人大附中2024届高三寒假自主复习检测

数　学

说明：本试卷21道题，共150分；考试时间120分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上．

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置．）

1．已知集合$U=\{-1,0,1,2\}$　$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,1,2\}$，则$\{-1\}\subseteq$（　　）

A．$\complement_U A$　　B．$\complement_U B$　　C．$(\complement_U A)\cap B$　　D．$\complement_U(A\cup B)$

2．$(1-x)^2(1+x)^3$的展开式中x^4项的系数为（　　）

A．1　　B．3　　C．-2　　D．-3

3．数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足：$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n$，若$a_k<100$，则k的最大值为（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

4．已知$a=\log 1.41, b=1.41^{0.4}, c=\cos\frac{13\pi}{3}$，则（　　）

A．$b>a>c$　　B．$b>c>a$

C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

5．在$\triangle ABC$中，若$a-c\cos B=b-c\cos A$，则$\triangle ABC$的形状是（　　）

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰直角三角形　　D．等腰或直角三角形

6．已知AB是圆O：$x^2+y^2=1$的直径，C、D是圆O上两点，且$\angle COD=60°$，则$(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{AB}$的最小值为（　　）

A．0　　B．$-\sqrt{3}$　　C．3　　D．$-2\sqrt{3}$

7．已知双曲线E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的焦点为$F_1,F_2$，离心率为2，点$P$是$E$上一点，若$\triangle PF_1F_2$的面积为$ac$，则$\angle F_1PF_2$为（　　）

A．锐角　　B．直角　　C．钝角　　D．不能确定

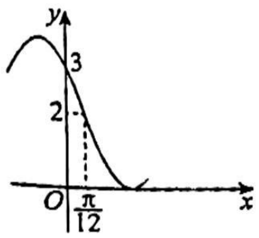
8．已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，则“$S_n \geq na_n$”是“$\{a_n\}$是递减数列”的（　　）

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

9．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$的部分图象如图所示，且$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},2\right)$对称，则$f(\varphi)=$（　　）

A．4　　　　B．3　　　　C．2　　　　D．0



10．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x, & x>a, \\ 2x-a, & x<a\end{cases}$有最大值，并将其记为$F(a)$，则说法正确的是（　　）

A．a的最小值为-2，$F(a)$的最大值为2

B．a的最大值为$\sqrt{2}$，$F(a)$的最小值为$\sqrt{2}$

C．a的最大值为$\sqrt{2}$，$F(a)$的最大值为2

D．a的最小值为-2，$F(a)$的最小值为$\sqrt{2}$

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分　共25分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11．设i为虚数单位，若复数z满足$z\cdot(2-\mathrm{i})=5$，则$\bar{z}=$______.

12．已知向量$\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(m,1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$m=$__________

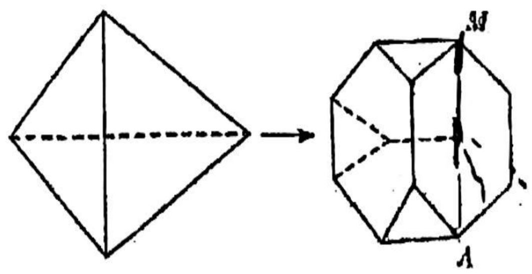
13．已知抛物线$C:y^2=12x$的焦点为F，P是准线l上一点，直线PF与C的一个交点为Q，且$\overline{PQ}=2\overline{QF}$，

则$\angle PFO=$______，Q点的横坐标为______.

14. 将正四面体每条棱三等分，截去四个顶角所在的小正四面体，余下的多面体就成为一个“半正多面体”.

如图，点 A,B,M 是该“半正多面体”的三个顶点，点 N 是该多面体表面上的动点，且总满足 $MN\perp AB$，

若 $AB=4$，则该多面体的表面积为__________，点 N 轨迹的长度为__________.



15 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=0,a_{n+1}=a_n^2+c$ （$n\in\mathbf{N}^*$，$c\in\mathbf{R}$），当 $n\geq 2$ 时，记

$M_n=\{c\mid\forall i\in\{1,2,3,\cdots,n\},|a_i|\leq 2\}$，$M=\{c\mid\forall i\in\mathbf{N}^*,|a_i|\leq 2\}$．给出如下 4 个结论：

①$M_3=[-2,1]$；

② 当 $c>\frac{1}{4}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是递增数列

③当 $0<c\leq\frac{1}{4}$ 时，存在正数 t 使得 $\exists m\in\mathbf{N}^*,\forall n>m$，$|a_n-t|<2^{-100}$

④集合 $M=[0,\frac{1}{4}]$．

其中正确命题的序号是____________

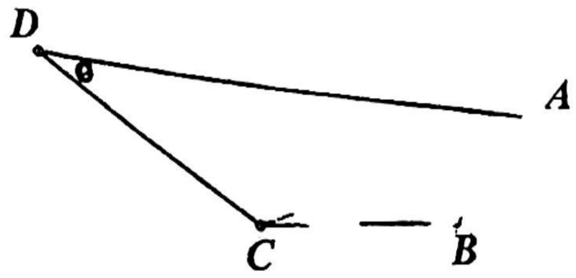
三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．请在答题纸上的相应位置作答．）

16.（本小题 12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$，$S_{\triangle ABC}=2$，$\angle BAC=\angle DAC$，$CD=2AB=4$．

（Ⅰ）求线段 AC 的长度；

（Ⅱ）求 $\sin\angle ADC$ 的值．



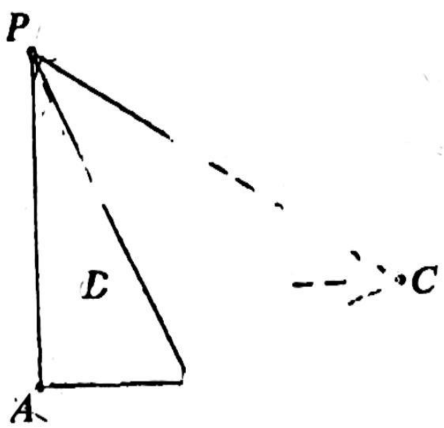
17.（本小题 15 分）

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为梯形 $ABCD$，且 $AB//CD$，又 $PA\perp AD,AB=AD=1$，$CD=2$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$．

（Ⅰ）判断直线 l 和 BC 的位置关系，并说明理由；

（Ⅱ）若点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{2}{3}$，请从下列①②中选出一个作为已知条件，求二面角 $B-l-D$ 余弦值大小．

① $CD\perp AD$； ② $\angle PAB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角．



18. （本小题 13 分）

每年 8 月 8 日为我国的全民健身日，倡导大家健康、文明、快乐的生活方式．为了激发学生的体育运动兴趣，助力全面健康成长，某中学组织全体学生开展以体育锻炼为主题的实践活动．为了解该校学生参与活动的情况，随机抽取 100 名学生作为样本，统计他们参加体育锻炼活动时间（单位：分钟），得到下表：

时间人数 类别		[0，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100)
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中					10	
	高中	m	13	12	7	5	4

（Ⅰ）从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育锻炼活动时间在 $[50,60)$ 的概率；

（Ⅱ）从参加体育锻炼活动时间在 $[80,90)$ 和 $[90,100)$ 的学生中各随机抽取 1 人，其中初中学生的人数记为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设同组中每个数据用该组区间中点值代替，样本中的 100 名学生参加体育锻炼活动时间的平均数记为 μ_0，初中、高中学生参加体育锻炼活动时间的平均数分别记为 μ_1,μ_2．

写出一个 m 的值，使得 $\mu_0=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$．（结论不要求证明）

19. （本小题 15 分）

已知椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作不平行于坐标轴的直线交 Γ 于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{6}$．

（Ⅰ）求 Γ 的方程；

（Ⅱ）若 $AM\perp x$ 轴于点 M，$BN\perp x$ 轴于点 N，直线 AN 与 BM 交于点 C．求△ABC 面积的最大值．

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax+\sin x-1$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时,求在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程;

（Ⅱ）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围;

（Ⅲ）当 $1\le a<2$ 时，讨论函数 $g\left(x\right)=\left(x-2\right)f\left(x\right)$ 零点的个数.

21.（本小题 15 分）

设 m 为正整数，集合 $A\subseteq\{\alpha\mid\alpha=\left(t_1,t_2,\cdots,t_m\right),t_j\in\{-1,1\},j=1,2,\cdots,m\}$. 任取集合 A 中的 $2n+1\left(n\in\mathbb{N}_+\right)$ 个元素（可以重复）:

$\alpha_1=(\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\ldots,\alpha_{1,m}),\alpha_2=(\alpha_{2,1},\alpha_{2,2},\ldots,\alpha_{2,m}),\ldots,\alpha_{2n+1}=(\alpha_{2n+1,1},\alpha_{2n+1,2},\ldots,\alpha_{2n+1,m})$

记 $M(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n+1})=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$，其中 $y_j=\dfrac{\left|\alpha_{1,j}+\alpha_{2,j}+\ldots+\alpha_{2n+1,j}\right|}{\alpha_{1,j}+\alpha_{2,j}+\ldots+\alpha_{2n+1,j}}(j=1,2,\ldots,m)$.

（Ⅰ）若 $\alpha_1=(1,-1,-1,-1),\alpha_2=(-1,1,1,-1),\alpha_3=(-1,-1,-1,1),\alpha_4=(1,1,-1,1),\alpha_5=(-1,-1,-1,1)$，直接写出 $M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$;

（Ⅱ）对于 $\alpha,\beta,\gamma\in A$，证明：$M(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{k个},\underbrace{\beta,\ldots,\beta}_{k个},\gamma)=M(\alpha,\beta,\gamma)$;

（Ⅲ）对于某个正整数 n，若集合 A 满足：对于 A 中任意 $2n+1$ 个元素 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n+1}$，都有 $M(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n+1})\in A$，则称集合 A 具有性质 $P(n)$. 证明：若 $\exists n_0\in\mathbb{N}_+$，集合 A 具有性质 $P(n_0)$，则 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，集合 A 都具有性质 $P(n)$.