下学期数学统练一

（高21级）2024.2

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题 共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{1,2\}$，$A\subseteq B$，则 B 可以为( )

(A) $\{3\}$　　(B) $\{1,3,4\}$　　(C) $\{2\}$　　(D) $\{1,2,3\}$

(2) 已知复数 z 满足 $\bar{z}-z=2\mathrm{i}$，则 z 的虚部为( )

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

(3) 工人师傅在检测椅子的四个"脚"是否在同一个平面上时，只需连接对"脚"的两条线段，看它们是否相交，就知道它们是否合格.工人师傅运用的数学原理是( )

(A) 两条相交直线确定一个平面　　(B) 两条平行直线确定一个平面

(C) 四点确定一个平面　　(D) 直线及直线外一点确定一个平面

(4) 若函数 $f(x)=\begin{cases}x+a, x<0,\\ bx-1, x>0\end{cases}$ 是奇函数，则( )

(A) $a=1,b=-1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=1$　　(D) $a=-1,b=-1$

(5) 已知 a,b,c 分别为△ABC 三个内角 A,B,C 的对边，若 $a^2-b^2=bc$，$\sin C=2\sin B$，则 A 等于( )

(A) $\dfrac{5\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

(6)已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，$|AF|=2|BF|$，则( )

(A) $|BF|=\dfrac{1}{3}p$　　(B) $|BF|=\dfrac{1}{2}p$　　(C) $|BF|=\dfrac{2}{3}p$　　(D) $|BF|=\dfrac{3}{4}p$

(7) 在无穷项等比数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项的和， 则“$\{a_n\}$既有最大值，又有最小值”是“$\{S_n\}$既有最大值，又有最小值”的( )

(A) 充分不必要条件　　　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分又不必要条件

(8) 已知关于x的方程$|2^x-a|=\dfrac{a}{2^x}$有 3 个不同的实数解，则实数a的取值范围为.( )

(A) $(0,2)$　　(B) $(2,4)$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $(4,+\infty)$

(9)在平面直角坐标系 xOy 中，对于点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若$x_2-x_1=y_2-y_1$，则称点A和点B互为等差点.已知点Q是圆$x^2+y^2=4$上一点，若直线$x=2\sqrt{2}$上存在点Q的等差点P，则$|OP|$的取值范围为.( )

(A)$[2\sqrt{2},4\sqrt{2}]$　　(B) $[\sqrt{10},2\sqrt{10}]$　　(C) $[2\sqrt{2},2\sqrt{10}]$　　(D) $[2\sqrt{2},8]$

(10) 平面内互不重合的点A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3、B_4，若$|\overrightarrow{A_1B_i}+\overrightarrow{A_2B_i}+\overrightarrow{A_3B_i}|=i$，其中$i=1,2,3,4$，则$|B_1B_2|+|B_2B_3|+|B_3B_4|$的取值范围为( )

(A) $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{16}{3}\right]$　　(C) $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{10}{3}\right]$　　(D) $[1,5]$

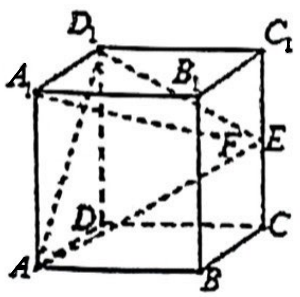
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分.

(11) 已知$(x-1)^3+(x+1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_2=$_______.

(12) 双曲线$x^2-2y^2=1$的离心率为________.

(13) 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，前 n 项和记为$S_n(n\in N^*)$，满足$3a_2+2a_3=S_3+6$，若数列$\{S_n\}$为单调递增数列，则公差 d 的取值范围为_________.



(14) 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱CC_1的中点，F是侧面BCC_1B_1内的动点，且$A_1F//$平面D_1AE，若正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长是 2，则线段A_1F的最

小值________.

(15) 海水受日月的引力，会发生潮汐现象．在通常情况下，船在涨潮时驶入航道，进入港口，落潮时返回海洋．某兴趣小组通过 AI 技术模拟在一次潮汐现象下货船出入港口的实验：首先，设定水深y（单位：米）随时间x（单位：小时）的变化规律为

$y=0.8\sin\omega x+2$（$\omega\in\mathbf{R}$），其中$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{\omega}$；然后，假设某虚拟货船空载时吃水深度（船底与水面的距离）为 0.5 米，满载时吃水深度为 2 米，卸货过程中，随着货物卸载，吃水深度以每小时 0.4 米的速度减小；并制定了安全条例，规定船底与海底之间至少要有 0.4 米的安全间隙．

在此次模拟实验中，若货船满载进入港口，那么以下结论正确的是________.

① 若$\omega=\frac{\pi}{6}$，货船在港口全程不卸货，则该船在港口至多能停留 4 个小时；

② 若$\omega=\frac{\pi}{6}$，该货船进入港口后，立即进行货物卸载，则该船在港口至多能停留 4 个小时；

③ 若$\omega=1$，货船于$x=1$时进入港口后，立即进行货物卸载，则$x=\frac{\pi}{2}$时，船底离海底的距离最大；

④ 若$\omega=1$，货船于$x=1$时进入港口后，立即进行货物卸载，则$x=\frac{2\pi}{3}$时，船底离海底的距离最大.

三、解答题 共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

已知函数$f(x)=\cos2x+a\sin x$，$f(\frac{\pi}{2})=-2$.

(I)求$f(x)$的最小值；

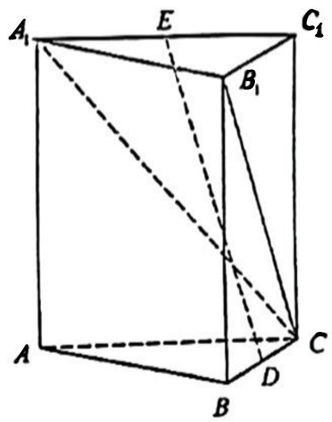
(II)设$g(x)=\sqrt{2}f(x-\frac{\pi}{4})+2\sin x$，求$g(x)$的取值范围.

(17) (本小题 13 分)

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC，ΔABC为正三角形，D，E分别为BC和A_1C_1的中点.

(I)求证：$DE//$平面ABB_1A_1；

(II)$AB=2$，$AA_1=3$，再从条件①，条件②，条件③中选择一个作为已知，使三棱柱唯一确定，求DE与平面A_1B_1C所成角的正弦值。



条件①：$DE=4$

条件②：$A_1C=B_1C$

条件③：$BB_1\perp AC$

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

甲、乙两名同学积极参与体育锻炼，对同一体育项目，在一段时间内甲进行了6次测试，乙进行了7次测试．每次测试满分均为100分，达到85分及以上为优秀，两位同学的测试成绩如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	平均分
甲	82	80	82	86	93	93		86
乙	76	81	80	85	89	96	95	86

(I)从甲、乙两名同学共进行的13次测试中随机选取一次，求该次测试成绩超过90分的概率；

(II)从甲同学进行的6次测试中随机选取4次，设X表示这4次测试成绩达到优秀的次数，求X的分布列及数学期望$E(X)$；

(III)记样本中甲进行的六次测试成绩的方差为S_1^2，样本中乙进行的七次测试成绩的方差为S_2^2，样本中甲、乙两名同学共进行的13次测试成绩的方差为S_3^2，写出S_1^2，S_2^2，S_3^2的大小关系．(结论不要求证明)

(19)(本小题15分)

已知函数 $f(x)=(x-2)e^{ax}+b$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为

$y=-3x-3$.

(I) 求 a,b 的值；

(II) ① 求证：$f(x)$ 只有一个零点；

② 记 $f(x)$ 的零点为 x_0，曲线 $y=f(x)$ 在 $(u,f(u))$ 处的切线 l 与 x 轴的交点横坐标为

x_1，若 $x_1\geq x_0$，求 u 的取值范围.

(20)(本小题15分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$E$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，短轴长为4.

（I）求椭圆 E 的标准方程；

（II）对于给定的点 $P(0,t)$，在 E 上存在不同的三点 A,B,Q，使得四边形 $APBQ$ 为平行四边形，且直线 AB 过点 $(0,1)$，求 t 的取值范围.

(21)(本小题15分)

由 m 个正整数构成的有限集 $M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$（其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_m$），记 $P(M)=a_1+a_2+\cdots+a_m$，特别规定 $P(\varnothing)=0$，若集合 M 满足：对任意的正整数 $k\leqslant P(M)$，都存在集合 M 的两个子集 A，B，使得 $k=P(A)-P(B)$ 成立，则称集合 M 为"满集".

（I）分别判断集合 $M_1=\{1,2\}$ 与 $M_2=\{2,3\}$ 是否为"满集"，请说明理由；

（II）若集合 M 为"满集"，求 a_1 的值；

（III）若 M 为满集，$P(M)=2024$，求 m 的最小值.