试卷编号：9972

北京一零一中 2023-2024 学年度第二学期高三数学统考四

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$, $M=\{-a,a\}$, 若 $P\cup M=P$, 则实数 a 的取值范围是 (　　)

(A) $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$　(B) $\{a\mid -1<a<1\}$

(C) $\{a\mid -1<a<1$ 且 $a\neq 0\}$　(D) $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1$ 且 $a\neq 0\}$

2. 已知 i 是虚数单位, 若 $z=\dfrac{\mathrm{i}+a}{1+\mathrm{i}}$ 为纯虚数, 则实数 $a=$ (　　)

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

3. 在 $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x)^n$ 的展开式中, 第 4 项和第 5 项的二项式系数相等, 则展开式中 x^5 的系数为 (　　)

(A) $\dfrac{35}{8}$　(B) $-\dfrac{35}{8}$　(C) $\dfrac{9}{2}$　(D) $-\dfrac{9}{2}$

4. 函数 $f(x)=2^x+x$, $g(x)=\log_2 x+x$, $h(x)=\sqrt{x}+x$ 的零点分别为 a,b,c, 则 a,b,c 的大小顺序为 (　　)

(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $b>c>a$　(D) $c>a>b$

5. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$, 则点 A 到直线 BC 的距离为 (　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 α,β 是三角形的两个内角, 下列结论中正确的是 (　　)

(A) 若 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$　(B) 若 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha+\cos\beta<\sqrt{2}$

(C) 若 $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta>1$　(D) 若 $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha+\cos\beta>1$

7. 已知直线 $l: y=mx-m-1$, P 为圆 $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上一动点, 设 P 到直线 l 距离的最大值为 $d(m)$, 当 $d(m)$ 最大时, m 的值为 (　　)

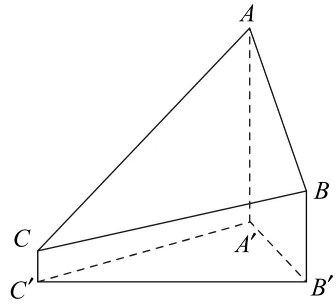
(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) 2

8. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 则 “存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$” 是 “对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+3}>a_n$” 的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

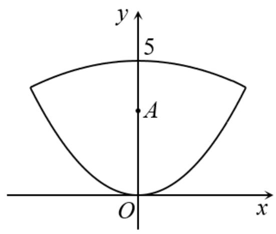
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠穆高峰测量法之一, 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$, 由 C 点测得 B 点的仰角为 15°, BB' 与 CC' 的差为 100, 由 B 点测得 A 点的仰角为 45°, 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 ($\sqrt{3} \approx 1.732$) (　　)



(A) 346　　(B) 373　　(C) 446　　(D) 473

10. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 和 $y = -\frac{1}{16}x^2 + 5$ 所围成的封闭曲线如图所示, 已知点 $A(0, a)$, 若在此封闭曲线上至少存在两对不同的点, 满足每一对点关于点 A 对称, 则实数 a 的取值范围是 (　　)



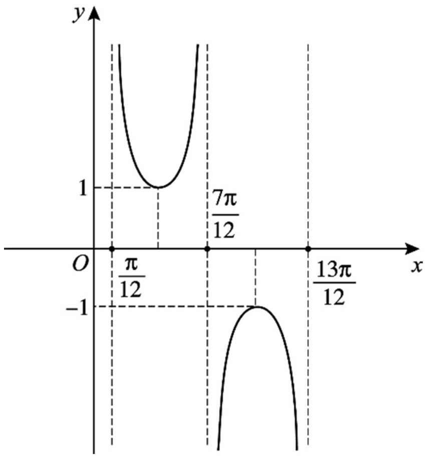
(A) $(1, 4]$　　(B) $[\frac{5}{2}, 4)$　　(C) $[\frac{5}{2}, 3)$　　(D) $(2, 3]$

二、填空题共 5 小题。

11. 已知角 α 的终边经过点 $(-4, 3)$, 则 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ 的值是 ________ .

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为 2, 则实数 $m =$ ________ .

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$, 若 $g(x)\cdot f(x)=1$, 且函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则 φ 等于 ________ .



14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x\leqslant a, \\ -x, & x>a. \end{cases}$

(1) 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ________ ;

(2) 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是 ________ .

15. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=AD=1$, 动点 E, F 分别在线段 AB 和 CC_1 上. 给出下列四个结论:

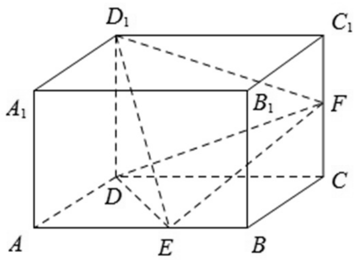
①四面体 D_1DEF 的体积为 $\frac{1}{3}$;

② $\triangle D_1EF$ 可能是等边三角形;

③当 $D_1E\perp DF$ 时, $D_1F\leqslant EF$;

④有且仅有两组 E, F, 使得三棱锥 D_1-DEF 的四个面均为直角三角形.

其中所有正确结论的序号是 ________ .



三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{4})\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 上的最值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, Q 为棱 PD 的中点.

(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 ACQ;

(2) 若 $BA \perp PD$, 再从条件①、条件②、条件③中选择若干个作为已知, 使四棱锥 $P-ABCD$ 唯一确定, 并求:

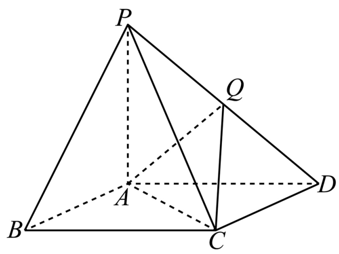
(i) 直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值

(ii) 点 P 到平面 ACQ 的距离.

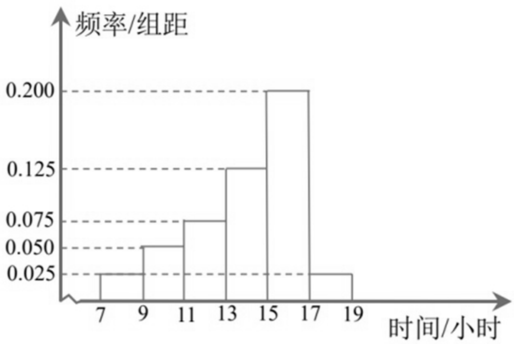
条件①: 二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $45°$;

条件②: $PD = \sqrt{2}$

条件③: $AQ \perp PC$.



18. "双减" 政策执行以来, 中学生有更多的时间参加志愿服务和体育锻炼等课后活动. 某校为了解学生课后活动的情况, 从全校学生中随机选取 100 人, 统计了他们一周参加课后活动的时间 (单位: 小时), 分别位于区间 $[7,9)$, $[9,11)$, $[11,13)$, $[13,15)$, $[15,17)$, $[17,19]$, 用频率分布直方图表示如下:



假设用频率估计概率, 且每个学生参加课后活动的时间相互独立.

(1) 估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间 $[13,17)$ 的概率;

(2) 从全校学生中随机选取 3 人, 记 ξ 表示这 3 人一周参加课后活动的时间在区间 $[15,17)$ 的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$;

(3) 设全校学生一周参加课后活动的时间的中位数估计值为 a、平均数的估计值为 b (计算平均数时, 同组中的每个数据都用该组区间的中点值代替), 请直接写出 a, b 的大小关系.

19. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右顶点 $A(2,0)$, P 为椭圆 C 上的动点, 且点 P 不在 x 轴上, O 是坐标原点, $\triangle AOP$ 面积的最大值为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 过点 $H(-1,0)$ 的直线 PH 与椭圆 C 交于另一点 Q, 直线 AP, AQ 分别与 y 轴相交于点

E, F. 当 $|EF| = 2$ 时, 求直线 PH 的方程.

20. 已知函数 $f(x) = \sin x + \mathrm{e}^x + a\ln(x+1)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2) 当 $a \leqslant -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的最小值;

(3) 写出实数 a 的一个值, 使得 $f(x) \geqslant 1$ 恒成立, 并证明.

21. 已知 $Q: a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为有穷正整数数列, 且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$, 集合 $X = \{-1, 0, 1\}$. 若存在 $x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, k$, 使得 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = t$, 则称 t 为 $k-$可表数, 称集合 $T = \{t \mid t = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k, x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, k\}$ 为 $k-$可表集.

(1) 若 $k = 10, a_i = 2^{i-1}, i = 1, 2, \cdots, k$, 判定 $31, 1024$ 是否为 $k-$可表数, 并说明理由;

(2) 若 $\{1, 2, \cdots, n\} \subseteq T$, 证明: $n \leqslant \dfrac{3^k - 1}{2}$;

(3) 设 $a_i = 3^{i-1}, i = 1, 2, \cdots, k$, 若 $\{1, 2, \cdots, 2024\} \subseteq T$, 求 k 的最小值.

北京一零一中 2023-2024 学年度第二学期高三数学统考四

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$, $M=\{-a,a\}$, 若 $P\cup M=P$, 则实数 a 的取值范围是 (　　)

(A) $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$　　(B) $\{a\mid -1<a<1\}$

(C) $\{a\mid -1<a<1$ 且 $a\neq 0\}$　　(D) $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1$ 且 $a\neq 0\}$

【参考答案】D

由 $P\cup M=P$ 得 $M\subseteq P$, 所以 $a\in P$, $-a\in P$, 即 $-1\leqslant -a\leqslant 1$, 且 $-1\leqslant a\leqslant 1$, 解得 $-1\leqslant a\leqslant 1$, 又因为 $-a\neq a$, 所以 $a\neq 0$, 故选 D.

2. 已知 i 是虚数单位, 若 $z=\dfrac{\mathrm{i}+a}{1+\mathrm{i}}$ 为纯虚数, 则实数 $a=$ (　　)

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

【参考答案】B

因为 $z=\dfrac{\mathrm{i}+a}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(a+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{a-a\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2}=\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{1-a}{2}\mathrm{i}$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases}\dfrac{a+1}{2}=0,\\ \dfrac{1-a}{2}\neq 0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$.

3. 在 $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x)^n$ 的展开式中, 第 4 项和第 5 项的二项式系数相等, 则展开式中 x^5 的系数为 (　　)

(A) $\dfrac{35}{8}$　　(B) $-\dfrac{35}{8}$　　(C) $\dfrac{9}{2}$　　(D) $-\dfrac{9}{2}$

【参考答案】B

4. 函数 $f(x)=2^x+x$, $g(x)=\log_2 x+x$, $h(x)=\sqrt{x}+x$ 的零点分别为 a,b,c, 则 a,b,c 的大小顺序为 (　　)

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $b>c>a$　　(D) $c>a>b$

【参考答案】(2024 丰台高一上期末 7) C

5. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$, 则点 A 到直线 BC 的距离为 (　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】A

由题意得 $\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $0^\circ<\angle ABC<180^\circ$, 所以 $\angle ABC=30^\circ$, 又因为 $|\overrightarrow{BA}|=1$, 所以点 A 到 BC 的距离为 $|\overrightarrow{BA}|\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}$.

6. 设 α,β 是三角形的两个内角, 下列结论中正确的是 (　　)

(A) 若 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

(B) 若 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha+\cos\beta<\sqrt{2}$

(C) 若 $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta>1$

(D) 若 $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha+\cos\beta>1$

【参考答案】(2020 东城高三上期末 7) A

7. 已知直线 $l: y=mx-m-1$, P 为圆 $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上一动点, 设 P 到直线 l 距离的最大值为 $d(m)$, 当 $d(m)$ 最大时, m 的值为 (　　)

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) 2

【参考答案】(2022 东城高三上期末 8) A

8. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 则 "存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$" 是 "对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+3}>a_n$" 的 (　　)

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

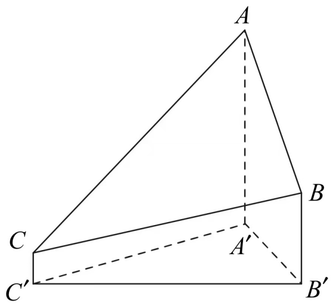
【参考答案】C

设 $\{a_n\}$ 公比为 q, 显然 $q\neq 0$, 且 $q\neq 1$.

①由 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ 可得 $\begin{cases}a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}(q-1)>0,\\ a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)>0,\end{cases}$ 显然有 a_n 与 a_{n+1} 符号相同, 则 $q>0$. 若 $a_n>0$, 则有 $\begin{cases}q^2-1>0,\\ q-1>0,\end{cases}$ 解得 $q>1$, 此时 $a_{n+3}-a_n=a_n(q^3-1)$. 因为 $q>1$, 所以 $q^3>1$, 又 $a_n>0$, 所以 $a_{n+3}-a_n>0$, 所以 $a_{n+3}>a_n$; 若 $a_n<0$, 则有 $\begin{cases}q^2-1<0,\\ q-1<0,\end{cases}$ 解得 $-1<q<1$. 又 $q>0$, 所以 $0<q<1$, 此时 $a_{n+3}-a_n=a_n(q^3-1)$. 因为 $0<q<1$, 所以 $q^3<1$, 又 $a_n<0$, 所以 $a_{n+3}-a_n>0$, 所以 $a_{n+3}>a_n$.

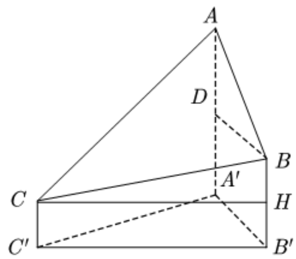
②因为 $a_{n+3}>a_n$, 所以 $a_{n+3}-a_n=a_n(q^3-1)>0$. 因为 q 是常数, 所以 a_n 符号恒定, 所以 $q>0$. 若 $a_n>0$, 则 $q^3>1$, 所以 $q>1$, 显然此时有 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ 成立; 若 $a_n<0$, 则 $q^3<1$, 此时有 $-1<q<1$, 所以 $0<q<1$, 此时有 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ 成立. 综上所述, "存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$" 是 "对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+3}>a_n$" 的充分必要条件.

9. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠穆高峰测量法之一, 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45°$, $\angle A'B'C' = 60°$, 由 C 点测得 B 点的仰角为 $15°$, BB' 与 CC' 的差为 100, 由 B 点测得 A 点的仰角为 $45°$, 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 ($\sqrt{3} \approx 1.732$) (　　)



(A) 346　　(B) 373　　(C) 446　　(D) 473

【参考答案】(2021 高考全国甲理 8) B



过 C 作 $CH \perp BB'$, 过 B 作 $BD \perp AA'$,

故 $AA' - CC' = AA' - (BB' - BH) = AA' - BB' + 100 = AD + 100$,

由题, 易知 $\triangle ADB$ 为等腰直角三角形,

所以 $AD = DB$,

所以 $AA' - CC' = DB + 100 = A'B' + 100$,

因为 $\angle BCH = 15°$,

所以 $CH = C'B' = \dfrac{100}{\tan 15°}$,

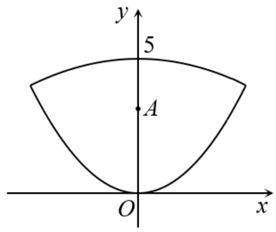
在 $\triangle A'B'C'$ 中, 由正弦定理得: $\dfrac{A'B'}{\sin 45°} = \dfrac{C'B'}{\sin 75°} = \dfrac{100}{\tan 15° \cos 15°} \dfrac{100}{\sin 15°}$,

而 $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

所以 $A'B' = \dfrac{100 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 100(\sqrt{3} + 1) \approx 273$,

所以 $AA' - CC' = A'B' + 100 \approx 373$.

10. 已知抛物线 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ 和 $y = -\dfrac{1}{16}x^2 + 5$ 所围成的封闭曲线如图所示, 已知点 $A(0, a)$, 若在此封闭曲线上至少存在两对不同的点, 满足每一对点关于点 A 对称, 则实数 a 的取值范围是 (　　)



(A) $(1, 4]$　　(B) $[\dfrac{5}{2}, 4)$　　(C) $[\dfrac{5}{2}, 3)$　　(D) $(2, 3]$

【参考答案】(2015 西城一模理 (改编) 8) B

二、填空题共 5 小题。

11. 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$, 则 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ 的值是 ________ .

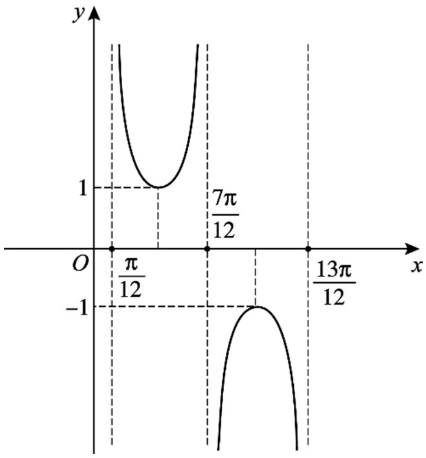
【参考答案】$-\frac{3}{5}$.

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率为 2, 则实数 $m=$ ________ .

【参考答案】(2023 平谷一模 12) -9.

由题知, $m<0$, 则方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线, 所以 $a^2=3$, $b^2=-m$, 则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1-\frac{m}{3}}=2$, 所以 $1-\frac{m}{3}=4$, 解得 $m=-9$.

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$, 若 $g(x)\cdot f(x)=1$, 且函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则 φ 等于 ________ .



【参考答案】(2023 朝阳高三上期末 (改编) 7) $-\frac{\pi}{6}$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x\leqslant a, \\ -x, & x>a. \end{cases}$

(1) 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ________ ;

(2) 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是 ________ .

【参考答案】(2023 石景山一模 14) 2, $(-\infty,-\sqrt{2})$.

15. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=AD=1$, 动点 E, F 分别在线段 AB 和 CC_1 上. 给出下列四个结论:

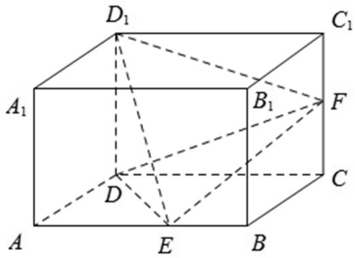
①四面体 D_1DEF 的体积为 $\frac{1}{3}$;

② $\triangle D_1EF$ 可能是等边三角形;

③当 $D_1E\perp DF$ 时, $D_1F\leqslant EF$;

④有且仅有两组 E, F, 使得三棱锥 D_1-DEF 的四个面均为直角三角形.

其中所有正确结论的序号是 __________ .



【参考答案】(2023 昌平二模 (改编) 15) ①③.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{4})\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 上的最值.

【参考答案】

(1) 因为 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+2(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,

所以当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $f(\frac{\pi}{3})=1$, 当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(-\frac{\pi}{12})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

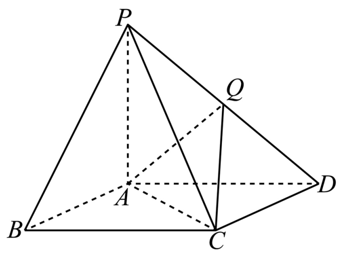
17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, Q 为棱 PD 的中点.

(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 ACQ;

(2) 若 $BA \perp PD$, 再从条件①、条件②、条件③中选择若干个作为已知, 使四棱锥 $P-ABCD$ 唯一确定, 并求:

(i) 直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值

(ii) 点 P 到平面 ACQ 的距离.



条件①: 二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $45°$;

条件②: $PD = \sqrt{2}$

条件③: $AQ \perp PC$.

【参考答案】(2023 房山高三上期末 (改编) 17)

(1) 连接 BD, 交 AC 于 O, 连接 OQ,

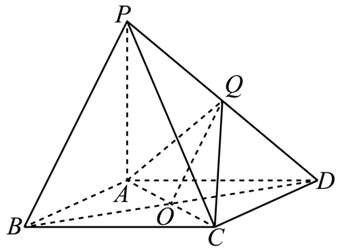
底面 $ABCD$ 是正方形, 故 O 是 BD 的中点,

又因为 Q 为棱 PD 的中点,

所以, 在 $\triangle PBD$ 中 $OQ \parallel PB$,

而 $OQ \subset$ 面 ACQ, $PB \not\subset$ 面 ACQ,

所以 $PB \parallel$ 平面 ACQ.



(2) 选①②:

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BA \perp AD$, $AD \perp CD$, $BA \parallel CD$,

又因为 $BA \perp PD$, 所以 $CD \perp PD$,

因为二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $45°$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $AD \perp CD$, $PD \perp CD$,

所以 $\angle ADP = 45°$,

在 $\triangle PAD$ 中, $PA^2 = AD^2 + PD^2 - 2 \cdot AD \cdot PD \cos \angle ADP = 1$,

所以 $PA^2 + AD^2 = PD^2$,

故 $PA \perp AD$,

又因为 $BA \perp AD$, $BA \perp PD$, $AD \cap PD = D$, AD、$PD \subset$ 平面 PAD,

所以 $BA \perp$ 平面 PAD,

选①③:

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BA \perp AD$, $AD \perp CD$, $BA \parallel CD$,

又因为 $BA \perp PD$, 所以 $CD \perp PD$,

因为二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $45°$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $AD \perp CD$, $PD \perp CD$,

所以 $\angle ADP = 45°$,

因为 $CD \perp PD$, $CD \perp AD$, $AD \cap PD = D$, AD、$PD \subset$ 平面 PAD,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD,

又因为 $AQ \subset$ 平面 PAD, 所以 $CD \perp AQ$,

又因为 $AQ \perp PC$, $PC \cap CD = C$, PC、$CD \subset$ 平面 PCD,

所以 $AQ \perp$ 平面 PCD,

因为 $PD \subset$ 平面 PCD, 所以 $AQ \perp PD$,

又因为 Q 为 PD 中点, 所以 $PA = AD$,

所以 $\angle APD = \angle ADP = 45°$,

所以 $\angle PAD = 90°$, 即 $PA \perp AD$,

因为 $BA \parallel CD$, $CD \perp$ 平面 PAD,

所以 $BA \perp$ 平面 PAD,

选②③:

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AD \perp CD$, $BA \parallel CD$,

因为 $CD \perp PD$, $CD \perp AD$, $AD \cap PD = D$, AD、$PD \subset$ 平面 PAD,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD,

又因为 $AQ \subset$ 平面 PAD, 所以 $CD \perp AQ$,

又因为 $AQ \perp PC$, $PC \cap CD = C$, PC、$CD \subset$ 平面 PCD,

所以 $AQ \perp$ 平面 PCD,

因为 $PD \subset$ 平面 PCD, 所以 $AQ \perp PD$,

又因为 Q 为 PD 中点, 所以 $PA = AD = 1$,

在 $\triangle PAD$ 中, $PA^2 + AD^2 = PD^2$,

故 $PA \perp AD$,

因为 $BA \parallel CD$, $CD \perp$ 平面 PAD,

所以 $BA \perp$ 平面 PAD,

选①②③同上.

以 A 为原点, AB, AD, AP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $Q(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $P(0,0,1)$,

故 $\overrightarrow{AQ} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{PC} = (1,1,-1)$,

令 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$ 为面 ACQ 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC} = x + y = 0. \end{cases}$

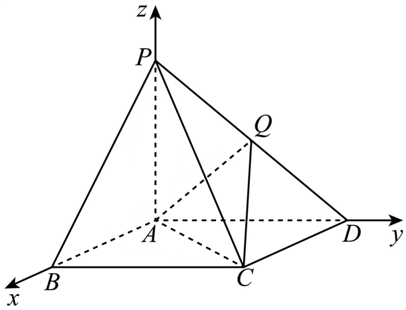
令 $x = 1$, 则 $\boldsymbol{m} = (1,-1,1)$,

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m}, \overrightarrow{PC}\rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{PC}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$,

即直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$,

所以点 P 到平面 ACQ 的距离 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{PC}| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 以 A 为原点, AB, AD, AP 为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $Q(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$, $P(0,0,1)$,



故 $\overrightarrow{AQ} = (0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{PC} = (1,1,-1)$,

令 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$ 为面 ACQ 的一个法向量, 则

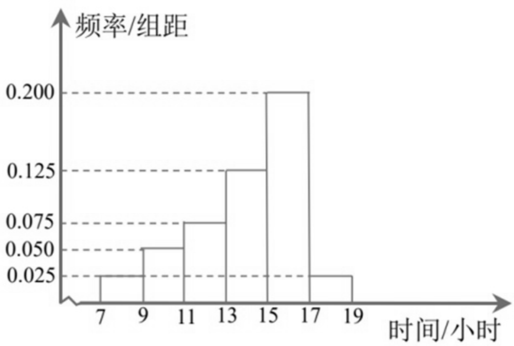
$$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z = 0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC} = x + y = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $\boldsymbol{m} = (1,-1,1)$,

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m}, \overrightarrow{PC}\rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{PC}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$, 即直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$,

所以点 P 到平面 ACQ 的距离 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{PC}| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

18. “双减” 政策执行以来, 中学生有更多的时间参加志愿服务和体育锻炼等课后活动. 某校为了解学生课后活动的情况, 从全校学生中随机选取 100 人, 统计了他们一周参加课后活动的时间 (单位: 小时), 分别位于区间 $[7,9)$, $[9,11)$, $[11,13)$, $[13,15)$, $[15,17)$, $[17,19]$, 用频率分布直方图表示如下:



假设用频率估计概率, 且每个学生参加课后活动的时间相互独立.

(1) 估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间 $[13,17)$ 的概率;

(2) 从全校学生中随机选取 3 人, 记 ξ 表示这 3 人一周参加课后活动的时间在区间 $[15,17)$

的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$;

(3) 设全校学生一周参加课后活动的时间的中位数估计值为 a、平均数的估计值为 b (计算平均数时, 同组中的每个数据都用该组区间的中点值代替), 请直接写出 a, b 的大小关系.

【参考答案】(2023 东城高三上期末 (改编) 18)

(1) 根据频率分布直方图, 可得学生一周参加课后活动的时间位于区间 $[13, 17)$ 的频率为 $(0.125 + 0.200) \times 2 = 0.65$,

因此估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间 $[13, 17)$ 的概率为 0.65.

(2) 从全校学生中随机选取 1 人, 其一周参加课后活动的时间在区间 $[15, 17)$ 的概率为 0.4.

因此 $\xi \sim B(3, 0.4)$.

$P(\xi = 0) = (1 - 0.4)^3 = 0.216$, $P(\xi = 1) = C_3^1 \times 0.4^1 \times (1 - 0.4)^2 = 0.432$,

$P(\xi = 2) = C_3^2 \times 0.4^2 \times (1 - 0.4)^1 = 0.288$, $P(\xi = 3) = 0.4^3 = 0.064$.

则 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

$E\xi = 0 \times 0.216 + 1 \times 0.432 + 2 \times 0.288 + 3 \times 0.064 = 1.2$.

(3) $b < a$.

19. 已知椭圆 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的右顶点 $A(2, 0)$, P 为椭圆 C 上的动点, 且点 P 不在 x 轴上, O 是坐标原点, $\triangle AOP$ 面积的最大值为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(2) 过点 $H(-1, 0)$ 的直线 PH 与椭圆 C 交于另一点 Q, 直线 AP, AQ 分别与 y 轴相交于点 E, F. 当 $|EF| = 2$ 时, 求直线 PH 的方程.

【参考答案】(2023 朝阳高三上期末 19)

(1) 因为 $\triangle AOP$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}ab$, 所以 $\dfrac{1}{2}ab = 1$.

又因为 $a = 2, c^2 = a^2 - b^2$, 所以 $b = 1, c = \sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) ①当直线 PH 的斜率不存在时, 直线 PH 的方程为 $x = -1$. 显然 $\triangle APQ \backsim \triangle AEF$.

因为 $|PQ| = \sqrt{3}$, 所以 $|EF| = \dfrac{2}{3}|PQ| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \neq 2$. 不合题意.

②当直线 PH 的斜率存在时, 设直线 PH 的方程为 $y = k(x + 1)$.

由 $\begin{cases} y = k(x+1), \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2 + 8k^2x + (4k^2-4) = 0$.

显然 $\Delta > 0$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 且 $x_1 \neq \pm 2$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{1+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2-4}{1+4k^2}$.

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x = 0$, 得点 E 的纵坐标 $y_E = \frac{-2y_1}{x_1-2}$, 则 $E(0, \frac{-2y_1}{x_1-2})$.

直线 AQ 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

同理可得 $F(0, \frac{-2y_2}{x_2-2})$.

所以 $|EF| = \left|\frac{-2y_1}{x_1-2} - \frac{-2y_2}{x_2-2}\right| = 2\left|\frac{y_2(x_1-2) - y_1(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|$

$= 2\left|\frac{k(x_2+1)(x_1-2) - k(x_1+1)(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|$

$= 6|k| \cdot \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4}\right| = 2$.

所以 $3|k| \cdot |x_1 - x_2| = |x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4|$.

即 $3\,|k|\,\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = |x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4|$.

可得 $3|k|\sqrt{(-\frac{8k^2}{1+4k^2})^2 - 4 \times \frac{4k^2-4}{1+4k^2}} = \left|\frac{4k^2-4}{1+4k^2} + 2 \times \frac{8k^2}{1+4k^2} + 4\right|$.

化简得 $3|k| \cdot \frac{4\sqrt{3k^2+1}}{1+4k^2} = \frac{36k^2}{1+4k^2}$. 解得 $k = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 PH 的方程为 $x - \sqrt{6}y + 1 = 0$ 或 $x + \sqrt{6}y + 1 = 0$.

20. 已知函数 $f(x) = \sin x + e^x + a\ln(x+1)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2) 当 $a \leqslant -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的最小值;

(3) 写出实数 a 的一个值, 使得 $f(x) \geqslant 1$ 恒成立, 并证明.

【参考答案】

(1) 因为 $f(x) = \sin x + e^x + a\ln(x+1)$, 所以 $f'(x) = \cos x + e^x + \frac{a}{x+1}$,

所以 $f'(0) = a + 2$, $f(0) = 1$, 所以切线方程为 $y = (a+2)x + 1$, 即 $(a+2)x - y + 1 = 0$.

(2) 当 $a \leqslant -2$ 时, $f(x) = \sin x + e^x + a\ln(x+1)$, $f'(x) = \cos x + e^x + \frac{a}{x+1}$.

当 $x \in (-1, 0]$ 时, $\cos x + e^x \leqslant 2$, $\frac{-a}{x+1} \geqslant 2$, 所以 $f'(x) \leqslant 0$ 恒成立, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$.

(3) $a = -2$.

证明: 当 $a=-2$ 时, $f'(x)=\cos x+e^x-\dfrac{2}{x+1}$,

根据 (2), 当 $x\in(-1,0]$ 时, $f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 设 $g(x)=\cos x+e^x-\dfrac{2}{x+1}$, 则 $g'(x)=e^x+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\sin x$,

$e^x+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\sin x>1+\dfrac{2}{(x+1)^2}-1>0$, 所以 $f'(x)=\cos x+e^x-\dfrac{2}{x+1}$ 单调递增,

$f'(x)>f'(0)=0$, 所以 $f(x)$ 单调递增.

综上所述, $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$.

21. 已知 $Q: a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷正整数数列, 且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$, 集合 $X=\{-1,0,1\}$. 若存在 $x_i\in X$, $i=1,2,\cdots,k$, 使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=t$, 则称 t 为 $k-$ 可表数, 称集合 $T=\{t\mid t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k, x_i\in X, i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $k-$ 可表集.

(1) 若 $k=10$, $a_i=2^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,k$, 判定 31, 1024 是否为 $k-$ 可表数, 并说明理由;

(2) 若 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$, 证明: $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$;

(3) 设 $a_i=3^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,k$, 若 $\{1,2,\cdots,2024\}\subseteq T$, 求 k 的最小值.

【参考答案】(2024 昌平高三上期末 21)

(1) 因为 $-1\times2^0+0\times(2^1+2^2+2^3+2^4+2^6+2^7+2^8+2^9)+1\times2^5=31$,

所以 31 为 $k-$ 可表数.

又 $x_1\times2^0+x_2\times2^1+\cdots+x_{10}\times2^9\leqslant1\times2^0+1\times2^1+\cdots+1\times2^9=2^{10}-1=1023<1024$,

所以 1024 不是 $k-$ 可表数.

(2) 由题设, $0=0\times a_1+0\times a_2+\cdots+0\times a_k$, 所以 $0\in T$.

若 $s\in T$, 则存在 $x_i\in X$, $i=1,2,\cdots,k$, 使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=s$,

所以 $-(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k)=-s$, 且 $-x_i\in X$.

所以 $-s\in T$.

因为 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$, 所以 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}\subseteq T$.

所以集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 中元素的个数不超过集合 T 的元素个数.

又因为集体 T 中元素个数至多为 3^k,

所以 $2n+1\leqslant3^k$, 即 $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$.

(3) 由题设, 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 存在 $m\in\mathbf{N}^*$, 使 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$.

又 $x_1\times1+x_2\times3+x_3\times3^2+\cdots+x_{m-1}\times3^{m-2}\leqslant1\times1+1\times3+1\times3^2+\cdots+1\times3^{m-2}=\dfrac{3^{m-1}-1}{2}$,

所以 $k>m-1$. 所以 $k\geqslant m$.

而 $1\times1+1\times3+1\times3^2+\cdots+1\times3^{m-1}=\dfrac{3^m-1}{2}$,

即当 $n=\dfrac{3^m-1}{2}$ 时, 取 $a_1=1, a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$, n 为 $m-$ 可表数.

因为 $2(1+3+3^2+\cdots+3^{m-1})=2\times\frac{3^m-1}{2}=3^m-1$,

由三进制基本事实可知, 对任意的 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$, 存在 $r_i\in\{0,1,2\}$, $i=1,2,\cdots,m$,

使 $p=r_1\times 3^0+r_2\times 3^1+\cdots+r_m\times 3^{m-1}$.

所以 $p-\frac{3^m-1}{2}=(r_1\times 3^0+r_2\times 3^1+\cdots+r_m\times 3^{m-1})-(3^0+3^1+\cdots+3^{m-1})$

$=(r_1-1)\times 3^0+(r_2-1)\times 3^1+\cdots+(r_m-1)\times 3^{m-1}$.

令 $x_i=r_i-1$, 则有 $x_i\in\{-1,0,1\}$, $i=1,2,\cdots,m$.

设 $t=p-\frac{3^m-1}{2}$, 则 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3^m-1}{2}$,

由 p 任意性, 对任意的 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3^m-1}{2}$, $t\in\mathbf{Z}$,

都有 $t=x_1\times 3^0+x_2\times 3^1+\cdots+x_m\times 3^{m-1}$, $x_i\in\{-1,0,1\}$, $i=1,2,\cdots,m$.

又因为 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$, 所以对于任意的 $-n\leqslant t\leqslant n$, $t\in\mathbf{Z}$, t 为 $m-$ 可表数.

综上, 可知 k 的最小值为 m, 其中 m 满足 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

又因为当 $n=2024$ 时, $\frac{3^7-1}{2}<n\leqslant\frac{3^8-1}{2}$.

所以 k 的最小值为 8.