a+2}{2}$，

当 $a>0$ 时，$x,F'(x),F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	极小值	↗

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $F\left(\frac{a+2}{2}\right)=\frac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}$，而 $F\left(\frac{a+2}{2}\right)=\frac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}>\frac{-2}{e}$ 注意到 $x_2>0$，所以

$f(x_2)=F(x_2)>-\frac{2}{e}$，问题得证

法二：

因为“对任意的 $x>0,\frac{ax-x^2}{e^x}>-\frac{2}{e}$”等价于“对任意的 $x>0,\frac{ax-x^2}{e^x}+\frac{2}{e}>0$”

即“$x>0,\frac{2e^x+e(ax-x^2)}{e^{x+1}}>0$”，故只需证“$x>0,2e^x+e(ax-x^2)>0$”

设 $g(x)=2e^x+e(ax-x^2)$

所以 $g'(x)=2e^x+e(a-2x)$

设 $h(x)=g'(x),h'(x)=2e^x-2e$

令 $h'(x)=0$，得 $x_3=1$

当 $a>0$ 时，$x,h'(x),h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)(0,+\infty)$ 上的最小值为 $h(1)$，而 $h(1)=2e+e(a-2)=ea>0$

所以 $x>0$ 时，$g'(x)=2e^x+e(a-2x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$，所以 $g(x)>0$，问题得证

法三：

“对任意的 $x>0,f(x)>-\frac{2}{e}$”等价于“$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值大于 $-\frac{2}{e}$”

因为 $f'(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$，令 $f'(x)=0$

得 $x_1=\frac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}>0,x_2=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$

当 $a>0$ 时，$x, f'(x), f(x)$ 在在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0), f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{e}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{e}$

因为 $x_2^{\ 2}-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2^{\ 2}}{e^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{e^{x_2}}>\dfrac{-2x_2}{e^{x_2}}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 和 $a>0$，所以 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>2$

设 $F(x)=\dfrac{-2x}{e^x}$，其中 $x>2$

所以 $F'(x)=\dfrac{-2(1-x)}{e^x}=\dfrac{2(x-1)}{e^x}$

当 $x>2$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增，所以 $F(x)>F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$

而 $-\dfrac{4}{e^2}-\left(-\dfrac{2}{e}\right)=\dfrac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $f(x_2)>F(x_2)>-\dfrac{2}{e}$，问题得证

法四：

因为 $a>0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{ax-x^2}{e^x}>\dfrac{-x^2}{e^x}$

设 $F(x)=\dfrac{-x^2}{e^x}$，其中 $x>0$

所以 $F'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x}$

所以 $x, F'(x), F(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	极小值	↗

所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，而 $-\dfrac{4}{e^2}-\left(-\dfrac{2}{e}\right)=\dfrac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $x>0$ 时，$F(x)>-\frac{2}{e}$

所以

$f(x)>F(x)>-\frac{2}{e}$

21.答案：

解：（1）由 $a=2m+1, b=2n$ 得 $a+b=2(m+n)+1$ 是奇数，

当 $a=2\times 1009+1, b=2\times 0=0$ 时，$a+b=2019$，

所以 $2019\in A+B$，

$2020\notin A+B$.

（2）（i）首先证明：对于任意自然数 p 可表示为唯一一数组

$(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_k)$，

其中 $\varepsilon_i=0,1; i=0,1,\cdots,k,k\in\mathbf{N}$，

使得

$p=\varepsilon_0+\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i\times 2^i+\varepsilon_{i+1}\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k\times 2^k, \varepsilon_i=0,1; i=0,1,\cdots,k,k\in\mathbf{N}$，

由于

$0\le\varepsilon_0+\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i\times 2^i+\varepsilon_{i+1}\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k\times 2^k\le 2^1+2^2+\cdots+2^i+\cdots+2^k=2^{k+1}-1$

这种形式的自然数 p 至多有 2^{k+1} 个，且最大数不超过 $2^{k+1}-1$.

由 $\varepsilon_i=0,1; i=0,1,\cdots,k,k\in\mathbf{N}$，每个 ε_i 都有两种可能，

所以这种形式的自然数 p 共有 $\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2=2^{k+1}}_{k+1个2}$ 个结果.

下证 $p=\varepsilon_0+\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i\times 2^i+\varepsilon_{i+1}\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k\times 2^k$

$=\varepsilon_0'+\varepsilon_1'\times 2^1+\varepsilon_2'\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i'\times 2^i+\varepsilon_{i+1}'\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k'\times 2^k$

其中 $\varepsilon_i=0,1; \varepsilon_i'=0,1; i=0,1,\cdots,k,k\in\mathbf{N}$，则 $\varepsilon_i'=\varepsilon_i$

假设存在 $\varepsilon_i'\ne\varepsilon_i$ 中，取 i 最大数为 j，则

$|(\varepsilon_0+\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i\times 2^i+\varepsilon_{i+1}\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k\times 2^k)$

$-(\varepsilon_0'+\varepsilon_1'\times 2^1+\varepsilon_2'\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i'\times 2^i+\varepsilon_{i+1}'\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k'\times 2^k)|$

$=\left|(\varepsilon_0'-\varepsilon_0)+(\varepsilon_1'-\varepsilon_1)\times 2^1+\cdots+(\varepsilon_j'-\varepsilon_j)\times 2^j\right|$

$\ge\left|(\varepsilon_j'-\varepsilon_j)\times 2^i\right|-\left|(\varepsilon_0'-\varepsilon_0)+(\varepsilon_1'-\varepsilon_1)\times 2^1+\cdots+(\varepsilon_{j-1}'-\varepsilon_{j-1})\times 2^{j-1}\right|$

$\ge\left|(\varepsilon_j'-\varepsilon_j)\times 2^j\right|-\left(\left|\varepsilon_0'-\varepsilon_0\right|+\left|\varepsilon_1'-\varepsilon_1\right|\times 2^1+\cdots+\left|\varepsilon_{j-1}'-\varepsilon_{j-1}\right|\times 2^{j-1}\right)$

$\ge 2^j-(1+2^1+\cdots+2^{j-1})=1$

所以 $0\ge 1$ 不可能.

综上，任意正整数 p 可唯一表示为

$p=\varepsilon_0+\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots+\varepsilon_i\times 2^i+\varepsilon_{i+1}\times 2^{i+1}+\cdots+\varepsilon_k\times 2^k$

$=(\varepsilon_0+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots)+(\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_3\times 2^3+\cdots)$

显然 $(\varepsilon_0+\varepsilon_2\times 2^2+\cdots)\in A, (\varepsilon_1\times 2^1+\varepsilon_3\times 2^3+\cdots)\in B$

满足 $\mathbf{N}^* \subseteq (A+B)$，所以集合 A, B 互为“完美加法补集”.

（ii）$\left\{n \mid n=2^k-1, k \in \mathbf{N}^*\right\}$.